

LP09 – MODÈLE DE L'ÉCOULEMENT PARFAIT D'UN FLUIDE.

13 février 2018

Bruno ETCHEVERRY & François NICOLAS

*Les chercheurs de solide sont des possédants. Les
chercheurs de fluide sont des poètes.*
SALAH STÉTIÉ.

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

- ↻ *Hydrodynamique physique*, **GHP** → La base.
- ↻ *Introduction à la dynamique des fluides*, **Rieuchard** → Pour compléter.
- ↻ *Physique expérimentale*, **Jolidon** → Les applications.
- ↻ *J'intègre PC**, **Sanz** → Pour l'aspect « prépa ».

Prérequis

- Équation de Navier-Stokes ;
- Dérivée particulaire ;
- Couche limite ;
- Nombre de Reynolds.

Expériences

- ☞ Effet Coanda ;
- ☞ Effet Venturi.

Table des matières

1	Notion d'écoulement parfait	2
1.1	Fluide et écoulement parfaits	2
1.2	Domaine de validité	2
1.3	Équation d'Euler	3
1.4	Effet Coanda	3
2	Théorème de Bernoulli	3
2.1	Énoncé	3
2.2	Interprétation énergétique	4
2.3	Effet Venturi	5
3	Applications	6
3.1	Tube de Pitot	6
3.2	Effet Magnus	7

Introduction

Dans le cours précédent, nous avons vu l'équation de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible, qui est une équation non linéaire aux solutions parfois compliquées. Dans ce cours, nous allons développer le modèle de l'écoulement parfait qui simplifiera cette équation et permettra d'alléger son traitement, avant d'établir un théorème fondamental avec lequel on traitera deux exemples d'application.

I) Notion d'écoulement parfait

I) 1- Fluide et écoulement parfaits

Pour commencer, nous allons définir ce qu'est un fluide parfait :

Définition : fluide parfait

Un fluide parfait dans lequel il n'existe pas de phénomènes de dissipation ; on considère notamment $\eta = 0$ et $\lambda_{th} = 0$.

En pratique, la majorité des fluides ne le sont pas (il n'y a que l'hélium IV à genre 2 K qu'on considère comme parfait), mais peuvent présenter le même comportement qu'un fluide parfait : on parle alors d'écoulement parfait :

Définition : écoulement parfait

C'est un écoulement qui peut être raisonnablement approximé par celui d'un fluide parfait.

Transition

↓ En particulier, il faut que les effets diffusifs décrits par le terme $\eta \Delta \vec{v}$ dans l'équation de Navier-Stokes soit négligeable devant les autres termes : on va en voir les conditions.

I) 2- Domaine de validité

Le nombre de Reynolds, introduit dans la leçon précédente, rend compte de l'importance des effets convectifs devant les effets diffusifs. Il s'écrit

$$\text{Re} = \frac{\rho U L}{\eta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho & \text{la masse volumique en kg}\cdot\text{m}^{-3} \\ U & \text{la vitesse caractéristique en m}\cdot\text{s}^{-2} \\ L & \text{la distance caractéristique en m} \\ \eta & \text{la viscosité en Pa}\cdot\text{s} \end{cases} \quad (1)$$

Pour négliger la viscosité, il faut donc $\text{Re} \gg 1$, en faisant attention toutefois à ne pas entrer dans un régime turbulent puisqu'alors le traitement devient difficile.

Ordre de grandeur

- ◆ Bille dans de l'huile d'olive : $L \approx 1 \text{ cm}$, $U \approx 10^{-2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\nu = \frac{\eta}{\rho} \approx 10^{-3} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow \text{Re} \approx 10^{-1}$
- ◆ Balle de ping-pong dans l'air : $L \approx 4 \times 10^{-2} \text{ m}$, $U \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\nu \approx 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow \text{Re} \approx 3 \cdot 10^4$

On observe donc que si l'écoulement se fait sur une distance trop grande, ou pour une viscosité cinématique trop élevée, on ne peut pas le considérer comme un écoulement parfait. Cependant, il y a une autre limitation : proche des parois du solide avec lequel le fluide peut être en contact, il existe une couche limite où la vitesse diminue et tend vers 0, ce qui implique $\text{Re} \rightarrow 0$, et l'écoulement ne peut donc évidemment plus être considéré comme parfait. On résume donc :

Conditions d'écoulement parfait

Un écoulement peut être considéré parfait si, à l'extérieur de la couche limite, on a $\text{Re} \gg 1$.

Or, on peut calculer un ordre de grandeur de la couche limite par la relation

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (2)$$

Transition

▼ Une fois les conditions vérifiées, on peut réécrire l'équation de Navier-Stokes.

I) 3- Équation d'Euler

En négligeant $\eta \Delta \vec{v}$ devant les autres termes, on obtient l'équation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \rho \vec{g} \quad (3)$$

Cette équation est valable pour des écoulements compressibles, à l'inverse de l'équation de Navier-Stokes dont la démonstration nécessitait des écoulements incompressibles (pour avoir le $\Delta \vec{v}$). On se limitera cependant à l'étude d'écoulements incompressibles dans cette leçon. On notera également que le fait de négliger tout phénomène de diffusion (dont diffusion de température et de quantité de mouvement) revient à supprimer tout phénomène irréversible ; les écoulements parfaits sont donc réversibles thermodynamiquement, ou autrement dit, les écoulements parfaits sont isentropiques.

☞ Transition

▼ On peut directement en faire une application : l'effet Coanda.

I) 4- Effet Coanda

↪ Jolidon, p.417 ; Sanz PC*, p.347 ; GHP, p.208.

Lorsqu'un jet d'eau rencontre un obstacle convexe, il se courbe pour longer l'obstacle, et on a apparition d'un gradient de pression dans la section du jet qui va générer une force sur l'obstacle.



Effet Coanda

↪ Physique expérimentale, Jolidon

⊖ 2 minutes

Matériel : une boule de polystyrène accrochée à un fil et un filet d'eau.

On place la boule de polystyrène sous le filet d'eau. On peut alors écarter le fil tout en laissant la boule en place, c'est magique.

On étudie ici un écoulement avec des lignes de courant de rayon de courbure R , et on néglige les forces volumiques et la viscosité. De plus, on se place dans le repère de Frenet local, avec \vec{t} le vecteur unitaire tangent aux lignes de courant et \vec{n} le vecteur unitaire normal à ces lignes de courant et dirigées vers le centre C de notre boule. On a $\vec{n} = -\vec{e}_r$. L'équation d'Euler donne

$$\rho \left(\frac{D(v \vec{t})}{Dt} \right) = \rho \left(\frac{Dv}{Dt} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{n} \right) = -\text{grad} P$$

Ainsi, en projetant sur \vec{n} , on obtient l'équation :

$$\rho \frac{v^2}{R} = \frac{\partial P}{\partial r}$$

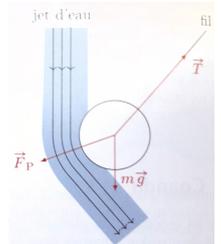


FIGURE 1 – Effet Coanda

(4) (Jolidon, p.417).

Notre objet étant convexe, on a $R > 0$ ce qui implique que P augmente en s'écartant de C . Ainsi, en notant A un point du jet d'eau en contact avec la boule, et B le point de l'autre côté de la section, on a $P_B = P_0$ la pression atmosphérique et $P_B > P_A$. Autrement dit, les points du fluide en contact avec la boule créent une dépression, ce qui induit une force de portance (l'intégrale de la pression sur la surface de la boule) du fait que le côté à l'air libre est à la pression P_0 , et permet donc l'équilibre de la boule.

☞ Transition

↓ Cet effet est un effet de portance, comme pour le cas de l'aile d'avion par exemple. Cependant, il sera utile de développer un théorème pour généraliser cet effet.

II) Théorème de Bernoulli

II) 1- Énoncé

On se place dans le cas d'un écoulement :

- ◆ parfait $\Rightarrow \eta = 0$;
- ◆ stationnaire $\Rightarrow \partial_t = 0$;
- ◆ incompressible $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$;
- ◆ soumis volumiquement au poids $\Rightarrow \vec{f}_{\text{vol}} = \rho \vec{g}$.

On utilise également la formule d'analyse vectorielle $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{v^2}{2}$, ce qui donne :

$$\boxed{(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{v^2}{2} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{P}{\rho} + \vec{g}} \quad (5)$$

Si on s'intéresse à deux points sur une ligne de courant que l'on note A et B , en intégrant cette équation on obtient :

$$\int_A^B \left[\underbrace{(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}}_{\perp d\vec{l}} \cdot d\vec{l} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{v^2}{2} \cdot d\vec{l} \right] = \int_A^B \left[\vec{g} \cdot d\vec{l} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{P}{\rho} \cdot d\vec{l} \right]$$

$$\Leftrightarrow \int_A^B \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right] \cdot d\vec{l} = 0$$

ou, autrement dit,

$$\boxed{\left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right]_A^B = 0} \quad (6)$$

C'est donc une quantité conservée sur une ligne de courant $A \rightarrow B$.

Si l'on suppose en plus que l'écoulement est irrotationnel $\Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = \vec{0}$, on n'a plus besoin de se placer sur une ligne de courant et on a alors

$$\boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{cste}} \quad \text{sur tout l'écoulement} \quad (7)$$

Cette quantité est ce que l'on appelle la *charge* de l'écoulement. On peut résumer ce théorème de la manière suivante :

Théorème de Bernoulli

Sur une ligne de courant (ou dans tout le volume) d'un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et soumis au poids (et irrotationnel), une augmentation de vitesse entraîne une diminution de pression au point considéré.

Transition

▼ *Ce théorème nous en dit en fait plus que ça...*

II) 2- Interprétation énergétique

En réalité, le fait que la charge se conserve au cours de l'écoulement traduit le fait que **l'énergie mécanique se conserve** (ce qui est logique puisqu'on a négligé tout effet de dissipation...). En effet, en multipliant par ρ , on obtient

- ◆ $\rho \frac{v^2}{2}$, l'énergie cinétique volumique ;
- ◆ ρgz , l'énergie potentielle de pesanteur ;
- ◆ $P = \rho h$, avec h l'enthalpie volumique.

Transition

▼ *Nous pouvons alors faire une application directe de ce théorème : l'effet Venturi.*

II) 3- Effet Venturi

⚡ **Jolidon**, p.416 ; **Sanz PC***, p.361 ; **GHP**, p.206.

On considère encore un fluide en écoulement

- ◆ parfait $\Rightarrow \eta = 0$ en-dehors de δ ;
- ◆ stationnaire $\Rightarrow \partial_t = 0$;
- ◆ incompressible $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Il évolue dans une conduite de section S présentant un étranglement de section s . On ne pourra pas considérer l'écoulement irrotationnel, on va donc appliquer le théorème de Bernoulli à une ligne de courant, ici l'axe neutre de la conduite. Sur cet axe, on repère par A , B et C les points en-dessous des tubes de section $s' \ll s$, et A' , B' et C' les points à l'interface eau/air de chaque tube.

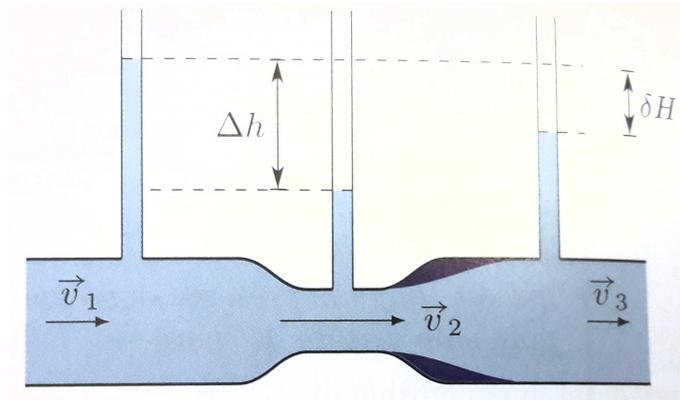


FIGURE 2 – Effet Venturi (**Jolidon**, p.416).

L'équation d'Euler nous donne $\overrightarrow{\operatorname{grad}} P = \rho \vec{g}$, d'où en intégrant,

$$\begin{cases} P_A = p_0 + \rho g h_A \\ P_B = p_0 + \rho g h_B \\ P_C = p_0 + \rho g h_C \end{cases} \quad (8)$$

L'écoulement incompressible implique la conservation du débit, autrement dit

$$v_A S = v_B s = v_C S \Rightarrow \begin{cases} v_A = v_C \\ v_B > v_A \end{cases} \quad (9)$$

Le théorème de Bernoulli donne

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} = \frac{P_C}{\rho} + \frac{v_C^2}{2} \quad (10)$$

Or, comme $v_B > v_A$ (d'après (9)), on a $P_B < P_A$ (d'après (10)) ; ainsi, (8) implique $h_B < h_A$.

Effet Venturi

⚡ *Physique expérimentale*, **Jolidon**

⊖ 5 minutes

Matériel : Tube Venturi p 106.72, deux potences et deux noix, un évier.

Le remplissage du tube est compliqué. Je pense qu'il vaut mieux le remplir très lentement pour éviter d'avoir des bulles, mais bon c'est pas sûr. Par contre, même après avoir réussi à éliminer toutes les bulles (ce qui peut nécessiter de faire couler de l'eau par-dessus les petits tubes) avec un bon débit d'eau, au bout de 35 minutes de leçon tout s'était re-dérégulé, donc c'est moyen...

On remarque que la hauteur de l'eau dans le tube du milieu est bien plus basse, par contre celle des tubes après l'étranglement n'est pas la même que celle des premiers : on n'a pas $P_C = P_A$, c'est une limite du modèle. En fait, on a une « perte de charge » due à la zone d'eau morte dessinée sur la figure 2 qui vient du fait que le liquide ne

peut pas suivre exactement la conduite juste après l'étranglement, ce qui est dû et à la viscosité et aux turbulences : de l'énergie y est dissipée, et on a en fait $v_C < v_A$.

🔧 Transition

▼ Avec tous ces éléments en jeu, on peut maintenant étudier d'autres systèmes utilisant effectivement ces notions.

III) Applications

III) 1- Tube de Pitot

🔗 Sanz PC*, p.364.

C'est un dispositif de mesure de vitesse utilisé notamment dans les avions ou dans les bateaux. Comme d'habitude, on considère un écoulement :

- ◆ parfait $\Rightarrow \eta = 0$ en-dehors de δ ;
- ◆ stationnaire $\Rightarrow \partial_t = 0$;
- ◆ incompressible $\Rightarrow \text{div } \vec{v} = 0$.

qui arrive sur le tube à la vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$. Le point A fait face à l'écoulement, et est à l'entrée d'un petit tube de faible section (typiquement 0.5 mm^2) qui fait que l'air atteint rapidement un état d'équilibre et est immobile en ce point. On est à la pression P_A et à la vitesse $\vec{v} = \vec{0}$. Le point B est à l'entrée d'un autre orifice dans le tube, et on considère que l'on peut prendre sa pression comme étant égale à celle du point placé à sa verticale mais en-dehors de la couche limite, en négligeant les effets de pression dus à la statique des fluides, et la vitesse du fluide en ce point est celle du fluide en amont, $v_0 \vec{e}_x$.

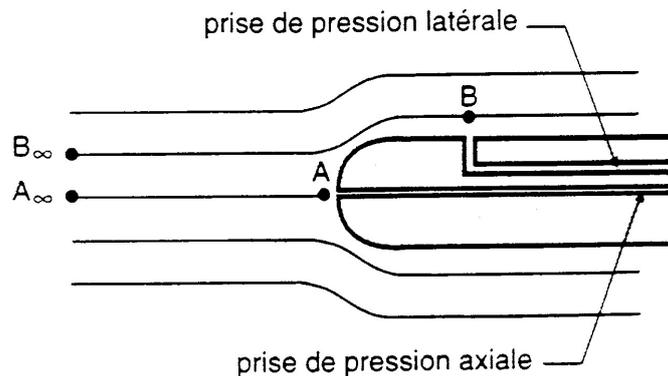


FIGURE 3 – Schéma de l'expérience du tube de Pitot.

On prend alors deux points suffisamment loin à gauche et qui soient sur les lignes de courant qui vont jusqu'à A et B : on les appelle A_∞ et B_∞ . En ces points, on est à la pression P_0 et à la vitesse v_0 . L'application du théorème de Bernoulli entre A_∞ et A donne :

$$\rho \frac{v_0^2}{2} + P_0 = 0 + P_A \quad (11)$$

De même, entre B_∞ et B ,

$$\rho \frac{v_0^2}{2} + P_0 = \rho \frac{v_0^2}{2} + P_B \Rightarrow P_B = P_0 \quad (12)$$

Ainsi, par simple différence des deux équations précédentes, on obtient la relation :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho}} \quad (13)$$

🔧 Transition

▼ Maintenant une application un peu plus compliquée où un solide est en rotation dans un fluide.

III) 2- Effet Magnus

⚡ Cap prépa PC*, ch.10.

On étudie ici l'écoulement stationnaire d'un liquide autour d'un cylindre tournant dans le sens horaire autour de son axe de révolution. Le fluide arrive de la gauche et possède une vitesse uniforme $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$ loin en amont du cylindre, et comme le cylindre entraîne le fluide par des effets de viscosité, on a $v_{B'} > v_{A'}$, et les lignes de courant prennent la forme décrite figure 4.

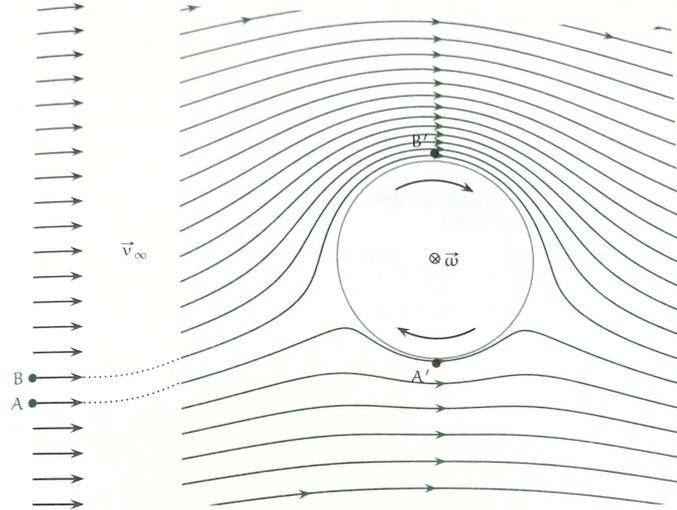


FIGURE 4 – Lignes de courant autour d'un cylindre tournant (Cap Prépa PC*, ch.10)

On raisonne sur deux lignes de courant AA' et BB' comme indiqué sur la figure 4. En amont du cylindre, les points A et B sont pratiquement confondus, donc

$$\begin{cases} P_A = P_B \\ v_A = v_B \end{cases} \quad (14)$$

En appliquant le théorème de Bernoulli à ce système (bien que l'écoulement ne soit pas parfait puisqu'on a considéré des effets visqueux pour la forme des lignes de courant...), sur chaque ligne de courant on a :

$$P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} = P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} \quad (15)$$

$$P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} = P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} \quad (16)$$

Avec l'équation (14), en soustrayant les équations (15) et (16) terme à terme, on obtient

$$P_{A'} + \rho \frac{v_{A'}^2}{2} = P_{B'} + \rho \frac{v_{B'}^2}{2} \quad (17)$$

et comme $v_{B'} > v_{A'}$, on a finalement

$$P_{B'} < P_{A'} \quad (18)$$

Cette différence de pression amène à la création d'une force de portance, dirigée ici vers le haut : c'est la force Magnus (figure (5)). On peut montrer qu'elle s'exprime de la manière suivante :

$$\vec{F}_{\text{Magnus}} = L \rho v_\infty \left[\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right] \vec{e}_z \quad (19)$$

avec L la longueur du cylindre dans la direction \vec{e}_y , $\vec{e}_z = \vec{v}_\infty \wedge \vec{\omega}$ et \mathcal{C} un contour fermé autour du cylindre. C'est en fait l'asymétrie de la circulation autour du cylindre qui crée la force de Magnus, l'approche avec le théorème de Bernoulli étant une explication qualitative.

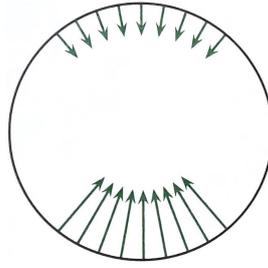


FIGURE 5 – Forces de pression exercées sur le cylindre (Cap prépa PC*, ch.10).

Conclusion

Nous avons donc vu qu'un écoulement à grand nombre de Reynolds permettait de considérer un écoulement comme étant celui d'un fluide parfait tant que l'on était loin de la couche limite, ce qui permet de simplifier l'équation de Navier-Stokes et de développer un outil mathématique allégeant le traitement de systèmes physiques dont l'utilisation repose sur les principes de l'écoulement parfait. Les études à haut Reynolds, comme le décollement de la couche limite derrière une balle de golf, est très importante en aéronautique pour limiter les effets de traînée par exemple, et l'effet Magnus a déjà utilisé sur des bateaux pour créer des *turbovoiles* permettant d'économiser jusqu'à 35% d'énergie à un navire.

Questions

- ◆ Un écoulement turbulent est-il toujours parfait ? Oui.
- ◆ Comment on trouve $\delta = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}}$? C'est un effet diffusif, donc l'échelle de distance de l'effet (δ) se calcule par la relation $\delta = \sqrt{\nu t}$. On retrouve bien la même chose.
- ◆ Il se passe quand dans Bernoulli si on garde l'irrotationnalité mais qu'on enlève la stationnarité ? $\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = -\text{grad } \phi$, on peut donc l'inclure dans la charge.
- ◆ Quelle hypothèse fait-on sur les tubes verticaux de l'effet Venturi ? Il faut que leur section soit très petite devant celle des conduites principales, pour éviter de perturber le mouvement.
- ◆ Quelle est la limite de $\text{div } \vec{v} = 0$? En fait pour être incompressible, il faut que la compressibilité isochore soit nulle : $\chi = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = 0$. Cela revient à avoir une condition sur la vitesse du fluide par rapport à la vitesse des ondes acoustiques dans ce milieu (critère de Mach) : $\frac{U^2}{c^2} \ll 1$.
- ◆ Que mesure la sonde Pitot ? Elle mesure la vitesse de l'avion par rapport au vent. Comment on fait pour avoir la vitesse du vent alors ? Je sais pas. **Moi non plus.**

Remarques

- ◆ Il serait judicieux de faire une démonstration purement énergétique du théorème de Bernoulli. Il faut quoiqu'il en soit parler d'enthalpie à un moment.
- ◆ Insister sur « baisse de vitesse \Leftrightarrow augmentation de pression » (traduction de Bernoulli).
- ◆ Attention le jury n'aime pas les *nabla* : on évite ~~∇~~ .
- ◆ Il faut montrer plus de photos.
- ◆ On peut parler du paradoxe de d'Alembert.