LP 07 – Dynamique relativiste

6 février 2018

Bastien Gili-Tos & Guillaume Jung

Pour ma défense, puis-je dire que la semaine ski est passée par là ?
Moi-même

Niveau : L3

Commentaires du jury

2017 : La cinématique relativiste n'est pas l'objet de cette leçon. De plus, il ne faut pas se limiter à une suite de formules et de calculs. L'utilisation des quadrivecteurs peut être judicieuse. Des illustrations de physique moderne et/ou des situations réelles devraient être décrites et analysées.

2015 : La leçon doit souligner l'intérêt du formalisme quadrivectoriel.

Jusqu'en 2013, le titre était : Dynamique relativiste. Exemples.

2010 : La forme plus complexe des lois de la dynamique peuvent rendre les exemples choisis très techniques. Il convient de choisir des illustrations simples où les effets relativistes apparaissent rapidement. L'étude des collisions peut bien évidemment entrer dans le cadre de cette leçon. Ne pas oublier que les lois de conservation sont également un outil de découverte de particules nouvelles, indétectables directement.

Jusqu'en 2009, le titre était : Collisions en relativité restreinte. Application à l'étude des particules élémentaires.

2009 : Ne pas oublier que les lois de conservation sont également un outil de découverte de particules nouvelles, indétectables directement. Pour la leçon Dynamique relativiste. Exemples , le jury attend que le candidat choisisse un nombre d'exemples limité, mais qu'il les analyse en profondeur.

2008, 2007 : L'intérêt du référentiel barycentrique n'est pas toujours maîtrisé. Les candidats sont encouragés à diversifier les exemples traités.

Bibliographie

- ✍ *Cours de Physique, Mécanique 1*, **BFR** ⟶ Toute cette leçon est dedans
- ✍ *Introduction à la relativité restreinte*, **Hladik** ⟶ Ça m'a bien dégrossi la leçon moi qui n'y connaissais rien en relativité
- ✍ *Introduction à la relativité*, **Langlois** ⟶ Une très bonne introduction également (notamment sur le catapultage de l'énergie)
- ✍ *Relativité restreinte*, **Simon** ⟶ Compléments
- ✍ *Tous les autres bouquins portant le même titre*, ⟶ Compléments

Prérequis

- ➢ Cinématique relativiste
- ➢ Mécanique classique
- ➢ Notion de quadrivecteur

Expérience

- Je voulais bien essayer de faire un accélérateur de particules avec mon four à micro-ondes mais ça n'a pas marché...

Table des matières

Introduction

Cette leçon suit directement le cours sur la cinématique relativiste. Nous avons vu précédemment que la transformation de Lorentz était adaptée pour décrire le changement de référentiel galiléen en relativité restreinte. Le but de ce cours va être d'établir les lois de la dynamique classique pour des particules relativistes, et notamment le Principe Fondamental de la Dynamique et le Théorème de l'Energie Cinétique et de vérifier constamment que la limite classique est bien vérifiée. Après quelques rappels, nous établirons le PFD relativiste, puis nous nous intéresserons au choc de deux particules relativistes puis aux accélérateurs de particules.

1 Vers un PFD relativiste

1.1 Rappels et définitions

Nous avions vu la notion de quadrivecteur position :

$$\widetilde{OM} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ainsi que la notion de temps propre :

$$dt = \gamma d\tau \tag{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

On peut donc définir le quadrivecteur vitesse :

$$\widetilde{v} = \frac{d\widetilde{OM}}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Et naïvement, on peut définir le quadrivecteur impulsion :

$$\widetilde{P} = m\widetilde{v} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix} \tag{5}$$

On admet (travaux de Lewis et Tolman) que l'énergie est : $E = \gamma mc^2$. De ce fait, on a le **quadrivecteur énergie-impulsion** :

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix} \tag{6}$$

La pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion est un invariant relativiste sous transformation de Lorentz :

$$\widetilde{P}^2 = m^2c^2 \tag{7}$$

Ou encore :

$$\widetilde{P}^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2, \qquad \text{soit :} \qquad E^2 = m^2c^4 + c^2p^2 \tag{8}$$

On définit $E_0 = mc^2$ l'énergie de masse au repos. C'est l'équivalence masse-énergie ! Cette énergie ne varie pas mais peut être récupérée par désintégration par exemple.
Un développement limité en $v \ll c$ donne :

$$E = \underbrace{mc^2}_{\text{Energie au repos}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energie cinétique classique}} \tag{9}$$

On retrouve alors bien la limite classique !
De plus, avec une petite astuce mathématique, on a :

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + \underbrace{(\gamma - 1)mc^2}_{\text{Energie cinétique relativiste}} \tag{10}$$

⚠En relativité restreinte, seule la conservation de l'énergie est vérifiée. En effet, à cause de l'équivalence masse-énergie, la conservation de la masse est mise en défaut.

Un ordre de grandeur : combustion de H_2 par O_2.

$\Delta E = -241\, kJ.mol^{-1}$, donc $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = -2,68.10^{-12}\, kg.mol^{-1}$. Soit pour 1 mole d'eau formée (m = 18 g), on a :

$$\frac{\Delta m}{m} \simeq 10^{-10} \tag{11}$$

Cette variation est trop faible pour pour être mesurée, c'est pourquoi en pratique on considère quand même la conservation de la masse comme vérifiée.

Exemple sur le cas du photon :

$v = c$, donc $\gamma \longrightarrow +\infty$, or $E = \gamma mc^2$ finie, donc nécessairement $m = 0$!

On a donc :

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \\ \frac{E}{c}\vec{n} \end{pmatrix} \tag{12}$$

La pseudo-norme du quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon est donc nulle : cela est directement lié à sa masse nulle.

Maintenant que l'on sait calculer un quadrivecteur énergie-impulsion, intéressons-nous à la force.

1.2 Quadrivecteur force

Dans (R) galiléen, on a $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$, on a alors :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{13}$$

Naïvement, on peut définir :

$$\widetilde{F} = \frac{d\widetilde{P}}{d\tau} \tag{14}$$

Cherchons à identifier les composantes de ce quadrivecteur.

La partie spatiale donne :

$$\widetilde{F}^i = \frac{dp_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma f_i \tag{15}$$

La partie temporelle donne :

$$\widetilde{F}^0 = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt} \tag{16}$$

Or le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$dE = \delta W = \vec{f} \cdot \vec{dl} = \vec{f} \cdot \vec{v}dt \tag{17}$$

D'où :

$$\widetilde{F}^0 = \frac{\gamma}{c}\vec{f} \cdot \vec{v} \tag{18}$$

On a ainsi défini le **quadrivecteur force** :

$$\widetilde{F} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c}\vec{f} \cdot \vec{v} \\ \gamma\vec{f} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Ici, on a déjà écrit le PFD relativiste sans le savoir, qui est :

$$\widetilde{F} = \frac{d\widetilde{P}}{d\tau} \tag{20}$$

La partie spatiale donne le PFD relativiste, et la partie temporelle le TEC relativiste.

On peut également vérifier que la limite classique ($v \ll c$, $\gamma \longrightarrow 1$) est bien vérifiée et mène au PFD et au TEC classiques.

Passons maintenant à l'étude dynamique

2 Choc de deux particules relativistes

Si j'ai le temps pour la leçon, je le rédige, sinon... utilisez le blanc :D

Bon je commence !

Un choc est une interaction très intense et très brève entre deux particules. On peut considérer une éventuelle création ou destruction de particule.

On distingue deux types de chocs :

- Choc élastique : même nombres de particules avant et après le choc
- Choc inélastique : nombres de particules différents avant et après le choc

Le cas inélastique entre alors directement dans le cadre de la relativité restreinte qui le rend possible grâce à l'équivalence masse-énergie.

On considère alors une particule de masse m_1 allant à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel du laboratoire (R) galiléen, et une autre particule de masse m_2 immobile dans ce même référentiel. On étudie le choc de ces deux particules donnant un nombre indéterminé i de particules (mais pas important dans le calcul).

Le système formé par ces deux particules est donc un système fermé et isolé : on a donc conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion.

La question que nous allons nous poser est : Y a-t-il une condition nécessaire à l'observation d'un tel choc ?

Dans le référentiel du laboratoire (R), on sait que :

$$E = E_1 + E_2 = m_1c^2 + Ec_1 + m_2c^2 \tag{21}$$

Après le choc, on a :

$$E = \sum_i E_i \tag{22}$$

Pb : Il suffit alors simplement de déterminer Ec_1 minimale qui permet le choc.

Dans le référentiel (R), $\vec{p} \neq 0$, et donc nécessairement après le choc, $\vec{p} \neq 0$. On peut donc seulement écrire :

$$\sum_i E_i > \sum_i m_ic^2 \tag{23}$$

On ne peut donc pas écrire l'égalité, il n'y a donc pas de minimum atteignable possible pour Ec_1 alors qu'on veut l'égalité.

Pour cela, on passe dans le référentiel du centre de masse (R*). On a alors $\vec{p} = 0$ avant et donc après le choc. Maintenant, on peut écrire dans (R*) :

$$E^\star \geq \sum_i m_ic^2 \tag{24}$$

Avec $E^\star$ l'énergie des particules dans le référentiel (R*).

Par invariance de la pseudo-norme, dans (R) on a :

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{E_1+m_2c^2}{c} \\ \vec{p_1} \end{pmatrix} \tag{25}$$

et dans (R*) :

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{E^\star}{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \tag{26}$$

L'invariance de la pseudo-norme de $\widetilde{P}$ donne alors :

$$\frac{E^\star}{c^2} = \frac{E_1 + m_2c^2}{c^2} - p_1^2 \tag{27}$$

D'où :

$$E^{\star} \geq \sum_i m_i c^2, \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{E^{\star 2}}{c^2} \geq \left(\sum_i m_i\right)^2 c^2 \tag{28}$$

Soit :

$$(E_1 + m_2c^2)^2 - c^2p_1^2 \geq \left(\sum_i m_i\right)^2 c^4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad E_1^2 - c^2p_1^2 + 2m_2E_1c^2 + m_2c^4 \geq \left(\sum_i m_i\right)^2 c^4 \tag{29}$$

Or on sait que :

$$E_1^2 = m_1c^2 + p_1^2c^2 \qquad \text{et} \qquad E_1 = m_1c^2 + Ec_1 \tag{30}$$

Après calculs, on arrive à :

$$Ec_1 \geq \frac{\left(\sum_i m_i\right)^2 - (m_1+m_2)^2}{2m_2} c \tag{31}$$

D'où l'existence d'une énergie de seuil pour pouvoir observer un tel choc.

Un ordre de grandeur : $p + p \longrightarrow p + p + (p, \overline{p})$

Ici, toutes les masses sont identiques et on trouve $\sum_i m_i = 4m$.

Si on injecte ce calcul dans la formule ci-dessus, on trouve :

$$Ec_1 \geq 5,63\, GeV \tag{32}$$

Afin d'obtenir de telles énergies, il est donc nécessaire d'avoir recours à des accélérateurs de particules.

3 Particule dans un champ $\vec{E}/\vec{B}$ uniforme et constant

3.1 Particule dans un champ $\vec{E}$ uniforme et constant

Soit une particule de masse et charge (m, q) immobile dans (R) galiléen soumise à un champ $\vec{E}$ uniforme et stationnaire (pour ne pas créer de $\vec{B}$).

La partie spatiale du PFD donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \tag{33}$$

D'où, avec $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$:

$$\vec{p} = qt\vec{E} \tag{34}$$

On se place dans la direction de $\vec{E}$ et on trouve :

$$v = c\frac{\frac{qE}{mc}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 t^2}} \tag{35}$$

Là encore, la limite classique $(t \longrightarrow 0)$ donne : $v = \frac{qE}{m}t$, qui est le résultat classique !

Et si $t \longrightarrow +\infty$, $v \longrightarrow c$. On a donc existence d'une vitesse limite ! Cette vitesse limite a été vérifiée expérimentalement par Bertozzi en 1964.

3.2 Particule dans un champ $\vec{B}$ uniforme et constant

Particule de masse et de charge (m, q) allant à la vitesse $\vec{v}$ dans (R) galiléen, soumise à un champ $\vec{B}$ uniforme et stationnaire orthogonal à sa vitesse.

La partie temporelle du PFD donne : $E = c^{te}$, soit $v = c^{te}$.

La partie spatiale du PFD donne :

$$\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{36}$$

Dans le repère de Frénet, projeté sur $\vec{N}$, on a donc :

$$\gamma m v = qRB \tag{37}$$

Or dans un mouvement circulaire : $v = R\omega$, d'où :

$$\omega = \frac{qB}{\gamma m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\omega_c \tag{38}$$

Avec $\omega_c = \frac{qB}{m}$ la pulsation cyclotron classique.

Une fois encore, la limite classique est bien vérifiée.

3.3 Application aux accélérateurs de particules

En classique, la pulsation de la particule est indépendante de la vitesse, ce qui n'est plus le cas en relativité restreinte ! Le cyclotron n'est donc plus valable. On peut utiliser un synchro-cyclotron, mais pour des raisons pratiques, cela n'est plus envisageable non plus. La solution retenue est alors le synchrotron.

Conclusion

Dans cette leçon, on a établi l'expression combinée du principe fondamentale de la dynamique et du théorème de l'énergie cinétique à l'aide des quadrivecteurs force et énergie-impulsion. Nous avons pu vérifié que ces expressions sont un prolongement du cas classique où $v \ll c$.

Remarques et questions (et il y en aura beaucoup)