

LP 09 - MODÈLE DE L'ÉCOULEMENT PARFAIT D'UN FLUIDE.

GIAUSSERAND Laura & TROLLIET Thibaud

Par réalité et perfection, j'entends la même chose.
SPINOZA

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

- ↻ *Cap prépa PC*
- ↻ *Sanz PC*

→

→ La leçon est un mélange des deux livres.

Prérequis

- Equation de Navier-Stokes,
- Nombre de Reynolds,
- Couche limite,
- Dérivée particulière.

Expériences

- ♣ Balle coincée dans un jet d'air,
- ♣ Effet Venturi.

Table des matières

1	Modèle de l'écoulement parfait	2
1.1	Fluide et écoulement parfait	2
1.2	Domaine de validité	2
1.3	Equation d'Euler	3
1.4	Application à l'effet Coanda	3
2	Théorème de Bernoulli	4
2.1	Enoncé	4
2.2	Interprétation en terme d'énergie	5
2.3	L'effet Venturi	5
3	Applications	5
3.1	Mesure de la vitesse d'un fluide : le tube de Pitot	5
3.2	Effet Magnus	6

Introduction

Nous avons vu dans la précédente leçon l'équation de Navier-Stokes. Cette équation comporte des termes non linéaires, ce qui rend la résolution analytique impossible. Il est donc nécessaire pour pouvoir l'exploiter de négliger certains termes de celle-ci ; le cadre de cette leçon va être l'étude d'un écoulement parfait, c'est-à-dire d'un écoulement permettant de négliger le terme en $\eta\Delta v$. Nous allons commencer par voir les conditions pour considérer un écoulement parfait, puis les équations utiles qui découleront de cette hypothèse, avant de finir par des applications.

1 Modèle de l'écoulement parfait

1.1 Fluide et écoulement parfait

Commençons par définir plus rigoureusement ce que l'on appelle un fluide parfait :

- Fluide parfait : Fluide de viscosité nulle.

Un fluide parfait est extrêmement rare en pratique ; mais on n'a pas besoin d'une hypothèse aussi forte pour ce que l'on cherche à faire : il arrive fréquemment que les effets de viscosité d'un fluide lors d'un écoulement puisse être négligés loin des parois ; on parle alors d'écoulement parfait :

Écoulement parfait : Écoulement où le terme de viscosité (donc le terme diffusif) est négligeable devant les autres termes.

A noter ici que l'on néglige le terme diffusif à la fois pariculaire, mais aussi thermique ; on se retrouve dans ce cas avec un écoulement isentropique.

↓ *Cette hypothèse va nous permettre de simplifier l'équation de Navier-Stokes pour pouvoir en tirer quelque chose ; mais commençons par voir dans quel cas un écoulement peut être considéré comme parfait ou non.*

1.2 Domaine de validité

On cherche à étudier les moments où le terme diffusif est négligeable devant les autres, en particulier devant le terme convectif ; cela nous fait immédiatement penser au nombre de Reynolds introduit précédemment :

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta} \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique du fluide, U et L les vitesse et longueur caractéristiques respectivement. On voit que négliger le terme de viscosité en faisant tendre η vers zéro revient à avoir un nombre de Reynolds tendant vers l'infini. Un écoulement parfait est donc nécessairement turbulent.

Il est intéressant de s'attarder ici sur la notion de couche limite. En effet, un fluide non parfait possède une viscosité non nulle ; il peut quand même être assimilé à un écoulement parfait tant que le nombre de Reynolds est suffisamment grand. Mais, dans la couche limite, la vitesse devient faible, tendant vers zéro à cause des conditions aux limites imposées par les parois ; le nombre de Reynolds décroît alors, et l'écoulement ne peut plus être considéré comme parfait. On pourrait résumer comme suit :

Un écoulement réel :

- possède une couche limite, dans laquelle le nombre de Reynolds est faible, donc l'écoulement laminaire et non parfait ;
- peut être considéré comme parfait en dehors de cette couche limite si le nombre de Reynolds est assez élevé pour pouvoir négliger les effets de viscosité.

Rappelons que l'épaisseur de la couche limite dépend du nombre de Reynolds et de la longueur caractéristique comme :

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (2)$$

Donnons alors quelques ODG pour évaluer l'importance de la couche limite :

- Une voiture de 4 mètres roulant à 100 km/h (donc environ 30m/s) a une couche limite de : $\delta \approx 10^{-3}$ m. Si les effets de la couche limite ne peuvent pas être négligés (des frottements viennent de la viscosité amenant une vitesse

nulle au contact) on voit cependant que si l'on s'intéresse à l'écoulement de l'air autour de la voiture, on pourra ne pas prendre en compte cette couche. Evaluons maintenant le nombre de Reynolds : $R_e \approx 10^7$; on peut donc approximer l'écoulement comme un écoulement parfait tant que l'on s'intéresse à l'écoulement à plus de quelques millimètres de la voiture.

- De l'eau s'écoulant dans un tuyau de rayon 10cm à une vitesse de 10cm/s donne : $R_e \approx 10^4$ et $\delta \approx 10^{-3}\text{m}$; comme précédemment, on peut considérer l'écoulement comme parfait sur la quasi-totalité du tuyau, la couche limite représentant une portion négligeable de celui-ci (même si, encore une fois, les effets de celle-ci sont au final non négligeables, mais cela n'a pas d'influence sur l'écoulement en dehors des couches limites).

↓ *Regardons maintenant à quoi ressemble la nouvelle équation, obtenue pour un écoulement parfait.*

1.3 Equation d'Euler

Si l'on néglige le terme de viscosité $\eta\Delta v$ dans l'équation de Navier-Stokes, on obtient :

Pour un écoulement parfait, dans un référentiel galiléen, on a l'équation d'Euler :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{grad})\vec{v}\right) = -\text{grad}(P) + \rho \vec{g} \quad (3)$$

Remarque : Notons que l'équation d'Euler est valable aussi pour les écoulements compressibles ; en effet l'hypothèse d'incompressibilité présente pour avoir l'équation de Navier-Stokes est là pour simplifier un terme de viscosité qui est nul si l'écoulement est parfait ; l'hypothèse d'incompressibilité n'est donc pas nécessaire ici.

Un problème de mécanique contient 5 inconnues : les trois composantes de la vitesse, la masse volumique et la pression. L'équation d'Euler nous donne trois équations scalaires ; il en manque donc deux pour fermer le système. L'équation locale de conservation de la masse en apporte une autre ; la dernière équation est donnée par la connaissance de la compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \quad (4)$$

Il nous faut aussi nous intéresser, puisque nous sommes en présence d'une équation différentielle, aux conditions aux limites qui nous permettront de résoudre le problème. Elles sont de deux types :

- Au contact entre deux fluides, la pression est continue (si l'on néglige les phénomènes de tension superficielle que nous verrons dans une prochaine leçon) ;
- La vitesse du fluide au contact d'une surface solide est tangente à cette surface : $\vec{v}\vec{n} = 0$.

1.4 Application à l'effet Coanda

Effet Coanda



On met une balle de ping-pong sous un sèche-cheveux vertical ; en inclinant le sèche-cheveux, la balle ne tombe pas mais reste prise dans le jet d'air.

Expliquons le résultat de l'expérience à partir de l'équation d'Euler. Le nombre de Reynolds est ici de l'ordre de $R_e \approx \frac{1}{10^{-5}} \approx 10^4 \gg 1$. L'écoulement peut donc être considéré comme parfait et on peut utiliser l'équation d'Euler. En exprimant l'accélération particulière dans la base de Frenet, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \left(\frac{Dv}{Dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \right) = -\text{grad}P \quad (5)$$

où R est le rayon de courbure. En effet, la vitesse est selon la tangente à la direction, et le terme normal provient de la force d'accélération centrifuge. La pesanteur peut être négligée si on se place sur une échelle assez petite.

En projetant cette équation sur \vec{e}_n , vecteur normal à la ligne de courant dirigé vers l'intérieur de la courbure, on a :

$$\rho \frac{v^2}{R} = -(\text{grad}P) \vec{e}_n = \frac{\partial P}{\partial r} > 0 \quad (6)$$

La pression est donc une fonction croissante du rayon ; la pression augmente donc du centre de courbure vers la périphérie extérieure du jet, et la balle subit une force due à la pression dirigée positivement selon \vec{e}_n ; cette force va être suffisante pour compenser le poids et laisser la balle en suspension.

On a ici un phénomène de portance ; c'est avec le même principe que l'avion va pouvoir s'élever, grâce à une forme des ailes permettant une dépression sur le dessus de l'aile la faisant s'élever.

↓ Nous allons maintenant voir une autre équation (scalaire cette fois), traduisant la conservation de l'énergie pour un écoulement parfait : le théorème de Bernoulli.

2 Théorème de Bernoulli

2.1 Enoncé

On se place avec les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est parfait, stationnaire et incompressible ;
- Le fluide ne subit pas d'autres actions que la pesanteur ;
- Le référentiel est galiléen.

On choisit l'axe vertical ascendant. L'écoulement étant parfait, on peut écrire l'équation d'Euler avec l'accélération particulière écrite en faisant apparaître le rotationnel :

$$\vec{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\vec{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v} = -\vec{grad}\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g} \tag{7}$$

On se place sur une ligne de courant joignant les points A et B ; Pour un déplacement élémentaire \vec{dl} le long de cette ligne de courant, on a :

$$\int_A^B \vec{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)\vec{dl} + \int_A^B (\vec{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v}\vec{dl} = - \int_A^B \vec{grad}\left(\frac{P}{\rho}\right)\vec{dl} + \int_A^B \vec{g}\vec{dl} \tag{8}$$

Le second terme est nul : en effet, \vec{v} et \vec{dl} sont colinéaires. On a donc :

$$\int_A^B d\left(\frac{v^2}{2}\right) = - \int_A^B d\left(\frac{P}{\rho}\right) - \int_A^B g dz \tag{9}$$

$$\left(\frac{v^2(B)}{2} - \frac{v^2(A)}{2}\right) = -\left(\frac{P(B)}{\rho} - \frac{P(A)}{\rho}\right) - g(z_B - z_A) \tag{10}$$

En réarrangeant la dernière équation, on obtient l'équation de Bernoulli :

Théorème de Bernoulli : Dans un écoulement parfait, stationnaire et incompressible, évoluant dans le champ de pesanteur, la quantité $\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$ se conserve le long d'une ligne de courant :

$$\frac{P(A)}{\rho} + \frac{v(A)^2}{2} + gz_A = \frac{P(B)}{\rho} + \frac{v(B)^2}{2} + gz_B$$

Dans le cas où l'écoulement est aussi irrotationnel, on peut alors simplifier la démonstration précédente en annulant plus tôt le terme avec le rotationnel, et tout rassembler sous un même gradient :

$$\vec{grad}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = \vec{0} \tag{11}$$

On a donc enlevé la condition d'être nécessairement sur une ligne de courant ; on a :

Dans un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, et irrotationnel, et soumis seulement à l'action de pesanteur, la quantité $\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$ est conservée en tout point de l'écoulement :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constante}$$

Ce terme est appelé la charge de l'écoulement.

Les hypothèses homogène et stationnaire sont là pour avoir une masse volumique constante.

2.2 Interprétation en terme d'énergie

On peut interpréter le théorème de Bernoulli comme la conservation de l'énergie mécanique : on remarque que chaque terme de l'équation est homogène à une énergie volumique (lorsque l'équation est multipliée par ρ) ; le terme $\rho\frac{v^2}{2}$ correspond à l'énergie cinétique volumique, ρgz au terme d'énergie potentielle volumique de pesanteur, et le terme de pression s'exprime comme P, la pression étant une forme d'énergie potentielle volumique d'un fluide. Finalement, la charge de l'écoulement correspond à l'énergie mécanique volumique d'une particule de fluide. Le théorème de Bernoulli traduit quant à lui la conservation de l'énergie mécanique des particules de fluide au cours de leur déplacement.

2.3 L'effet Venturi

Effet Venturi

Différentes expériences sont possibles :

- une balle de ping-pong (encore) est coincée dans un entonnoir dans lequel on envoie de l'air comprimé ; celle-ci est attirée vers le haut (cf Sanz nouveau pg).
- Filtration sur Buchner ; le problème, c'est que la synthèse du 2-diméthyl-3,6-bromo-4-cédumylo-pentan-1-ol à faire avant prend quelques heures... Sinon ça peut juste montrer le principe aussi.
- Souffler entre deux feuilles de papiers parallèles : elles se rapprochent l'une de l'autre à cause de l'écoulement d'air les traversant.

On considère l'écoulement d'un fluide homogène dans une conduite de surface S , présentant un étranglement de surface s . On suppose que l'écoulement est stationnaire et incompressible. On a de plus un nombre de Reynolds de l'ordre de $Re \approx 10^5$, donc l'écoulement peut être considéré comme parfait hors des couches limites (de l'ordre de $\frac{0.1}{\sqrt{10^5}} \approx 3.10^{-4}$). L'écoulement n'est par contre pas irrotationnel à cause du rétrécissement. On se place donc sur une ligne de courant passant par trois points A, B et C, de même altitude, et respectivement à gauche de l'étranglement, dans l'étranglement et à la droite de l'étranglement.

Les hypothèses étant réunies, on peut appliquer le théorème de Bernoulli, en enlevant le terme de pesanteur puisque les points sont à la même altitude :

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} = \frac{P_C}{\rho} + \frac{v_C^2}{2} \quad (12)$$

L'écoulement est supposé incompressible, il y a donc conservation du débit volumique. On a donc : $v_A S = v_B s = v_C S$. Comme $S > s$, on en déduit $v_A = v_C < v_B$. L'équation précédente nous donne donc $P_B < P_A = P_C$: on a un phénomène de sous-pression dans la zone d'étranglement. Cela explique pourquoi les feuilles se rapprochent (pression plus faible entre elles que la pression atmosphérique). Cela explique aussi le vide partiel du filtrage.

↓ *On ne se sent plus, vive les applications, encore, encore!*

3 Applications

3.1 Mesure de la vitesse d'un fluide : le tube de Pitot

Le tube de Pitot est un système destiné à mesurer la vitesse d'un avion par rapport à l'air ambiant. Cela se fait en mesurant une différence de pression à l'aide de manomètres et en déduisant la vitesse à l'aide de formule de Bernoulli.

Le tube de Pitot est constitué d'un tube de quelques millimètres de diamètre, que l'on place parallèlement à l'écoulement afin de minimiser l'écoulement. Le tube est percé d'un trou concentrique de section environ 0.5 mm^2 , dirigé donc lui aussi dans le sens de l'écoulement ; on appelle A le point en sortie de cette ouverture. A l'intérieur, le fluide atteint rapidement un état d'équilibre et reste immobile : la vitesse au point A est donc nulle.

Le tube extérieur est quant à lui percé d'une série de petits orifices en couronne ; on appelle B le point en sortie de l'un de ces orifices. Un manomètre différentiel est relié aux deux tubes et permet de mesurer la différence de pression entre A et B.

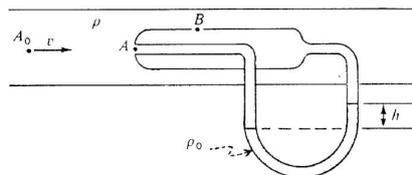


FIGURE 1 – Tube de Pitot.

L'écoulement est supposé uniforme, à la vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ loin du tube.

On suppose de plus que la vitesse de l'écoulement est assez faible par rapport à la vitesse du son pour pouvoir le considérer comme incompressible (pour des avions plus rapides voire hypersoniques, les sondes Pitot sont encore utilisées mais la formule pour remonter à la vitesse est plus compliquée). Il nous reste à vérifier que l'écoulement est parfait pour pouvoir appliquer le théorème de Bernoulli.

En pratique, le tube Pitot est positionné à une certaine distance de l'avion de sorte qu'il soit hors de la couche limite créée par ce dernier. L'écoulement incident est donc assimilable à un écoulement parfait et uniforme ; par contre, une autre couche limite se crée au contact du tube de Pitot : il faut donc prendre la pression hors de celle-ci si l'on veut un écoulement parfait. La prise de pression au point B se fait en réalité en un point B' un peu en hauteur, afin d'éviter ce problème de couche limite ; mais si les points B et B' sont alignés selon e_x , le champ de pression obéit à la statique des fluides et on a $P(B) \approx P(B')$ puisque les points sont proches.

On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli : on prend les lignes de courant passant par A et B respectivement ; celles-ci passent en amont par des points A_0 et B_0 , de vitesse v_0 et à la pression P_0 car ces points sont suffisamment loin du tube pour que l'écoulement ne soit pas perturbé, et suffisamment proche entre eux pour négliger la variation de pression ; on a donc :

$$P_{A_0} + \rho \frac{v_{A_0}^2}{2} + \rho g z_{A_0} = P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A \quad (13)$$

$$P_{B_0} + \rho \frac{v_{B_0}^2}{2} + \rho g z_{B_0} = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B \quad (14)$$

D'après ce qui a été dit, en soustrayant les deux équations :

$$(P_A - P_B) + \frac{\rho}{2}(v_A^2 - v_B^2) + \rho g(z_A - z_B) = 0 \quad (15)$$

Puisque A est un point d'arrêt (donc $v_A = 0$), et que B est supposé suffisamment loin le long du tube pour que l'écoulement soit redevenu comme avant (donc $v_B = v_0$), on a :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}} \quad (16)$$

On déduit donc la vitesse de l'écoulement, ou en pratique la vitesse de l'avion dans l'air (ce qui revient au même en changeant de référentiel) à l'aide de la différence de pression. La sonde de Pitot est essentielle dans un avion car l'avion doit rester dans une plage de vitesses donnée (pas trop lent pour avoir une force de portance suffisante, pas trop rapide pour ne pas causer une déformation ou rupture de la structure).

3.2 Effet Magnus

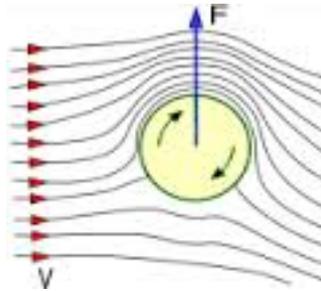


FIGURE 2 – Effet Magnus.

Un physicien allemand (Magnus) a constaté expérimentalement en 1853 qu'un solide en rotation dans un fluide subit, en plus de la poussée d'Archimède et de l'action classique de trainée, une force orthogonale à la direction du flux. Nous allons essayer d'interpréter ce phénomène, appelé effet Magnus, grâce à ce que nous avons vu.

On considère un cylindre en rotation dans un écoulement permanent. Le flux de fluide arrive vers la gauche et possède une vitesse uniforme $\vec{v} = v\vec{e}_x$ loin en amont du cylindre. Le cylindre, en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre, entraîne par viscosité le fluide à son voisinage. Cela donne aux lignes de courant l'allure de la figure 2. La vitesse du fluide est alors plus grande au dessus du cylindre qu'en dessous.

On va ici se limiter à une étude simplifiée du phénomène pour expliquer qualitativement l'effet observé. On s'intéresse à deux lignes de courant $A_\infty A$ et $B_\infty B$, où A_∞ et B_∞ sont bien en amont de l'écoulement, A est un peu au-dessus du cylindre et B un peu en dessous par rapport au schéma, assez proche pour avoir les lignes de courant proches à l'infini, mais de sorte qu'ils soient en dehors de la couche limite. Loin du cylindre, les deux lignes de courant sont très proches l'une de l'autre : les points A et B sont quasiment confondus et on a donc : $P_A = P_B$ et $v_A = v_B = v$. On suppose l'écoulement comme parfait (on s'est placé en dehors de la couche limite), on peut appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, permanent et incompressible :

$$P_{A\infty} + \rho \frac{v_{A\infty}^2}{2} = P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} \quad (17)$$

$$P_{B\infty} + \rho \frac{v_{B\infty}^2}{2} = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} \quad (18)$$

On a, là encore, négligé le poids, par exemple en plaçant le cylindre de tel sorte que tous les points soient à la même hauteur. En soustrayant membre à membre :

$$P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} \quad (19)$$

Mais puisque la vitesse du fluide est plus grande au point A qu'au point B, on en déduit : $P_A < P_B$: la pression sous le cylindre est plus grande que celle au dessus ; la résultante des forces de pression est dirigée vers le haut, d'où un mouvement ascendant dû à la rotation.

L'effet Magnus se visualise très bien lors des effets sur une balle de ping-pong ou au football : on a déviation de la balle à cause de la rotation imposée.

Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon qu'un écoulement à haut nombre de Reynolds pouvait être considéré comme parfait, ce qui permettait de simplifier les équations ; on en a déduit l'équation d'Euler et le théorème de Bernoulli. Nous avons vu plusieurs applications de ceux-ci ; elles sont nombreuses, comme pour l'effet Venturi (lance à eau des pompiers, ...) ou encore le phénomène de portance permettant aux avions de voler. On aurait pu étudier plus en profondeur cette force de portance ainsi que celle de traînée associée : voir que l'on a un point de décrochage, un angle optimale pour une aile pour maximiser le rapport de la portance par rapport à la traînée, ...

Questions et commentaires