

LP10 – PHÉNOMÈNES INTERFACIAUX IMPLIQUANT DES FLUIDES

8 février 2017

Noémie Dagès & Clément Gouiller

Il est bizarre ce sol, il est pas palpable...
NUMÉROBIS LE GERRIS

Niveau : L2

Commentaires du jury

Le lien avec les potentiels thermodynamiques n'est pas souvent maîtrisé. Il est important de dégager clairement l'origine microscopique de la tension superficielle. Le jury constate que trop souvent les candidats présentent des schémas où la représentation des interactions remet en cause la stabilité mécanique de l'interface. Le jury apprécie les exposés dans lesquels le/la candidat(e) ne se limite pas à la statique.

Bibliographie

- *Gouttes, bulles, perles et ondes*, De Gennes → Incontournable dans le domaine
- *Hydrodynamique physique*, GHP → Référence générale en méca flux
- *Ce que disent les fluides*, GHP → Exemples d'illustrations, notamment alcoolisées

Prérequis

- Équation de Navier-Stokes, lubrification
- Hydrostatique
- 1er principe et potentiels thermo
- Rayons de courbure

Expériences

- ☞ Le trombone magique
- ☞ Une force linéique
- ☞ Loi de Laplace
- ☞ Loi de Jurin

Table des matières

1	La tension superficielle	2
1.1	Origine microscopique	2
1.2	Définition thermodynamique	2
1.3	Équivalence à une force linéique	2
2	Conséquences fondamentales	3
2.1	Loi de Laplace	3
2.2	Loi de Young-Dupré	3
3	Applications	4
3.1	Ascension capillaire	4
3.2	Imprégnation capillaire	5
3.3	Ondes gravito-capillaires	6

Introduction

Lors des précédentes leçons, nous avons abordé la mécanique des fluides, c'est-à-dire l'étude des comportements des fluides et des forces internes associées. Cependant, rien de ce que nous avons vu pour l'instant ne saurait expliquer cette observation : un trombone flotte sur l'eau, alors que sa densité est plus grande que celle de l'eau : on s'attendrait à ce qu'il coule. Le même type de phénomène permet aux gerris, de petits insectes de flotter sur l'eau, et explique la forme d'un ménisque dans un tube à essai. Tout ceci est dû à ce qu'on appelle la tension superficielle, qui intervient dès qu'il y a une interface entre deux fluides. Quelle est l'origine de cette tension superficielle ? Comment la décrire ? Y-a-t-il d'autres effets que ceux cités précédemment qui en découlent ? Quand doit-elle être prise en compte ? Ce sont autant de questions auxquelles nous allons tâcher de répondre.

1 La tension superficielle

➤ Ondes, bulles, perles et gouttes

1.1 Origine microscopique

Un liquide est un état condensé parce que les molécules qui le constitue s'attirent. Une molécule en plein milieu d'un liquide est en interaction attractive avec toutes ses voisines : son énergie est minimale. Les molécules perdantes à ce petit jeu sont celles à la surface : elles ont 2 fois moins de voisines, et donc une énergie plus grande. C'est pour cette raison qu'un fluide va toujours ajuster sa forme pour exposer le minimum de surface. Un exemple frappant est celui des cheveux qui, mouillés, se rétractent sur eux-même pour minimiser l'interface avec l'air. La tension superficielle quantifie l'énergie que coûte au fluide le fait d'avoir une interface.

1.2 Définition thermodynamique

Étant donné que la présence d'une interface est déstabilisante, il faut fournir un travail δW à l'interface pour qu'elle augmente sa surface A de dA :

$$\delta W = \gamma dA \quad (1)$$

où γ est la tension superficielle, qui s'exprime couramment en mJ/m^2

Même si nous n'allons pas dans la pratique utiliser ce qui suit, il est bien d'avoir en tête le fait que la tension superficielle peut s'écrire comme une dérivée partielle de potentiels thermodynamiques. Par exemple, $dU = TdS - PdV + \gamma dA$ donc $\gamma = (\frac{\partial U}{\partial A})_{S,V}$. Cela nous renseigne quant au signe de γ : pour minimiser son énergie, le fluide tend à minimiser sa surface. On a donc forcément $\gamma > 0$.

OdG

Pour une huile, les interactions entre les molécules sont de l'ordre de $k_B T$. Pour amener une molécule à la surface, il faut donc fournir un travail de $k_B T/2$ puisqu'elle perd la moitié de ses voisines. En faisant cela, l'aire de l'interface augmente de a^2 (surface exposée). On a donc : $\gamma = \frac{k_B T}{2a^2}$. À $25^\circ C$, $k_B T \sim 0.025 eV$ et $a \sim 0.3nm$. Ainsi, $\gamma \sim 20mJ/m^2$, ce qui est du bon ordre de grandeur. Pour l'eau, les liaisons hydrogènes font que les interactions entre les molécules sont plus fortes, et donc il faudra fournir une plus grande énergie pour augmenter l'aire de la surface d'une unité. Cela se traduit par une tension superficielle plus grande : $\gamma_{eau} = 72mJ/m^2$. Cette valeur est correcte pour de l'eau pure, et diminue significativement dès que des impuretés sont présentes.

Une tension superficielle est définie pour une interface entre DEUX fluides. Quand cela n'est pas précisé, le second fluide est en général l'air.

1.3 Équivalence à une force linéique

Existence d'une force capillaire

On plonge le cadre rectangulaire orné d'une tige mobile dans un bain savonneux. Un film est créé de part et d'autre de la tige mobile. On en perce délicatement un, et la tige se met en mouvement pour diminuer la surface restante.

La tension de surface se manifeste donc aussi comme une force, qui est ici uniforme sur la tige. C'est donc une force par unité de longueur. Exprimons la proprement : Entre ses positions x et $x+dx$, la tige a reçu un travail $F_x dx$. L'aire a été réduite de $2Ldx$ (face supérieure et inférieure, correspondant à un gain d'énergie de $2\gamma Ldx$. On identifie :

$$F_x dx = \delta W = \gamma dA = \gamma 2L dx \quad (2)$$

D'où :

$$\gamma = F_x / 2L \quad (3)$$

Dimensionnellement,

on a ici des $N.m^{-1}$, ce qui est bien équivalent à des $J.m^{-2}$

2 Conséquences fondamentales

2.1 Loi de Laplace

✎ GHP p55 Une des conséquences de la tension superficielle est l'apparition d'une différence de pression de part et d'autre d'une surface courbée. Établissons la surpression à l'intérieur d'une goutte. Le rayon de la goutte correspond à un état d'équilibre entre la surpression interne (qui tend à augmenter le rayon) et la tension de surface (qui tente de minimiser l'aire, et par conséquent le rayon). Imaginons un accroissement virtuel dR du rayon R de la goutte sous l'effet d'une différence de pression ΔP . Cette valeur doit être telle que la variation d'énergie totale dW_t soit nulle. dW_t est la somme de :

- un terme de travail des forces de pression $dW_P = -\Delta p dV = -\Delta P 4\pi R^2 dR$
- un terme de travail des forces de tension superficielle : $dW_s = \gamma dA = \gamma 8\pi R dR$

En écrivant que la somme des deux doit être nulle, on obtient :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \quad (4)$$

On voit donc que la surpression est d'autant plus élevée que la goutte est petite. La loi précédente se généralise en :

Loi de Laplace :

$$P_1 - P_2 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (5)$$

est valable pour une surface de séparation quelconque entre deux fluides, et où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de cercles tangents à la surface au point considéré dans deux directions orthogonales. Ils sont algébriques et comptés positivement lorsque le centre de courbure correspondant est situé du côté du fluide (1).

Pour une sphère, $R_1 = R_2 = R$. Pour un cylindre, $R_1 = R$ selon \vec{e}_θ et $R_2 = +\infty$ selon \vec{e}_z

Cela explique pourquoi dans une émulsion, ou encore dans la mousse d'une bière, les petites bulles disparaissent au profit des grosses.

Différence de pression entre deux bulles

Manip décrite dans le TP capillarité, déjà montée au labo. Permet de montrer qu'effectivement, c'est dans une bulle plus petite que la surpression est la plus importante (puisque c'est la petite qui se vide dans la grande et pas l'inverse).

2.2 Loi de Young-Dupré

✎ GHP Une goutte d'eau posée sur du verre très propre s'étale complètement alors que sur du plastique elle garde une allure de goutte aplatie. Il y a donc quelque chose dont nous n'avons pas encore parlé : le mouillage. Posons une goutte d'eau sur un solide en présence d'un gaz. Trois interfaces entrent en jeu, elles se rencontrent le long de la ligne triple. 3 tensions de surface entrent alors en jeu :

- γ_{LS} entre le liquide et le solide
- γ_{GS} entre le gaz et le solide

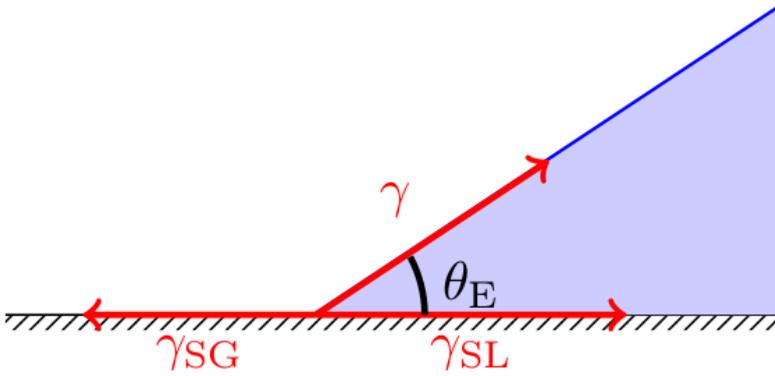


FIGURE 1 – Notations loi de Young-Dupré

- γ pour l'interface liquide/gaz

Si γ_{GS} est plus grande que la somme des 2 autres, alors le liquide va entièrement s'étaler. On parle de mouillage total. Si ce n'est pas le cas, la goutte va former une calotte sphérique. On parle de mouillage partiel. Déterminons l'angle θ que forme le bord de la goutte avec la surface. On écrit la condition d'équilibre des forces pour la ligne triple. Pour les composantes horizontales :

Loi de Young-Dupré

$$\gamma_{LS} + \gamma \cos(\theta) = \gamma_{GS} \quad (6)$$

L'angle de contact ne dépend donc que des 3 phases mises en jeu. Il est très sensible à l'état de la surface (poussière, micro-rayures...)

↓ Nous avons établi des lois, générales, qui permettent de traiter différents phénomènes où la tension superficielle joue un rôle majeur. Nous allons en voir plusieurs, et tout d'abord l'ascension capillaire.

3 Applications

3.1 Ascension capillaire

↯ 3*(Petit machin rond) + ondes

Si un tube de rayon r petit ($\sim 1mm$) est mis en contact avec un liquide mouillant, du liquide s'élève. Nous allons quantifier cette élévation, conséquence de la tension de surface, en réutilisant ce que nous avons appris plus tôt. Sur la situation de la figure, le rayon de courbure du ménisque est r si $\theta = 0$ et $r/\cos(\theta)$ de façon plus générale. La loi de Laplace nous donne donc : $P_A = P_0 - \frac{2\gamma \cos(\theta)}{r}$. D'autre part, les lois de l'hydrostatique donnent : $P_A = P_B - \rho g H = P_0 - \rho g h$ D'où en égalant les deux expressions :

Loi de Jurin :

$$h = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{\rho g r} \quad (7)$$

Il est possible de faire 2 autres démo, en considérant les énergies ou encore les forces et on aboutirait au même résultat.

OdG :

Pour $2 \cos(\theta) \sim 1$, $\gamma \sim 50mJ/m^2$, $\rho \sim 1000kg/m^3$, $g \sim 10m/s^2$ et enfin $r \sim 0.5mm$ on trouve $h \sim 1mm$.

Utilité pratique :

En faisant une jolie droite, on peut mesurer la tension superficielle d'un fluide. ^a

^a. l'agrégatif averti gardera dans sa besace la méthode par arrachement pour les questions

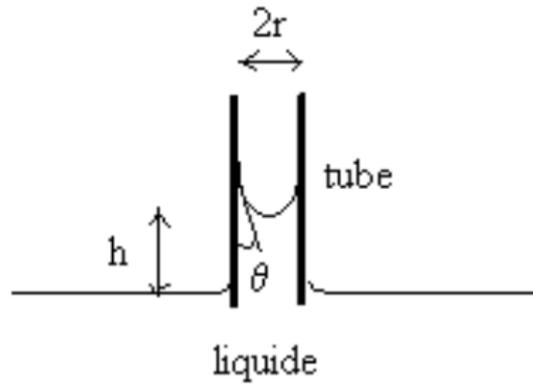


FIGURE 2 – Notations loi de Jurin

Tant qu'on y est...

Vous aurez probablement été perturbés en traçant les isothermes de SF_6 par l'allure du ménisque du mercure qui est lui orienté vers le haut... Il s'agit exactement du même phénomène, sauf que le mercure est non mouillant d'où ce changement de sens.

↓ *Nous n'avons pour l'instant traité que des phénomènes statiques où la tension de surface intervenait... Mais il existe aussi des phénomènes dynamiques où elle a son importance !*

3.2 Imprégnation capillaire

✦ Poly P.Lidon, 2016

Attention !

La partie ci-dessous a été trouvée dans le poly du cours de Capillarité 2016, mais nous n'avons pas trouvé de livre le traitant de cette façon. Seul le De Gennes parle de la loi de Washburn, et elle est obtenue de façon bien plus directe (p118). Voulant ici faire apparaître le caractère dynamique, cette démonstration n'est pas suffisante. Et puisque celle présentée ci-dessous n'utilise rien de trop inhabituel, j'ai fait le choix de la traiter quand même de cette façon, et de compter sur le fait de pouvoir la refaire le jour J sans biblio...

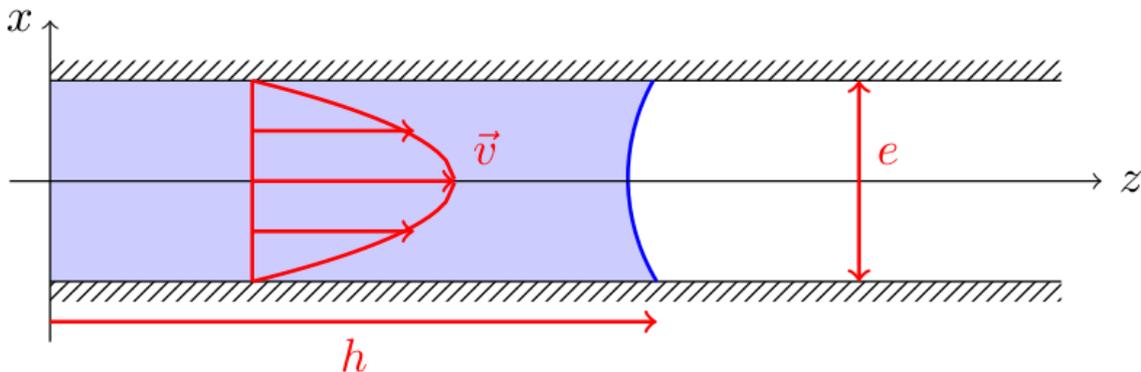


FIGURE 3 – Notations loi de Washburn

Le problème est celui de l'imprégnation d'un fluide entre deux plaques horizontales de largeur w , distantes de $e \ll w$. Trois phénomènes sont considérés : la capillarité, un gradient de pression appliqué entre le réservoir de fluide à la pression atmosphérique et l'interface fluide/air ainsi que les frottements visqueux. En régime stationnaire et à bas Reynolds, l'approximation de lubrification s'applique et l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (8)$$

La vitesse ne dépendant pas de z , le gradient de pression est constant et vaut d'après la loi de Laplace :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P(h(t)) - P(0)}{h(t)} = -\frac{2\gamma \cos \theta}{eh(t)} < 0 \quad (9)$$

Le fluide étant visqueux, les conditions aux limites sont $v(\pm e/2) = 0$. L'intégration de l'équation de Navier-Stokes donne dans ces conditions :

$$v(x) = \frac{\gamma \cos \theta}{\eta e h(t)} \left[\left(\frac{e}{2} \right)^2 - x^2 \right] \quad (10)$$

Le débit volumique vaut donc

$$Q = w \int_{-e/2}^{e/2} v(x) dx = \frac{we^2 \gamma \cos \theta}{6\eta h} \quad (11)$$

D'autre part, $Q = \dot{h}ew$ d'où par unicité du débit :

$$\dot{h} = \frac{e\gamma \cos \theta}{6\eta h} \quad (12)$$

En intégrant avec la condition initiale $h(0) = 0$ on trouve la loi de Washburn :

$$h^2(t) = \frac{e\gamma \cos \theta}{3\eta h} t \quad (13)$$

On observe que la distance d'imprégnation augmente donc comme une racine carrée du temps. Cela est conforme à ce que l'on peut observer par exemple avec une tâche d'huile sur du tissu : elle progresse d'abord très rapidement puis sa vitesse décroît assez vite.

↓ *Nous venons de traiter un cas où la tension superficielle est moteur de l'écoulement, c'est l'affinité entre les parois et le fluide qui est le moteur de l'imprégnation. Dans certaines situations, au contraire, la tension superficielle est responsable de l'amortissement d'une onde. Nous allons ici traiter un cas où tension superficielle et gravité sont en compétition pour amortir la perturbation d'une surface.*

3.3 Ondes gravito-capillaires

⚡ GHP

Nous nous intéressons ici à la perturbation sinusoïdale unidimensionnelle de la surface d'un fluide parfait. Pour revenir à l'équilibre, deux phénomènes entrent en jeu : l'action de la gravité qui s'oppose à la déviation de l'horizontale et l'action de la tension superficielle qui s'oppose à la courbure de l'interface. Nous allons voir que chacun domine dans un régime de nombre d'onde distinct. Par soucis de gain de temps, le calcul ne sera pas détaillé cette année (voir GHP ou poly 2016). Sous condition des hypothèses suivantes : ondes unidimensionnelles de faible amplitude en surface, régime d'eau profonde, fluide parfait et écoulement irrotationnel, on peut montrer qu'on obtient la vitesse de phase :

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \left(1 + \frac{\gamma 4\pi^2}{\lambda^2 \rho g} \right)} \quad (14)$$

On voit que deux termes distincts contribuent. Pour les comparer, il faut comparer λ^2 à $\frac{\gamma}{\rho g}$, c'est-à-dire λ à ce qu'on appelle la longueur capillaire, $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$. Si $\lambda \gg l_c$, les forces gravitaires dominent alors que si $\lambda \ll l_c$ ce sont les forces de capillarité (l'expression de la vitesse ne dépend plus de la pesanteur). La longueur capillaire que nous venons définir est la grandeur usuelle pour comparer les effets de pesanteur et de tension superficielle. Nous l'avons ici fait apparaître via un phénomène dynamique mais elle est aussi présente en statique. Par exemple, l'ascension capillaire (type loi de Jurin) ne se produit que si le diamètre du tube est inférieur à la longueur capillaire du fluide. Pour l'eau, $l_c \sim 3mm$.

Visualisation d'ondes gravito-capillaires

Expérience uniquement qualitative, pour montrer qu'après une excitation 1D on a effectivement un amortissement. Un tel dispositif est capable de donner l'étude expérimentale permettant de vérifier la vitesse de phase aux différentes longueurs d'ondes, mais pas le temps ici.

Retour au trombone...

↓ *Nous venons de définir une longueur, la longueur capillaire à partir de laquelle les effets de tension de surface deviennent négligeables devant le poids... Cela veut dire que la tension de surface est prépondérante pour de petits objets comme.... Le trombone montré en introduction ! La boucle est bouclée :O*

Conclusion

La tension superficielle, conséquence des interactions entre molécules au sein d'un fluide a des conséquences dans des phénomènes que nous observons. Ainsi, elle est responsable de la forme des ménisques, de la flottaison de petits objets ou encore de l'imprégnation entre deux plaques proches. Nous l'avons traité ici comme quelque chose de naturel, présent dans la nature sans que nous ne l'ayons à aucun moment modifié. Est-il possible de l'augmenter, de la diminuer artificiellement ? Y-a-t-il des applications ? Cela pourrait faire l'objet d'une prochaine leçon... (effet Marangoni, tensio-actifs...)

Bonus si en avance : Rayleigh-Plateau

✦ Gouttes, bulles, perles et ondes p108

Nous avons étudié le cas des ondes gravito-capillaires où les forces de capillarité s'opposent à la déformation de la surface, et sont donc stabilisantes. Il existe également des situations dans lesquelles, au contraire, les forces de capillarité déstabilisent un volume de fluide. C'est le cas pour l'instabilité de Rayleigh-Plateau, présentée ci-dessous.

Considérons un cylindre de liquide de rayon R et de longueur L . La déformation de la surface libre crée certes de la courbure selon le plan de coupe, mais les parties qui se rapprochent de l'axe voient leur courbure diminuer dans l'autre direction.

Si le même volume d'eau est morcelé en N gouttes de rayon r , on a alors par conservation du volume d'eau :

$$\pi R^2 L = N \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (15)$$

$$\text{donc } N = 3 \frac{R^2}{4r^3} L.$$

Le rapport de la surface totale à la surface initiale est donc :

$$\frac{S_N}{S_0} = \frac{N 4\pi r^2}{2\pi R L} = \frac{3 \frac{R^2}{4r^3} L 2r^2}{R L} = \frac{3R}{2r} \quad (16)$$

Ainsi, une configuration où les gouttes sont plus grandes que $3R/2$ ($\frac{S_N}{S_0} < 1$) est plus favorable énergétiquement que le cylindre. Ce phénomène est responsable du morcellement en gouttelettes d'un jet cylindrique que l'on peut observer sur un robinet en plaçant sa main à la fin du jet : on sent que le jet frappe régulièrement "par goutte".

Commentaires, questions, paris sur qui de Clément ou Noémie ira le plus loin dans le tournoi de tennis