

LP 08 – Notion de viscosité d'un fluide.
Écoulements visqueux.

Commentaires du jury :

2016 / 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'origine des actions de contact mises en jeu entre un fluide et un solide. Afficher un tableau d'ordres de grandeur de viscosité ne suffit pas en soi pour illustrer la leçon. Tout exemple donné d'écoulement visqueux doit être maîtrisé par le/la candidat(e).

Jusqu'en 2013, le titre était : *Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux. Nombre de Reynolds. Exemples simples.*

1999 → 2012 : Les candidats doivent avoir réfléchi aux différents **mécanismes de dissipation** qui peuvent avoir lieu dans un fluide. L'essentiel de l'exposé doit porter sur les **fluides newtoniens**. Il importe de mettre clairement en évidence le **caractère diffusif** des forces de viscosité. La **signification physique du nombre de Reynolds** est ici centrale. Les **conditions d'applications de l'équation de Navier-Stokes** sont ignorées. La **relation entre la valeur du nombre de Reynolds et la nature de l'écoulement** sont mal dégagées. Il y a souvent confusion entre tourbillon et turbulence. Il est souhaitable de **présenter un modèle microscopique simple de la viscosité**. La notion de couche limite peut être évoquée. On peut également présenter des écoulements autour d'obstacles. La leçon doit permettre de montrer la compétition entre transfert convectif et transfert diffusif de quantité de mouvement.

Niveau : L2

Bibliographie :

Prérequis :

- Fluide parfait
- Théorie cinétique des gaz
- Diffusion thermique

- HPrépa, Mécanique des fluides, 2^e année, PC/PSI, Brébec, 2004
- Physique, BCPST 2^e année, Tec&Doc, Gréacias, 2009
- 1001 Questions, Garing, PC, 2012
- Guyon, Hulin, Petit, Hydrodynamique physique, 3^e édition

Plan :

- I. Notion de viscosité**
 - a. Force surfacique de viscosité
 - b. Force volumique de viscosité
 - c. Equation de diffusion
 - d. Modèle(s) microscopique(s)
- II. Equation de la dynamique des écoulements visqueux**
 - a. Equation de Navier Stokes
 - b. Aspects énergétiques
 - c. Nombre de Reynolds et type d'écoulement
- III. Exemples d'écoulements visqueux**
 - a. Ecoulement laminaire sur un plan incliné : détermination d'une viscosité
 - b. Ecoulement de Poiseuille cylindrique : application à la biologie

Introduction :

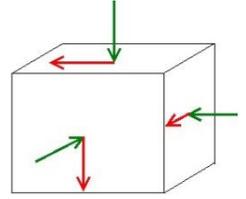
☞ Expérience démonstrative : remplir deux burettes, l'une avec un mélange eau/glycérol (30/70), l'autre avec de l'eau. Mettre en évidence le fait que le glycérol s'écoule différemment (forme du jet, vitesse d'écoulement...) de l'eau.

Le modèle du fluide parfait n'explique pas les différences de comportement observées. Pour les mêmes conditions aux limites et conditions initiales, l'écoulement devrait être identique puisque le glycérol et l'eau ont à peu près la même densité (lolilol). Il y a visiblement un paramètre que l'équation d'Euler ne prend pas en compte, à savoir la viscosité des fluides. Le but de la leçon est de déterminer la forme de cette force visqueuse, de déterminer l'origine microscopique de la viscosité et enfin d'étudier quelques écoulements visqueux afin d'en dégager des propriétés élémentaires.

I. Notion de viscosité

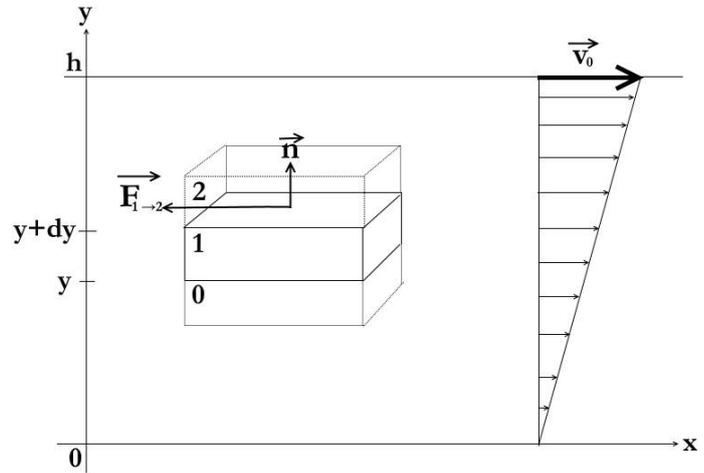
a. Force surfacique de viscosité

Soit une particule fluide. L'équation d'Euler réduit les forces de contact entre 2 particules fluides aux seules forces de pression (en vert). Les observations sur les fluides réels ne peuvent s'expliquer que par une composante tangentielle de la force de contact aka force de cisaillement (ou de viscosité, en rouge).



Intéressons-nous de plus près à ces forces. Pour cela, on considère un écoulement de Couette plan :

- Plaque ∞ en $y = h$ en mouvement uniforme à la vitesse constante $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ faible
- Plaque ∞ en $y = 0$ fixe
- Ecoulement incompressible
- Fluide réel de viscosité η
- Régime établi
- Pression indépendante de x



Par symétrie, le profil de vitesse est $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$. Cet écoulement est donc un écoulement de cisaillement qui va nous permettre d'étudier les forces de viscosité. En effet, un fluide parfait resterait immobile (dans le référentiel du laboratoire) dans une telle configuration. Ce n'est pas le cas pour un fluide visqueux : si on fait l'expérience, on constate qu'en régime établi, le champ de vitesse est linéaire et s'écrit $\vec{v}(y) = v_0 y/h \vec{e}_x$. On postule alors de manière phénoménologique une loi reliant la cause (la contrainte de cisaillement $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}/S$) proportionnellement à la conséquence (une variation de vitesse relative observée entre 2 nappes planes et voisines $\frac{\partial v}{\partial y}$). Ce qui donne :

$$\frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{S} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x$$

Où $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est la force exercée par la particule fluide 1 sur la particule fluide 2. Cette expression n'est valable que pour un écoulement unidimensionnel. On appelle fluide newtonien un fluide qui respecte cette loi. Le coefficient de proportionnalité est la viscosité dynamique. La viscosité tend donc à s'opposer au transfert de quantité de mouvement et à uniformiser la vitesse du fluide. Elle s'exprime en $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ aka le *Pa.s* aka le *Pl* (Poiseuille) et une constante (à T et P fixées) propre à chaque fluide. Quelques valeurs (CNTP) :

| Matériaux | Air | Eau | Encre stylo à bille | Miel | Dentifrice* | Magma** | Bitume | Glacier*** | Asthénosphère**** |
|---------------|-------------------|-----------|---------------------|------|-------------|---------|--------|------------|-------------------|
| η (Pa.s) | $2 \cdot 10^{-5}$ | 10^{-3} | 2 | 10 | 100 | 400 | 10^8 | 10^{11} | 10^{18} |

* : donné à titre anecdotique puisque c'est non newtonien, c'est glissant (héhé) de s'aventurer sur ce terrain

** : lave basaltique de volcan Hawaïen

*** : dépend de la température, ici c'est pour les Alpes (100 fois moins visqueux que les glaciers d'Antarctique)

**** : partie supérieure ductile du manteau terrestre.

Matériaux fluides (sens commun du terme) : viscosité globalement inférieure à 1. Matériaux visqueux / mou / pâteux / gluant / collant : viscosité entre 1 et 100. Matériaux d'apparence solide à notre échelle de temps : viscosité en 10^5 et au-delà. On peut ici évoquer l'expérience de la goutte de Poix (9 gouttes en 87 ans). A l'inverse, on peut descendre très bas avec par exemple l'hélium liquide (superfluide ou non). Les valeurs de viscosité s'étalent donc sur plusieurs ordres de grandeur.

Note : D'après le principe d'action / réaction, $\frac{\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{S} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x$.

Nous avons donc obtenu l'expression des forces surfaciques de viscosité. Nous avons aussi vu avec l'équation d'Euler que les forces surfaciques de pression pouvaient se mettre sous la forme de forces volumiques égales à $-\vec{\nabla}P$. Cherchons un tel équivalent pour les forces de cisaillement.

b. Force volumique de viscosité

Effectuons un bilan des forces de cisaillement sur le parallélépipède :

$$\overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}}(y + dy) + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}}(y) = \left[\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy) - \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \right] S \vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy S \vec{e}_x$$

D'où une résultante volumique pour les forces de viscosité : $\overrightarrow{F_{vis}} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{e}_x$. On admettra la généralisation 3D :

$$\overrightarrow{f_{vis}} = \eta \Delta \vec{v}$$

Valable pour un fluide incompressible et homogène.

Et alors vous allez me dire « mais Madame dans l'expression du Laplacien de la vitesse il y a des composantes non tangentielles ! » et je vous répondrai « Oui, vous avez raison, les forces de viscosité ont des composantes correspondant à des forces de cisaillement (donc tangentielles) mais aussi des composantes normales. Bien vu »

↳ L'expression de la force surfacique trouvée au I.1. pourrait rappeler aux plus perspicaces les lois phénoménologiques de Fick et Fourier, et ils auraient raison. Jusqu'où poussez l'analogie ?

c. Equation de diffusion

On peut écrire : $F_{1 \rightarrow 2} = -\frac{\eta}{\rho} S \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial y} = -v \vec{\nabla}(\rho v_x) \cdot \vec{n} S$ où ρv_x représente la densité volumique de la composante selon x de la quantité de mouvement. L'analogie avec les lois de Fick et Fourier est immédiate. La force de cisaillement de surface $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}}$ s'assimile ainsi au flux de la composante p_x de la quantité de mouvement transférée à travers S. Il y a transfert (plus exactement diffusion) de la quantité de mouvement, de manière irréversible et de façon à ce que celle-ci s'uniformise.

On fait apparaître le coefficient de diffusion $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ qui est bien homogène à des m^2/s , appelé viscosité cinématique.

Si l'on reprend notre écoulement et que l'on sort du régime établi : $\vec{v} = v(y, t) \vec{e}_x$ et qu'on écrit l'équation de la dynamique avec le terme de viscosité trouvé précédemment, on obtient $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \Delta \vec{v}$, soit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$$

qui correspond bien à une équation de diffusion (celle de la densité de quantité de mouvement volumique, si on multiplie à gauche et à droite par ρ). Cette équation justifie a posteriori le profil linéaire pour la vitesse du I.a. en régime permanent.

S'il est visuellement possible de déterminer si un fluide est plus visqueux qu'un autre, il n'est en revanche pas trivial de comparer les viscosités cinématiques. Par exemple, $\eta_{eau} = 56 * \eta_{air}$ mais $\nu_{air} = 15 * \nu_{eau}$. La viscosité cinématique va être la valeur de viscosité pertinente pour les écoulements où les processus de diffusion sont justement prépondérants.

↳ Nous avons donc conduit une étude macroscopique de la viscosité. Quelle interprétation microscopique en faire ?

d. Interprétations microscopiques

i. Cas des gaz

On se place dans la même situation, mais cette fois-ci, le fluide est un gaz. On fait appel à la théorie cinétique des gaz. Soit une surface S quelconque appartenant à un plan $z = c^{te}$. Elle est constamment traversée par des molécules de gaz sous l'effet de l'agitation thermique. Effectuons un bilan moyen des échanges de quantité de mouvement à travers S.

Notations :

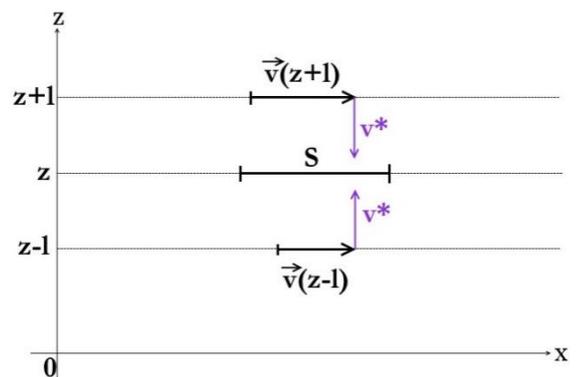
n^* : densité moléculaire, v^* : vitesse quadratique moyenne

l : libre parcours moyen

Hypothèses :

- Isotropie de l'espace : Il y a $n^*/6$ molécules qui se déplacent en moyenne vers les z (dé)croissants.
- Les molécules traversent S à la vitesse $v^* \gg v_{(z)}$ la vitesse d'ensemble.
- Les molécules ont subi leur dernière collision en moyenne en $z + l$ ou $z - l$.
- $l \ll z$

Il y a $\frac{n^*}{6} S v^* dt$ molécules qui traversent pendant dt la surface S selon les z croissants. Autant selon les z décroissants. En $z \pm l$ les molécules ont une quantité de mouvement égale à $m \vec{v}(z \pm l)$. D'où un débit moyen de quantité de mouvement à travers S :



$$d\vec{p} = \frac{n^*}{6} v^* S [m\vec{v}(z-l) - m\vec{v}(z+l)] dt = \frac{n^*}{6} v^* S \left(-2ml \frac{d\vec{v}}{dz} \right) dt = -\frac{1}{3} n^* m v^* l S \frac{d\vec{v}}{dz} dt$$

D'où : $\frac{\vec{F}}{S} = \frac{1}{S} \frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{1}{3} n^* m v^* l \frac{dv_x}{dz} \vec{e}_x$. Par identification, on trouve $\eta = \frac{1}{3} n^* m v^* l$

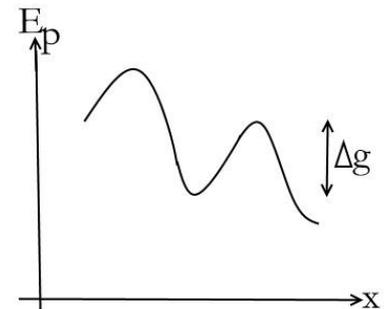
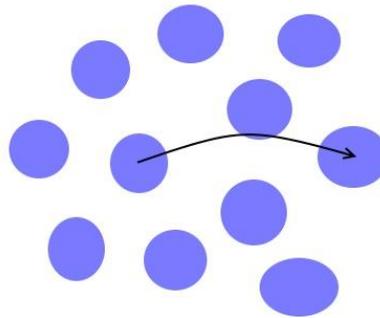
Pour un gaz parfait, $v^* = \sqrt{\frac{3k_b T}{m}}$ et donc de manière générale pour un gaz, la viscosité croît avec la température.

A.N. : pour l'air où $v^* \sim 700$ m/s et $l \sim 100$ nm, on trouve $\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{3} v^* l \sim 2.3 \cdot 10^{-5}$ Pa.s. La valeur expérimentale étant de $1.5 \cdot 10^{-5}$ (CNTP), l'ordre de grandeur est correct.

ii. Cas des liquides

Ce cas ne sera pas abordé lors de la leçon par manque de temps, il est donné ici à titre indicatif.

On observe que η diminue quand T augmente. Dans un modèle où les molécules sont assimilées à des sphères dures, pour passer d'une position à une autre, il faut franchir une barrière de potentielle. A cause du mouvement global du fluide, le gap d'énergie à franchir est plus faible du côté où la molécule « suit le courant ». Par analogie avec le modèle d'Arrhenius en chimie, une loi où $\eta \propto e^{\frac{-\Delta g}{k_b T}}$ est



proposable et explique qualitativement la dépendance en la température.

Regardons désormais comment est modifiée l'équation d'Euler lorsqu'on prend en compte la viscosité.

II. Dynamique des écoulements visqueux

a. Equation de Navier Stokes (ENS)

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Valable pour un écoulement de fluide incompressible, homogène et newtonien.

Terme 1 : accélération locale du au caractère non permanent du champ de vitesse

Terme 2 : accélération convective, non linéaire en la vitesse, qui traduit le caractère non uniforme du champ de vitesse

Terme 3 : gradient de pression

Terme 4 : terme du au poids du fluide } Termes moteurs

Terme 5 : le petit nouveau qui traduit la diffusivité de la quantité de mouvement

L'ENS renferme donc 3 équations (selon x, y, z), pour 4 inconnues (P + les 3 composantes de la vitesse). L'équation supplémentaire permettant de fermer le système va être l'équation de conservation de la masse, qui, pour un fluide incompressible implique $\text{div } \vec{v} = 0$. Ainsi, si l'on se donne un problème et un nombre suffisant de conditions aux limites, on est équipé pour résoudre.

Sauf que l'équation de Navier-Stokes est généralement difficile, voire impossible, à résoudre analytiquement à cause de son terme non linéaire, sauf dans quelques cas à géométries simples. Cependant, il est parfois possible de simplifier certains termes compte-tenu des paramètres du problème, permettant une résolution plus aisée.

b. Nombre de Reynolds

Dans notre cas, on cherche à comparer le terme de viscosité (thème de la leçon) avec le terme non linéaire (qui nous embête). Osborne Reynolds introduit en 1883 un nombre sans dimension qui porte aujourd'hui son nom et compare en ordre de grandeur l'importance des termes de viscosité VS les termes convectifs :

$$\frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|} \sim \frac{\rho \frac{v^2}{L}}{\eta \frac{v}{L^2}} = \frac{\rho L v}{\eta} = \frac{L v}{\nu} = Re$$

Où L désigne une longueur typique de variation de la vitesse v. On distingue plusieurs régimes :

- $Re \ll 1$: Régime diffusif. La diffusion domine la convection. On peut négliger le terme non linéaire dans l'ENS. Les écoulements sont alors qualifiés de rampants.
- $Re \gg 1$: Régime inertiel. La convection domine la diffusion.

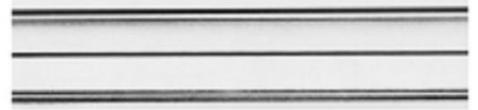
En pratique, on constate un changement de comportement des écoulements non pas pour $Re = 1$, sinon à partir d'un nombre de Reynolds critique $Re_c > 1$, qui dépend du problème.

- $Re \gg Re_c$: Écoulement turbulent. Le mouvement des particules fluides est chaotique ; il n'est plus possible de suivre les lignes de courant. Des tourbillons se forment. Il est alors possible de négliger le terme diffusif dans l'ENS.

- $Re \ll Re_c$: Écoulement laminaire. Schématiquement, les couches de fluides coulent les unes sur les autres. Deux particules fluides voisines restent généralement voisines. Des lignes de courant sont identifiables. Il faut alors a priori garder les deux termes dans l'ENS.

Par exemple pour un écoulement de Poiseuille cylindrique (cf III.2), le nombre de Reynolds critique vaut environ 2000.

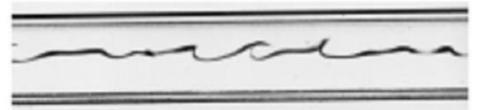
$Re_c < 2000$: écoulement laminaire



$Re_c > 4000$: écoulement turbulent



$2000 < Re_c < 4000$: écoulement instable

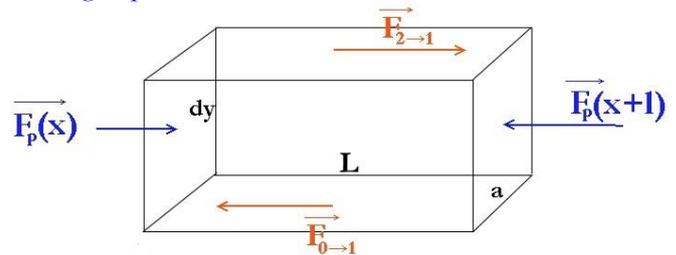


➤ Nous avons désormais les outils pour étudier la dynamique de quelques écoulements visqueux.

III. Applications à quelques écoulements visqueux

a. Retour sur l'écoulement de Couette plan : aspects énergétiques.

Nous avons établi précédemment le profil de vitesse (linéaire). Nous avons aussi vu que la viscosité était responsable de la diffusion de la quantité de mouvement dans le fluide. Or la diffusion est un processus dissipatif. Cherchons donc à établir la puissance volumique dissipée à l'intérieur d'une particule fluide à cause des forces de viscosité.



Soit \mathcal{P}_{visq}^{int} la puissance dissipée par les forces de viscosité à l'intérieur d'une particule fluide.

Bilan des forces extérieures qui s'appliquent sur le fluide :

- $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}(y + dy) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy) La \vec{e}_x$
- $\vec{F}_{0 \rightarrow 1}(y) = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) La \vec{e}_x$
- $\vec{F}_p(x) = P(x) a dy \vec{e}_x$
- $\vec{F}_p(x + L) = -P(x + L) a dy \vec{e}_x$

Écrivons l'ENS (régime permanent) : $\frac{dP}{dx} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \Rightarrow P(x + L) - P(x) = \frac{dP}{dx} L = L \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$.

En régime permanent, l'énergie cinétique de la particule fluide est constante. Le théorème de l'énergie cinétique nous donne donc que la somme des puissances intérieures et extérieures est nulle (→ la puissance dissipée à l'intérieur égale la puissance apportée par les forces extérieures) : $\mathcal{P}_{visq}^{int} + \mathcal{P}^{ext} = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{visq}^{int} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}(y + dy) \cdot \vec{v}(y + dy) + \vec{F}_{0 \rightarrow 1}(y) \cdot \vec{v}(y) + [P(x) - P(x + L)]v(y)ady &= 0 \\ \mathcal{P}_{visq}^{int} + \eta La \left[v(y + dy) \frac{dv_x}{dy}(y + dy) - v(y) \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) \right] - \eta v(y) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y) L a dy &= 0 \\ \mathcal{P}_{visq}^{int} + \eta La \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \eta v(y) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y) L a dy &= 0 \end{aligned}$$

En développant la dérivée, on remarque une simplification avec le dernier terme. Soit :

$$\mathcal{P}_{visq}^{int} = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 aLdy$$

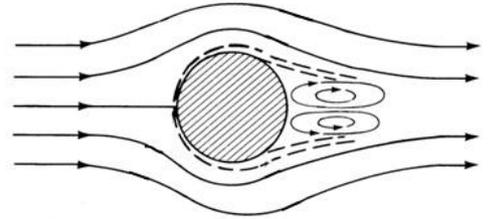
On en déduit l'expression de la puissance volumique dissipée à l'intérieur de la particule fluide : $\mathcal{P}_{visq,vol}^{int} = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2$

A.N. : pour notre écoulement de Couette $\vec{v}(y) = v_0 y/h \vec{e}_x \Rightarrow \mathcal{P}_{visq,vol}^{int} = -\eta v_0^2/h^2$.

Pour $h = 10 \text{ cm}$, $v_0 = 2 \text{ cm/s}$, $\eta_{\text{glycérol}} = 1.49 \text{ Pa.s}$, on obtient $\mathcal{P}_{visq,vol}^{int} = 6.0 \cdot 10^{-2} \text{ W/m}^3$

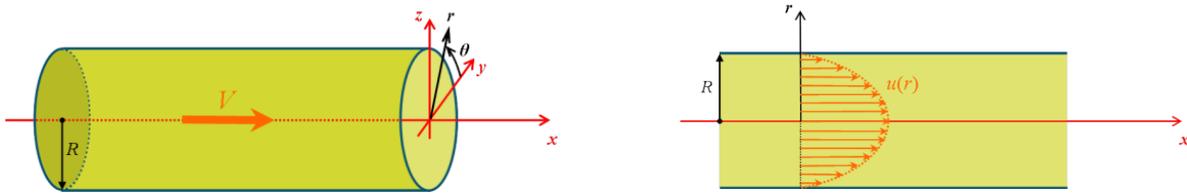
Il y a deux moyens de dissiper beaucoup d'énergie : avoir un fluide très visqueux, ou bien des grandes variations de vitesse sur de petites distances.

Lorsque l'on considère des écoulements autour d'objets macroscopiques (balle de ping pong, voiture, avion...) dans l'air (peu visqueux), de telles variations de vitesse (dissipant significativement l'énergie) vont notamment se trouver sur une petite couche autour des objets appelée couche limite (en pointillés ci-contre). En effet, les conditions aux limites imposent que le fluide adhère aux parois de l'objet, alors qu'autour de l'objet va s'établir un profil de vitesse où celle-ci sera rapidement (spatialement, s'entend) non nulle et potentiellement grande (lignes de courant traits plein).



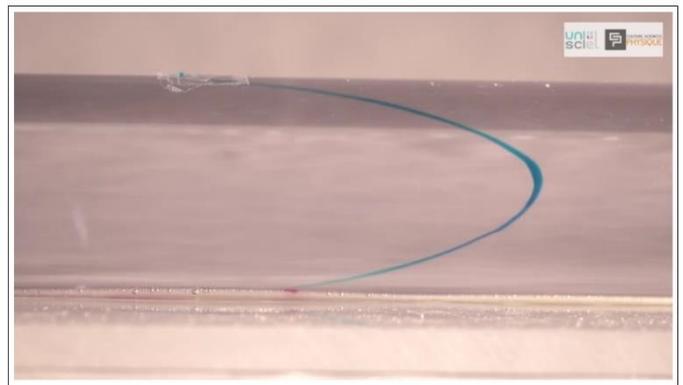
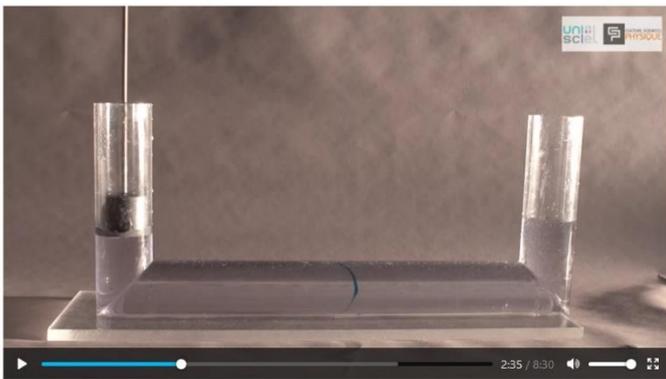
b. Écoulement de Poiseuille cylindrique

Jean-Léonard-Marie POISEUILLE : médecin et physicien, diplômé de l'X. S'est intéressé aux alentours des années 1840/50 à la circulation sanguine (profil de vitesse, type d'écoulement, influence physiologique du froid sur la circulation etc.). Il a donc étudié essentiellement des écoulements à travers des conduites cylindriques.



Observation expérimentale :

<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/physique-animee-poiseuille.xml>



Soit un cylindre rigide dans lequel se trouve du glycérol. On dispose une ligne de colorant et on applique une différence de pression entre les deux extrémités du tube. On observe une mise en mouvement laminaire du colorant. Quelle est la forme analytique du profil de vitesse ? Quelle application à la biologie pouvons-nous effectuer à la manière de Poiseuille ?

Écoulement laminaire $\rightarrow \vec{v} = v(x, r, \theta, t) \vec{e}_x$. Par invariance par rotation / θ , la vitesse ne dépend pas de θ . On se place en régime permanent tel que v soit indépendant de t . L'écoulement est incompressible : $\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow v$ ne dépend pas de x .

Dans cette configuration, le terme d'accélération convective (écrit en coordonnées cylindriques) est identiquement nul. On néglige dans la suite le gradient de pression selon Oz , de même que le poids du fluide, en admettant qu'ils n'ont pas d'influence sur l'écoulement.

E.N.S projetée sur Ox : $\frac{dP}{dx} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right)$. A gauche : fonction de x, à droite : fonction de r. Ces termes sont égaux à une constante, notée -A.

On intègre pour avoir le profil de vitesse : $v(r) = \frac{-Ar^2}{4\eta} + B \ln(r) + C$.

A priori, $v(r=0) \neq \infty \rightarrow B = 0$. Donc $v(r=0) = C = v_0$

$v(r=R) = 0 \rightarrow \frac{-AR^2}{4\eta} + v_0 = 0 \rightarrow v_0 = \frac{AR^2}{4\eta}$ soit finalement $v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$. Le profil de vitesse est bien parabolique. La vitesse est nulle sur les parois et maximale au centre du cylindre.

Calculons désormais le profil de pression dans la conduite : $\frac{dP}{dx} = -A \rightarrow P(x) = -Ax + B'$

Posons $P(x=0) = P_e = B'$ et $P(x=L) = P_s = -AL + P_e$ les valeurs de pression en entrée et sortie du cylindre. Puisque $A > 0$, on constate que la pression diminue dans la conduite. On peut introduire pour quantifier cela la perte de charge :

$\frac{P_e - P_s}{L} = \frac{\Delta P}{L} = A = \frac{4\eta v_0}{R^2}$. Plus le fluide est visqueux, plus la perte de charge est importante.

Nous pouvons alors obtenir l'expression du débit volumique : $D_v = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS} = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{v_0 \pi R^2}{2}$.

Ce qui donne : $D_v = \frac{\Delta P \pi R^4}{8\eta L}$ qui constitue la **loi de Poiseuille**.

Remarques, commentaires :

- On peut écrire $\Delta P = R_{hydro} D_v$, formellement équivalent à $U=RI$. On définit alors une résistance hydrodynamique qui a les mêmes propriétés de compositions que les résistances électriques.
- On peut introduire une vitesse moyenne de l'écoulement telle que $D_v = v_m \pi R^2 \rightarrow v_m = \frac{v_0}{2}$. La vitesse moyenne de l'écoulement est ici la moitié de la vitesse maximale.
- Pour obtenir un débit volumique non nul avec un fluide visqueux, il faut exercer une différence de pression d'autant plus grande que le fluide est visqueux. On s'en rend compte dans la vie quotidienne : il faut fournir une grande différence de pression (obtenue en comprimant les poumons) pour se moucher (la morve étant un fluide plutôt visqueux...).
- On notera la dépendance en R^4 . Pour multiplier le débit volumique par 10, il suffit de multiplier le rayon du tube par 1.78 (moins que le double), tout le reste étant fixé.

Assez de calculs. Applications :

Comparons les écoulements sanguins dans l'aorte (grosse artère partant du cœur, l'A6 de la circulation) et dans les capillaires (les plus petits vaisseaux sanguins, les routes communales de la circulation).

Données : $D_v(\text{cœur}) = 8.30 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$, rayon de l'aorte $R = 1 \text{ cm}$, section cumulée de l'ensemble des capillaires $S = 0.2 \text{ m}^2$, viscosité *moyenne* du sang $\eta = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$.

$$\left. \begin{aligned} v_{ma} &= \frac{Q}{\pi R^2} = 0.264 \text{ m/s} \\ v_{mc} &= \frac{Q}{S} = 4.15 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \end{aligned} \right\} \text{ Le sang circule bien moins vite dans les capillaires que dans l'aorte.}$$

Calculons les pertes de charge :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta P_a}{L_a} &= \frac{8\eta v_{ma}}{R^2} = 42.3 \text{ Pa/m} \\ \frac{\Delta P_c}{L_c} &= \frac{8\eta \pi v_{mc}}{S} = 6.64 \cdot 10^4 \text{ Pa/m} \end{aligned} \right\} \text{ La perte de charge est très importante dans les capillaires. A la contraction du cœur, la pression en sortie est de l'ordre de 16 ou 17 kPa. Parce que la perte de charge est faible dans l'aorte (et les gros vaisseaux en général), c'est également à peu près cette pression (aka pression systolique) qui est mesurée lors de la prise de la tension artérielle (il s'agit du premier des deux nombres donnés, la pression étant exprimée en cmHg). Une fois le sang passé dans les capillaires et les veines, le cœur ne reçoit plus que 3 kPa de pression. On comprend que l'aorte peut se permettre d'être large et longue (~ 10 cm) alors que les capillaires sont fins (1 μm) donc forcément courts (~ mm).}$$

Attention cependant, nous avons supposé un écoulement laminaire dans cette étude. Pour les capillaires : $Re_c = 3$, l'écoulement est effectivement laminaire, mais pour l'aorte $Re_a = 1760$: nous sommes au niveau du régime transitoire (cf photo page 5) et donc la validité de l'étude est tangible...

Ceci dit, ces travaux sont le genre de travaux qu'a pu réaliser Poiseuille à son époque. S'il permet qualitativement d'analyser l'impact d'un rétrécissement (sténose congénitale et/ou due à un caillot, au cholestérol etc.) ou d'un élargissement, le modèle est rudimentaire et ne prend pas en compte de nombreux paramètres : influence de la gravité, régime variable (battements du cœur), parois des vaisseaux non rigides, caractère non newtonien du sang (la viscosité du sang dépend du diamètre des vaisseaux dans lequel il circule, car les hématies présentes vont tendre à s'aligner dans un fin conduit, ce qui fluidifie le sang), régime quasi turbulent dans les plus gros vaisseaux etc.

Aujourd'hui, on étudie les problèmes de circulation sanguine (et d'une manière générale un nombre considérable de problèmes de méca flu) sur ordinateur via des modélisations car l'équation de Navier Stokes n'est pas solvable analytiquement compte-tenu de tous ces paramètres complexes.

Extraits des questions posées :

- **Autre nombre sans dimension en méca flu (nom, définition physique) ?**
- **Est-ce que les forces de viscosité sont uniquement des forces de cisaillement ?**

→ Non, cf la forme 3D avec le laplacien qui inclue des composantes normales. Cela s'illustre notamment dans l'existence de chaînette de fluide (par exemple avec du miel).

- **Comment montrer expérimentalement et simplement le transfert de quantité de mouvement par viscosité ?**

→ On dépose du colorant au milieu d'un écoulement de Couette plan laminaire et on le verra se mettre en mouvement quelques temps après qu'on ait commencé à faire bouger la plaque supérieure.

- **Définition des différents types de fluides non newtoniens ? Exemples ?**
- **On a fait notre étude en supposant notre fluide incompressible. Qu'est-ce que l'utilisation d'un fluide compressible change ?**

→ D'autres termes de viscosité apparaissent (seconde viscosité, viscosité d'élongation...)

- **La classique « est-ce qu'un fluide parfait est un fluide réel dans la limite $\eta \rightarrow 0$? »**
- **Comment en pratique se mesure la viscosité ?**
- **Qu'est-ce qu'un rhéomètre ? Comment ça fonctionne ?**
- **Qu'est-ce qu'un fluide homogène ? L'hypothèse ne concerne-t-elle que la masse volumique ?**
- **Pouvons-nous descendre que $\eta = 10^{-5}$ Pa.s ?**

→ Hélium liquide superfluide ou non (viscosité respectivement nulle et très très faible)

- **Quelle différence entre fluide et écoulement incompressible ?**
- **Qu'est-ce que la loi de Darcy ?**

→ Décrit les écoulements dans les milieux poreux. Vu en BCPST. Peut par ailleurs être traité ici.