

LP n° 6.
Cinématique relativiste.

Pré requis:

- Mécanique classique.
- EM et optique.
- Décroissance radioactive.

I Insuffisance de la théorie classique.

- 1.1. Transformation de Galilée
- 1.2. Incompatibilité avec l'électromagnétisme.
- 1.3. Expérience de Fizeau (1851).

II Bases de la relativité restreinte

- 2.1. Postulats.
- 2.2. Transformation de Lorentz.
- 2.3. Composition des vitesses.
- 2.4. Retour sur l'expérience de Fizeau.

III Conséquences de la cinématique relativiste.

- 3.1. Dilatation du temps.
- 3.2. Contraction des longueurs.
- 3.3. Perte de simultanéité.
- 3.4. Invariance de l'intervalle.

Intro:

fin XIX^e méca classique connue et acceptée

EM, développé entre autres par Maxwell accepté.

↳ mais incompatibles entre elles.

Albert Einstein développe en 1905 la théorie de la relativité restreinte dans ce cadre historique que nous rappellerons en première partie.

Puis nous en présenterons les grands principes, et enfin les conséquences de cette théorie.

1.1. • outil de base de la mécanique : référentiel. (2)

déf: système d'axes de coordonnées lié à un observateur, auquel on adjoint une horloge comme mesure du temps.

- Première loi de Newton (principe d'inertie) stipule l'existence de référentiels privilégiés dans lequel tout système isolé est soit au repos, soit en mouvement de translation rectiligne uniforme.

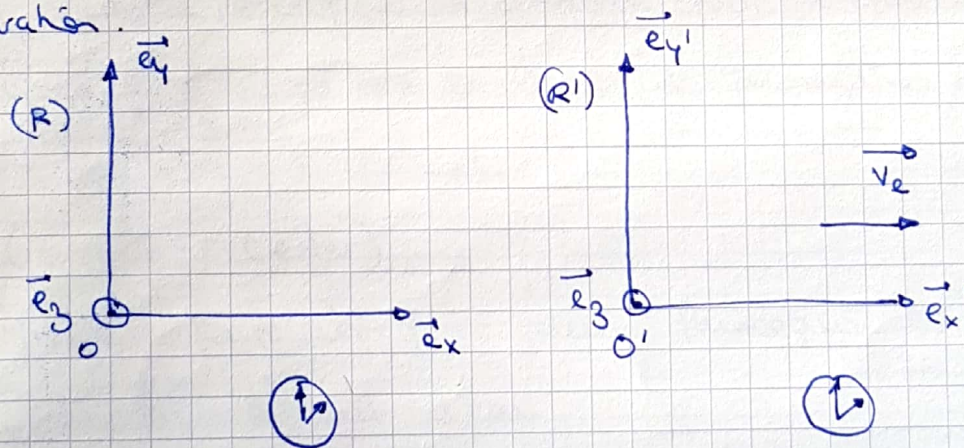
↳ référentiel inertiel / galiléen.

soit (R) (R') deux référentiels inertiels de vitesse relative v selon x .

- Notion d'événement : position d'un point à l'instant t donnée par 4 grandeurs scalaires $(t, x, y, z) \rightarrow$ événement

exemple: passage d'une particule au point (x, y, z) au temps t .

⚠ L'événement dépend du référentiel $((R)$ ou (R')) dans lequel il est observé donc il est nécessaire de connaître la loi de transformation de ces coordonnées lorsqu'on change de référentiel d'observation.



E: dans R : (t, x, y, z) .

dans R' : (t', x', y', z') .

Mécanique classique: (reste valable en relativité restreinte).

- espace homogène: le résultat d'une expérience ne dépend pas de l'endroit où on la fait
- espace isotrope: pas de direction privilégiée.
- temps uniforme: le résultat d'une expérience ne dépend pas du moment où on la fait $\rightarrow$ invariance par translation dans le temps

⚠ Temps absolu: le temps s'écoule de la même manière dans tous l'espace, donc il est possible de synchroniser les deux horloge liées aux deux référentiels inertiels, donc avoir $t = t'$.
(référence arbitraire, $t = 0$ lorsque O coïncide avec O').

donc ~~ces~~ conditions, on définit la transformation de Galilée:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t' \\ x = x' + v_e t \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right. \quad \text{pour } \vec{v}_e \text{ quelconque} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_e \cdot t \\ t = t' \end{array} \right.$$

→ en déduire immédiatement la composition de vitesse:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$$

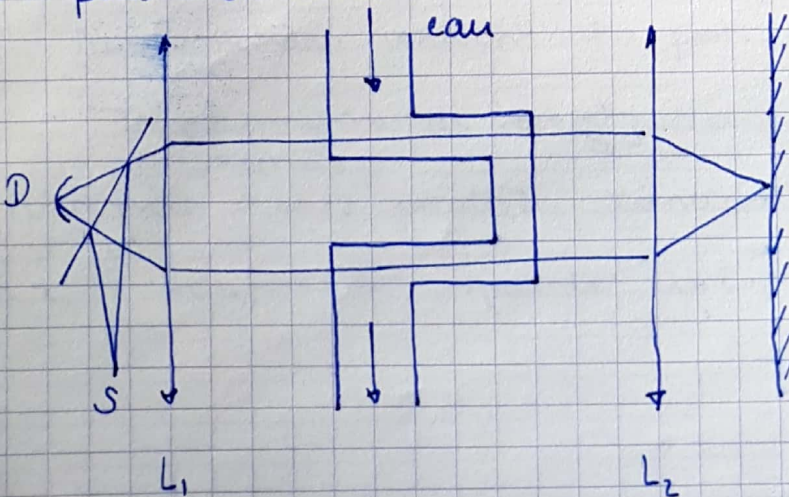
1.2. EM prévoit la propagation des ondes dans le vide à la vitesse:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{qui représente une constante fondamentale.}$$

Aucun référentiel spécifique n'est donné pour l'établissement des équations de propagation, alors que la vitesse de propagation de la lumière devrait dépendre du référentiel d'étude.

(évoquer l'éther).

1.3. Principe: faire interférer deux faisceaux lumineux passant par deux bras d'un circuit d'eau.



vitesse de l'eau $\vec{V} = V\vec{e}_x$ dans un bras.

(4)

$\vec{V} = -V\vec{e}_x$ dans l'autre.

lumière : vitesse $\frac{c}{n}$ dans le référentiel (Reau) donc $c^\pm = \frac{c}{n} \pm V$
dans le référentiel du labo (Rebo) (en utilisant la composition des vitesses
de la transformation de Galilée)

on devrait avoir :

$$\Delta t = 2L \left(\frac{1}{c^-} - \frac{1}{c^+} \right) \approx \frac{4LVn^2}{c^2} + O\left(\left(\frac{V}{c}\right)^2\right).$$

or expérimentalement, Fizeau trouve :

$$\Delta t \approx \frac{4LV}{c^2} \left(n^2 - \frac{1}{n^2} \right) + O\left(\left(\frac{V}{c}\right)^2\right).$$

$\Rightarrow$ contradiction ; nécessité de revoir les transformations de Galilée dans
la mécanique Newtonienne.

I. 1. Postulats :

1. Les lois fondamentales de la physique sont invariantes par
changement de référentiel inertiel.

2. Les équations de Maxwell sont des lois fondamentales
de la physique

Corollaire : la célérité de la lumière est la même dans tous les
référentiels inertiels, égale à c .

I. 2. Transformations vérifiant les postulats de la relativité restreinte :

Transformations de Lorentz (ou Lorentz-Borncarre),
_{inertiels}

2 référentiels d'axes parallèles coïncidant à $t=0$ en mouvement relatif v
selon x : transformation spéciale de Lorentz :

$$\begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{v_e}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + v_e t') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 1 \text{ ou } \beta = \frac{v}{c} \leq 1. \quad (2)$$

pour inverser ces formules, il suffit de modifier v_e en $-v_e$ et d'inverser les rôles de (t, x, y, z) et (t', x', y', z') .

si $v_e \ll c$ alors $\beta \ll 1 \rightarrow \gamma \sim 1$.

$$\rightarrow \begin{cases} t \approx t' \\ x \approx x' + v_e t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad \text{on retrouve la transformation de Galilée dans la limite non relativiste.}$$

2.3.
$$\begin{cases} dt = \gamma \left(dt' + \frac{v_e}{c^2} dx' \right) \\ dx = \gamma (dx' + v_e dt') \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v_e dt'}{dt' + \frac{v_e}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v_e}{1 + \frac{v_e}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}$$

$v_{||}$ composante de la vitesse parallèle à v_e . $\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma (dt' + \frac{v_e}{c^2} dx')}$
 $v_{\perp}$ " " " orthogonale " " " (idem pour z)

$$v_{||} = \frac{v'_{||} + v_e}{1 + v_e v'_{||} / c^2} \quad \text{et} \quad v_{\perp} = v'_{\perp} \frac{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_e v'_{||}}{c^2}}$$

(inversion, réciproque).

$\rightarrow$ loi de composition relativiste des vitesses. (on peut vérifier que $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2 \Leftrightarrow v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = c^2$).

2.4. $(R) = (R_{\text{lab}})$.

$(R') = (R_{\text{eau}})$.

$v_{||} = \frac{c}{n}$ donc $v_{||}^+ = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}} = c_{||}^+$

de même $c_{||}^- = \frac{\frac{c}{n} - v}{1 - \frac{v}{nc}}$.

$\Rightarrow \Delta t = 2L \left(\frac{1}{c_{||}^-} - \frac{1}{c_{||}^+} \right) \stackrel{\text{de}}{\approx} \frac{4VL}{c^2} (n^2 - 1) + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$.

en accord avec la formule expérimentale mise au point par Fizeau

33. deux référentiels inertiels (R) et (R') .

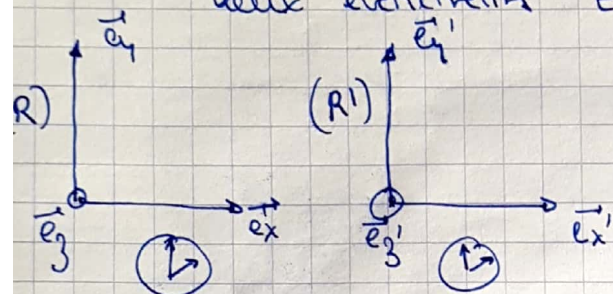
deux événements E_1 / E_2

$E_1 : (R) : (t_1, x_1, y_1, z_1)$.

$(R') : (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$.

$E_2 : (R) : (t_2, x_2, y_2, z_2)$.

$(R') : (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$.



$\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta x = x_2 - x_1$, etc...

Linéarité de la transformation de Lorentz:

On suppose que les deux événements

sont simultanés dans (R') , i.e. $\Delta t' = 0$,

mais qu'ils ont lieu à deux points de

l'espace différents, i.e. $\Delta x' \neq 0$.

alors on a: $\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + v_e \frac{\Delta x'}{c^2} \right) \neq 0$.

$$\begin{cases} \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v_e}{c^2} \Delta x' \right) \\ \Delta x = \gamma \left(\Delta x' + v_e \Delta t' \right) \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \end{cases}$$

⚠ Les événements qui étaient simultanés dans (R') ne le sont plus dans (R) ! Phénomène nouveau et contre intuitif, découlant du lien de c .

une conclusion trop hâtive serait de considérer la causalité entre E_1 et E_2 comme relative.

3.1. horloge liée au référentiel (R'). immobile dans (R') (7)

donne des signaux réguliers séparés par des laps de temps $\Delta t'_0$;

$\Delta t'_0$ est appelée "période propre de l'horloge", car cette durée est mesurée dans le référentiel propre de l'horloge (celui dans laquelle elle est au repos).

$$\rightarrow \Delta t = \gamma (\Delta t'_0 + v \Delta x' / c^2) \Rightarrow \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'_0 > \Delta t'_0}$$

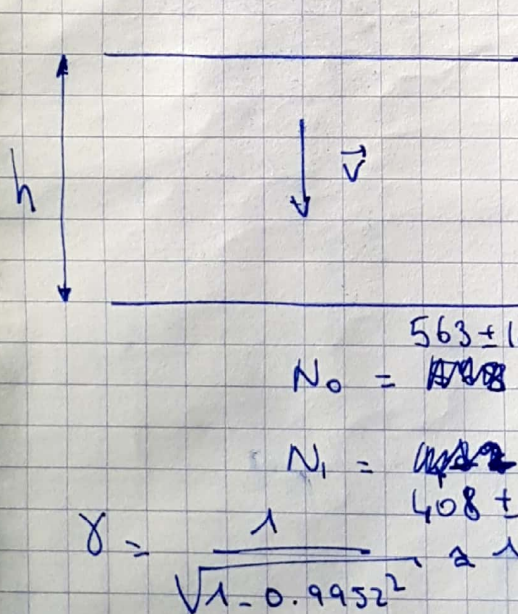
↳ La période mesurée dans (R) paraît plus longue que la période propre de l'horloge liée à (R') : on parle de dilatation du temps.

⚠ réciprocité : observateur dans (R'), horloge dans (R) : $\Delta t' > \Delta t_0$
on ne percevra jamais un temps plus court que dans le référentiel propre

ex: désintégrations des muons.

symbole μ , charge $\pm e$, de masse $207 m_e$. (masse e^-).

→ $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_0)$ où $\tau_0 = 2.2 \cdot 10^{-6} s$ (temps de désintégration propre des muons)
expérience de Frisch et Smith (1963). ± 0.2 .



compteur N_0 $h \approx 1960 m$. (6265 pieds).
 $0.9952c < v < 0.9954c$.

compteur N_1

$N_0 = 563 \pm 10$ muons / h.
 $N_1 = 408 \pm 9$ muons / h.

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.9952^2}} \approx 10.22$

temps de vol.

$\Delta t = \frac{h}{v} \approx 6.4 \cdot 10^{-6} s$ (5)

$N_1 = N(\Delta t) = N_0 \exp(-\frac{\Delta t}{\tau_0}) \approx 31$ muons par

⇒ $\tau = \gamma \tau_0 \approx 2.3 \cdot 10^{-5} s$ ⇒ $N_1 = N(\Delta t) = N_0 \exp(-\frac{\Delta t}{\tau}) \approx 426 \mu /$
beaucoup plus satisfaisant!

importance de la réflexion sur les référentiels!

3.3. Règle fixe dans (R') .

(f)

longueur propre de la règle comme sa longueur mesurée dans le référentiel dans lequel elle est au repos. $L_0 = \Delta x' = x_2' - x_1'$.

On mesure la règle dans (R) . $L = \Delta x = x_2 - x_1$.

$$\Rightarrow L_0' = \Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t) = \gamma L \quad \text{donc} \quad \boxed{L < L_0'}$$

ce qui justifie l'appellation "contraction des longueurs".

La règle paraît plus courte dans le référentiel (R) où elle est en mouvement (paradoxe du train quelitatif).

~~suite 3.3~~ Est-ce que la causalité de E_1 et E_2 est aussi relative?

3.4. Carré de l'intervalle. $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - [\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2]$.
invariant de Lorentz. $= c^2 \Delta t'^2 - [\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2]$.

- $\Delta s^2 < 0$ genre espace : les deux événements ne peuvent être reliés entre eux. (trop éloignés spatialement)
- $\Delta s^2 > 0$ genre temps : un signal physique peut les relier, + leur ordre temporel est préservé par tout changement de référentiel galiléen (pas de simultanéité mais pas perte de relation cause/effet).

1.4. invariant et transformation relativiste.

deux événements M_1, M_2 dans $(K) \rightarrow (ct_1, \vec{x}_1), (ct_2, \vec{x}_2)$.

en cinématique galiléenne $\rightarrow$ (x, t) invariant par rotation.

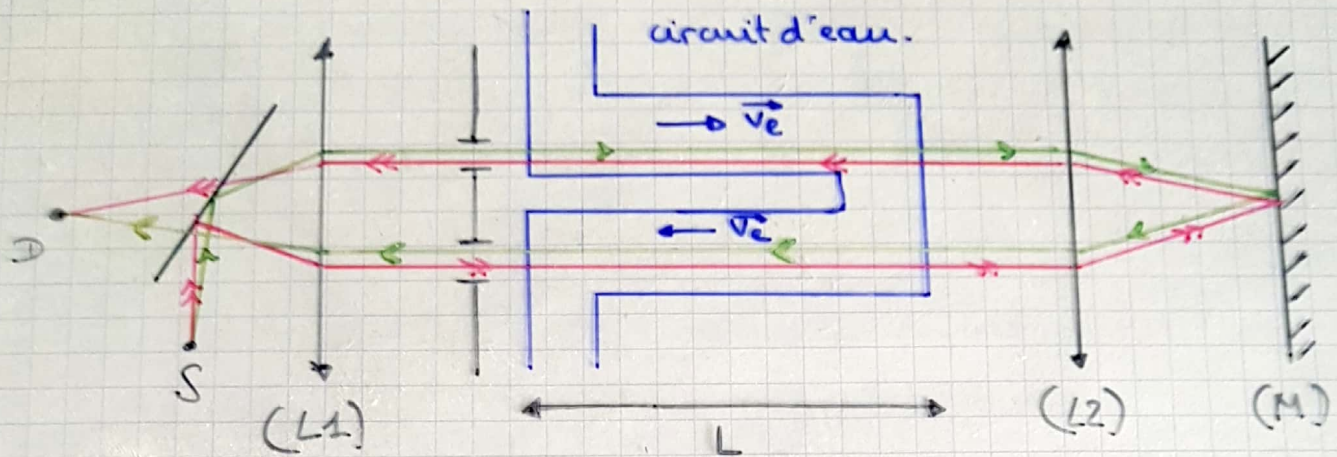
maintenant tout espace importance similaire; il faut prendre en compte.

la variable t dans la recherche d'invariant: il en résulte:

carré relativiste: $\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$.

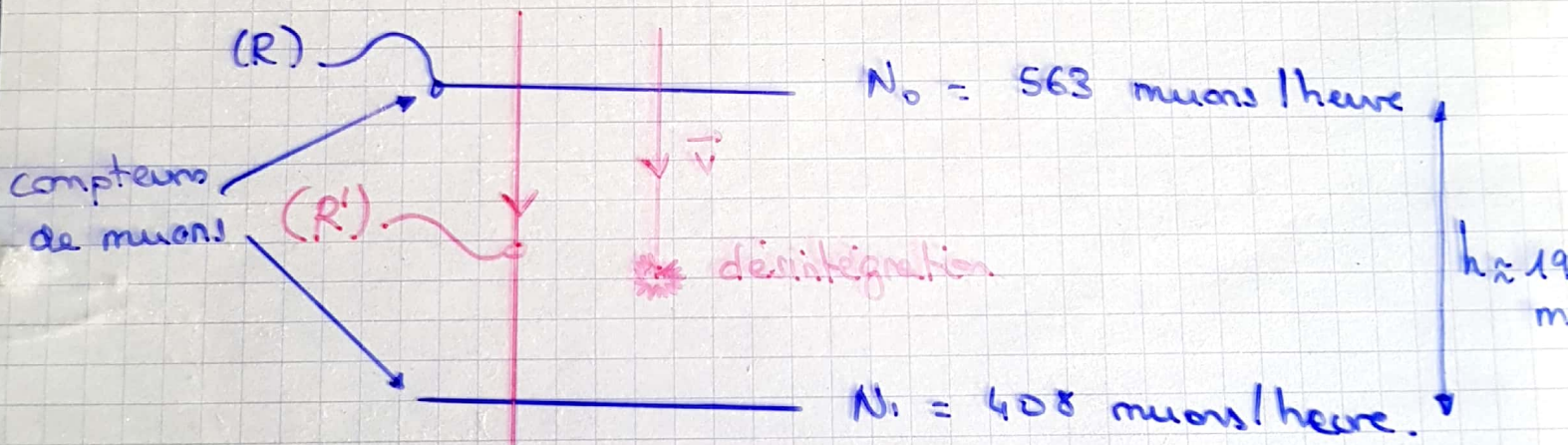
Δ non symétrique. $\rightarrow$ signe $\ominus$ $\rightarrow$ pourquoi?

Expérience de Fizeau (1851).



Expérience de Frisch et Smith (1963).

muons produits dans la haute atmosphère
 vitesse : $0.9950 c < v < 0.9954 c$.



Invariance de l'intervalle

$E_1(t_1, x_1, y_1, z_1)$ dans (R) .
 $E_2(t_2, x_2, y_2, z_2)$

$$\Delta t = t_2 - t_1; \Delta x = x_2 - x_1, \dots$$

Carre de l'intervalle: invariant de Lorentz.

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - [\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2]$$

$$= c^2 \Delta t^{12} - [\Delta x^{12} + \Delta y^{12} + \Delta z^{12}]$$

$$\Rightarrow \Delta s^2 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \Delta t < 0 \text{ Passé} \\ \Delta t > 0 \text{ Future} \end{array} \right. \quad \text{Ailleurs.}$$

