LP07 – Dynamique Relativiste

31/01/17

Antoine Essig & Louisiane Devaud

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine.
Mais en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue.
Albert Einstein

Niveau : L3

Commentaires du jury

Bibliographie

- ✍ *Mécanique 1*, **BFR** ⟶ la base
- ✍ *Relativité Restreinte*, **Hladik et Chrysos** ⟶ complément
- ✍ *Relativité Restreinte*, **Langlois** ⟶ complément
- ✍ *Même titre*, **Yvan Simon** ⟶ complément
- ✍ *toujours le même*, **Semay** ⟶ complément
- ✍ *Les accélérateurs de Particules*, **Daniel Boussand** ⟶ pour la culture

Prérequis

- ➢ Espace-Temps de Minkowski
- ➢ Quadrivecteurs
- ➢ Cinématique Relativiste
- ➢ Coordonnées covariantes et contravariantes

Table des matières

Introduction

Nous avons vu que les véritables transformations permettant de passer d'un référentiel galiléen à un autre sont les transformées de Lorentz et qu'elles laissent les lois de l'électromagnétisme invariantes. Après avoir étudiée l'aspect cinématique nous allons étudié l'aspect dynamique en particulier la recherche d'un nouveau principe fondamental de la dynamique invariant par transformée de Lorentz. Nous verrons les différences avec la mécanique classique et comment la quatrième dimension temporelle peut être intégrée au principe fondamental de la dynamique relativiste.

1 À la recherche d'un PFD relativiste

1.1 Quadrivecteur énergie-impulsion

En mécanique classique on obtient la dynamique du système via le principe fondamental de la dynamique qui est invariant par transformation de Galilée :

$$\frac{d\vec{P}^N}{dt} = \vec{F}^N \tag{1}$$

On cherche donc à écrire un PFD qui serait invariant par transformation de Lorentz et qui redonnerait le PFD de la mécanique classique à faible vitesse.

On part de la mécanique classique avec la relation :

$$\vec{P} = m \times \overrightarrow{v} \tag{2}$$

On construit donc un quadrivecteur à partir du quadrivecteur vitesse $\tilde{U}$

$$\tilde{U} = \frac{d\tilde{OM}}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \overrightarrow{v} \end{pmatrix} \tag{3}$$

en posant $\tilde{P} = m \times \tilde{U}$:

$$\boxed{\tilde{P} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\overrightarrow{v} \end{pmatrix}} \tag{4}$$

Remarque

Parfois on utilise l'isotropie de l'espace et la nécessité de retrouver la mécanique classique à faible vitesse pour obtenir les formes de E et $\overrightarrow{P}$ relativiste. Ensuite on se rend compte que ces quantités sont celle d'un quadrivecteur que l'on nomme quadrivecteur énergie impulsion.

En identifiant $E = \gamma mc^2$, la pseudo norme de $\tilde{P}$ nous donne que :

$$\boxed{E^2 = m^2c^4 + p^2c^2} \tag{5}$$

Pour des faibles vitesses on retrouve bien l'expression classique de la quantité de mouvement par contre l'énergie donne :

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{6}$$

On en déduit que les particules ont une énergie au repos égale à mc^2. Cette énergie de repos ne varie pas mais peut être récupérée si la particule est désintégrée : c'est l'équivalence masse-énergie

On obtient aussi la forme de l'énergie cinétique relativiste : $E_c = (\gamma - 1)mc^2$

L'équivalence masse énergie est mise en avant lors des réactions. La masse finale des particules peut être différente de la masse initiale. On note que la conservation de la masse et fausse et que seul la conservation de l'énergie en prenant en compte la masse au repos est correcte.

OdG

Réaction chimique de la combustion du dihydrogène par l'oxygène :

$$\Delta rU(298K) = -241kJ.mol^{-1} \tag{7}$$

$$\Delta rm = -2,67.10^{-12}kg.mol^{-1} \tag{8}$$

Si la masse produit d'eau est de 18g, le défaut de masse est 10^{-10} fois plus petite est donc impossible à mesurer d'où le fait que l'on postule la conservation de la masse.

Et le photon dans tout ça ?

La masse du photon est nulle et on sait que l'on peut lui associer une énergie $E = h\nu$. D'où par la pseudo norme de quadrivecteur énergie impulsion : $p = \dfrac{h\nu}{c}$

↓ *Maintenant que l'on sait exprimer la quantité de mouvement on peut s'intéresser aux forces*

.

1.2 Quadrivecteur force

On s'inspire de la mécanique classique, on souhaite un quadrivecteur dont la partie spatiale donne à faible vitesse la force classique :

Problème : on ne connait pas $\tilde{F}$, il ne suffit pas de prendre la force de la mécanique classique pour former la partie spatiale.

Solutions :

- Particules soumises à aucunes forces
- Hypothèse sur la forme
- Bilans
- Force de Lorentz car on connait la force dans le référentiel au repos de la particule et on sait comment les champs E et B se transforment.

On peut alors écrire notre principe fondamental de la dynamique relativiste :

$$\boxed{\frac{d\tilde{P}}{d\tau} = \tilde{F}} \tag{9}$$

Remarque

la partie temporelle du PFD n'est autre que la conservation de l'énergie

↓ *un peu de dynamique maintenant...*

2 Bilans

Dans le cas général nous ne savons pas comment décrire les interactions entre particules. Le cas du choc permet d'écrire des bilans et dans de résoudre le problème car le système est alors fermé et isolé ce qui implique la conservation du quadrivecteur énergie impulsion.

choc : Il traduit une interaction très intense entre particule se produisant pendant un laps de temps très bref. On prend en compte la désintégration des particules.

On distingue deux types de chocs. Les élastiques quand le nombre et particules est le même avant et après le choc ainsi que leur nature. Inélastique quand le nombre de particule change.

Le cas inélastique est purement relativiste car seule la relativité restreinte permet de traduire l'énergie en masse et donc de détruire des particules et d'en créer d'autres.

On considère le choc de deux particules donnant un nombre indéterminé de particules. Il y a-t-il une condition pour que le choc soit observable ?

Dans le référentielle du labo où la particule 2 est immobile la conservation de l'énergie donne :

$$m_1c^2 + T_1 + m_2c^2 = \sum E_i \tag{10}$$

Il s'agit alors de déterminer l'énergie cinétique de la particule permettant au choc de se réaliser.

Tous ce que l'on peut dire dans ce référentiel est que :

$$\sum E_i > (\sum m_i)c^2 \tag{11}$$

La conservation de la quantité de mouvement implique une quantité de mouvement finale non nulle d'où l'inégalité stricte. L'inégalité stricte empêche de donner un minimum à T_1, pour résoudre ce problème on va passer dans le référentiel du centre masse car dans ce dernier la quantité de mouvement est nulle par définition.

On notera par * les quantités dans le référentiel du centre de masse.

On a par invariance sous transformée de Lorentz :

$$E^2 - p^2c^2 = {E^*}^2 \tag{12}$$

Le référentielle de centre de masse est donc le référentielle dans lequel l'énergie du système est minimale.

on a : $E^* \geq \sum m_i c^2$

avec une égalité car les quantités de mouvement de chaque particule produite peuvent être nulle.

$$\frac{(E_1 + m_2c^2)^2}{c^2} - p_1^2 \geq (\sum m_i)^2 c^2 \tag{13}$$

$$(m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(m_1c^2 + T_1)m_2c^2 \geq (\sum m_i)^2 c^4 \tag{14}$$

$$\boxed{T_1 \geq T_{seuil} = \frac{(\sum m_i)^2 - (m_1 m_2)^2}{2m_2} c^2} \tag{15}$$

Remarque

L'existence d'une énergie cinétique de seuil explique que les collisions inélastiques soient rencontrées uniquement pour des particules relativistes.

Pour que 2 protons forment 3 protons et un antiproton il faut une énergie de seuil de $6m_pc^2 = 5.63GeV$ dont seulement 2 servent à la création du proton et de l'antiproton.

Les énergie nécessaire pour observer des chocs inélastiques trop grande pour être facilement accessible. Il faut donc créer des accélérateurs de particules.

3 Particule dans un champ EM

3.1 Particule dans un champ électrique constant

Soit une particule de charge q, de masse m dans un champ électrique $\overrightarrow{E}$ stationnaire et constant. La partie spatiale du PFD donne

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = q\overrightarrow{E} \tag{16}$$

Soit en intégrant pour obtenir v en fonction du temps :

$$\boxed{v(t) = c\frac{\frac{qE}{mc}t}{\sqrt{1 + (\frac{qE}{mc})^2 t^2}}} \tag{17}$$

Remarque

On retrouve que c'est une vitesse limite. On constate que plus la vitesse augmente plus le terme γm augmente, or ce terme représente l'inertie de la particule donc plus la vitesse augmente et plus l'inertie augmente et plus il est difficile d'accélérer la particule.

Ceci fut vérifié expérimentalement par Bertozzi en 1964.

3.2 Particule dans un champ magnétique constant, accélérateur de particules.

Soit une particule de charge q et de masse m dans un champ magnétique stationnaire et homogène. La partie spatiale du PFD donne :

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} \tag{18}$$

Et la partie temporelle donne : $E = constante$ soit $v = constante$
D'où

$$\gamma m \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} \tag{19}$$

On pose $\boxed{\omega = \frac{qB}{\gamma m}}$ et du fait que la vitesse est constante, on a :

$$\gamma m \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N} = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} \tag{20}$$

Soit $\boxed{\frac{V}{R} = \omega(v)}$

Remarque

le terme d'inertie d'une accélération dans le sens de la vitesse est en $\gamma^3 m$ alors que celui d'une accélération orthogonale à la vitesse est en γm. Une accélération dans le sens de la vitesse n'est donc pas identique d'un point de vue dynamique à une accélération orthogonale à la vitesse.

Quelques accélérateurs :
Cyclotron : Champs B uniforme avec un champs E oscillant pour accélérer. Problème de synchronisation du champ E à haute vitesse.

Synchrocyclotron : Champ B radial pour compenser γ lorsque l'orbite devient grande à grande vitesse. De plus le champ E oscille à une fréquence modifiable.

Synchrotron : La trajectoire à un cercle de rayon R fixe. On modifie B pour que la particule reste sur cette trajectoire. On accélère la particule avec des champs E constant et stationnaire. Principe utilisé par le LHC pour atteindre des énergies dans le référentiel de centre de masse de 14TeV.

4 conclusion

Nous avons vu dans cette leçon qu'il est possible de d'utiliser un quadrivecteur énergie-impulsion pour écrire un PFD relativiste contenant le PFD classique et la conservation de l'énergie. Nous avons montré l'existence d'une énergie propre permettant la désintégration et la création de particules. Pour que ceci arrive il faut une énergie dans le référentiel de centre de masse suffisante d'où la nécessité de créer des accélérateurs de particules fonctionnant à l'aide de champs électromagnétiques. Aujourd'hui ces accélérateurs de particules ont permis la découverte de nombreuse particules, la dernière étant le boson de Higgs.

Commentaires