

LP18 : PHÉNOMÈNES DE TRANSPORT

30/03/2018

Lauren Rose & Léo Mangeolle

Macron, t'es foutu ! Les cheminots sont dans la rue !
#22MARS

Niveau : L2

Bibliographie

- | | |
|--|------------------------|
| ♣ <i>Thermodynamique</i> , DGLR | → Première partie |
| ♣ <i>"Thermodynamique", précis Bréal</i> , Choimet | → Tableau d'analogies |
| ♣ <i>Physique des électrons dans les solides</i> , Alloul | → Modèle microscopique |
| ♣ <i>Hydrodynamique physique</i> , GHP | → Troisième partie |

Prérequis

- Notion de densité de courant
- Écoulements et fluides visqueux
- Modèle de Drude
- Gaz parfait

Expériences

- ☕ Diffusion de quantité de mouvement dans le glycérol
- ☕ Diffusion de l'ammoniac dans un tube
- ☕ Conductisquepe (les 4 petites barrettes avec les cristaux liquides)

Table des matières

1 Généralités sur le transport	2
1.1 Équation de conservation locale	2
1.2 Modes de transport	2
1.3 Réponse linéaire	2
2 Phénomène de diffusion	3
2.1 Équation de diffusion	3
2.2 Analogies et discussion	3
2.3 Modèle microscopique	5
3 Compétition entre les différents modes de transport	6
3.1 Mode de transport dominant	6
3.2 Couches limites	6
3.3 Compétition diffusion/gravité (partie bonus)	7

Introduction

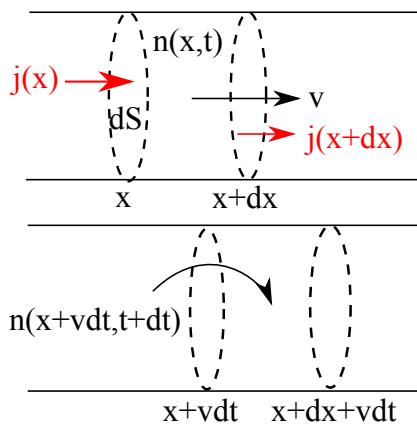
Jusqu'à présent en thermodynamique, on ne s'est intéressé qu'à un état d'équilibre. Or il y a un régime transitoire, avant d'arriver à cet équilibre. C'est le cas pour les phénomènes de transport : une quantité physique qui se conserve et qui se déplace dans l'espace au cours du temps. On va donc étudier quelques phénomènes de transport et définir dans un premier temps l'équation de conservation locale.

I) Généralités sur le transport

1. Équation de conservation locale

⚡ DGLR, p.466

Nous allons raisonner sur le transport de particules.



Soit $n(x, t)$ la concentration de particules (mol/m^{-3}).

Le système subit une translation locale : le milieu se déplace à la vitesse v . À l'instant $t + dt$, la quantité de matière se sera déplacée de vdt . En plus de cette translation, des particules vont traverser les parois de cet élément de volume : on définit ainsi le vecteur densité de courant de particules, $\vec{j}_n(x)$.

- D'une part, on a, par un développement limité sur x : $n(x+vdt, t+dt) = n(x, t+dt) + vdt \frac{\partial n}{\partial x}(t) + vdt^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2 \partial t}(t)$, le dernier terme étant négligeable à l'ordre 1.
- D'autre part, on a, par un bilan : $n(x+vdt, t+dt) = n(x, t) + \frac{dS}{dV} j_n(x) dt - \frac{dS}{dV} j_n(x+dx) dt = n(x, t) - \frac{\partial j_n}{\partial x} \frac{dx}{dV} dt$.

Cela donne l'équation de transport :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_x \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial j_n}{\partial x} = 0,$$

et on peut faire la généralisation à 3D :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})n = D\Delta n. \quad (1)$$

↓ Ceci définit deux modes de transport, notamment.

2. Modes de transport

⚡ DGLR, p.487

- **Advection** : entraînement par le milieu
Ex : touiller sa soupe, convection thermique, ...
- **Diffusion** : déplacement microscopique spontané, sans entraînement par le milieu
Ex : conduction de chaleur dans un matériau solide, ...
- Conduction électrique (*commentaire post-leçon : à développer, analogie et différences avec la diffusion*)

3. Réponse linéaire

⚡ DGLR, p.476

Jusqu'ici, on connaît tous les termes de l'équation sauf le courant. Pour le déterminer, on va tâcher de donner une loi phénoménologique en se fondant sur le fait que $\vec{j}_n$ est la réponse linéaire à une **inhomogénéité** de n .

Loi de **Fick** :

$$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}n} \quad (2)$$

- $D > 0$: coefficient de diffusion
- le $-$ présent dans la loi de Fick caractérise une loi de modération.

Ordres de grandeur pour la diffusion de particules :

✎ **DGLR**, p.481

- $\text{H}_2\text{O}_{(g)}$ dans l'air : $D = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
- Éthanol_(l) dans l'eau liquide : $1.2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
- $\text{C}_{(s)}$ dans $\text{Fe}_{(s)}$ ($T = 500^\circ\text{C}$) : $D = 4.3 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2/\text{s}$.

II) Phénomène de diffusion

1. Équation de diffusion

✎ **DGLR**, p.479

Si on rassemble et qu'on compile les équations 1 et 2, on obtient facilement l'équation dite de diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n. \quad (3)$$

Lors du calcul, on peut se permettre de sortir D de la divergence malgré sa dépendance en n , car on se contente de travailler à l'ordre 1.

C'est une équation **linéaire** et **générale**, qu'on peut retrouver dans de nombreux autres domaines de la physique.



Diffusion de particules gazeuses d'ammoniac



⊙ 2 min

On prend un tube en verre fermé à ses deux extrémités par des bouchons percés dans lequel passe un fil de cuivre (ou peu importe, il sert juste de support), sur lequel on accroche des petits morceaux de papier à la phénolphthaléine. Ces papiers sont blancs dans l'air mais se colorent en rose en milieu basique.

On introduit à l'une des extrémités du tube un coton imbibé dans de l'ammoniac (fameux pour ses propriétés basiques!) et on referme le tube. On observe une coloration des bouts de papier au fur et à mesure de la diffusion du gaz d'ammoniac dans le tube.

2. Analogies et discussion

✎ **Choimet**

Ce phénomène de diffusion existe aussi dans d'autres domaines de la physique, notamment pour les quantités conservées que sont la chaleur et la quantité de mouvement.

	Diffusion de particules	Diffusion thermique	Diffusion de quantité de matière	Conduction électronique
Équation de conservation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_n = 0$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0$	$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{d\vec{F}_t}{ds} \right) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_e = 0$
Loi de réponse linéaire	$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}n}$ Loi de Fick	$\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}T}$ Loi de Fourier	$\frac{d\vec{F}_t}{ds} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x$ Loi de Newton	$\vec{j}_e = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}V}$ Loi d'Ohm
Coefficient de Transport	D (m^2/s) Diffusivité	κ ($\text{W}/\text{m}/\text{K}$) Conductivité thermique	η (Pa.s) Viscosité dynamique	σ (S/m) Conductivité électrique
Coefficient de diffusion	D (m^2/s)	$D_{\text{th}} = \kappa / \rho c$ (m^2/s)	$\nu = \eta / \rho$ (m^2/s)	
Équation de diffusion	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$	$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\text{th}} \Delta T$	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$	



Conductiscope : On place les barrettes de cuivre, aluminium, laiton, fer dans de l'eau bouillante (astucieusement chauffée dans une bouilloire quelques minutes avant, lors de la manip de diffusion de l'ammoniac). On observe un changement de couleurs des cristaux liquides, qui caractérisent la conduction thermique (ils changent de couleur avec la température), et le fait que les métaux ont des conductivités thermiques différentes telles que : $\kappa_{\text{Cu}} > \kappa_{\text{Al}} > \kappa_{\text{laiton}} > \kappa_{\text{Fe}}$.

On observe aussi que le front de température monte rapidement au début, et ralentit au cours de l'ascension. On va voir pourquoi dans la sous-section suivante.



Diffusion de quantité de mouvement dans le glycérol

✎ Rose, Mangeolle *et al.*

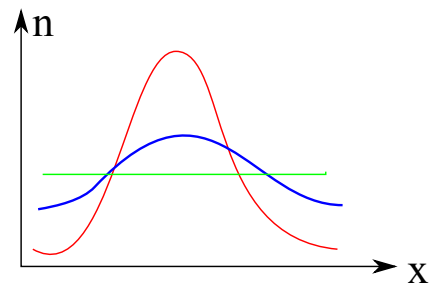
⌚ 3 min

On prend un bécher rempli de glycérol pur avec une tige en verre tenue verticalement au centre du bécher, à l'aide d'une potence et de deux petites pinces. On trace dans le glycérol, avec une pipette et du colorant, un segment. Puis on fait tourner la tige en verre sur elle-même, la trace de colorant formant au fur et à mesure une spirale, du fait de la diffusion de quantité de mouvement le long d'un rayon. Le tout est observé à l'aide d'une *flexcam* et projeté à l'écran.

Il faut mentionner ici (à moins qu'il ne faille justement l'éviter ?) que traditionnellement les écoulements visqueux sont considérés comme réversibles, alors que la diffusion n'est pas censée l'être. Damned. L'astuce est qu'on dit ça pour les écoulements de Stokes en régime **permanent**, c'est-à-dire une fois que la quantité de mouvement s'est diffusée dans tout l'écoulement. Pour constater l'irréversibilité, il ne s'agit donc pas de tourner la tige dans l'autre sens, ce qui reviendrait dans le cas de la chaleur à inverser les bornes chaude et froide, et ne nous avancerait guère. Ce qui est irréversible, c'est bien : lorsque l'on tourne la tige à vitesse constante, au début seules les couches proches de la tige bougent, puis un régime permanent s'établit dans le glycérol, et une fois que ce régime permanent est établi et à supposer que l'on continue de tourner uniformément la tige, le profil des vitesses restera en l'état et ne reviendra pas spontanément à son état initial, où seules les couches très proches de la tige sont en mouvement.

Discussion :

- C'est une équation irréversible : en effet si on échange t par $-t$, on ne retrouve pas la même équation ! (d'où, peut-être, l'intérêt de ne pas en parler pour la quantité de mouvement, d'une part parce que c'est assez subtil, et d'autre part parce que ça arrive après la partie "analogies" et pas avant)
- Cette équation caractérise effectivement un phénomène d'homogénéisation. En effet, si on observe la concavité de la courbe rouge à t_0 ci-contre, qui indique le signe de Δn , cela nous renseigne sur le signe de $\frac{\partial n}{\partial t}$. Au centre de la courbe, $\Delta n < 0$, on a donc une diminution du nombre de particules, tandis que sur les côtés de la courbe, on a une augmentation du nombre de particules. Cela donne la courbe bleue à t_1 . À $t \rightarrow \infty$, on a la courbe verte.
- Évolution en temps : $\frac{1}{t} \sim \frac{D}{\Delta x^2}$. Soit $\Delta x \propto \sqrt{Dt}$.



Application

Diffusion de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = D_{th} \Delta T$.

Soit une barre de Cuivre de taille l . On cherche le temps typique de propagation de la chaleur dans toute la barre de cuivre, soit : $\tau = \frac{l^2}{D}$.

AN : $D(\text{Cu}) = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ (✎ DGLR, p.492)

et $l = 15 \text{ cm}$ / On trouve $\tau = 200 \text{ s}$, ce qui correspond grosso modo à ce qu'on a observé avec la barrette en cuivre. On peut aussi remarquer que le coeff de diffusivité thermique du cuivre vaut 5 fois le coeff de diffusion de l'eau dans l'air, d'où (en approximant l'ammoniac par de l'eau, ce que les chimistes apprécieront) une durée de 15 minutes pour l'expérience avec l'ammoniac, ce qui est à nouveau cohérent. Vous pouvez prendre le risque de le dire, ou pas.

Autre application

En régime variable cette fois-ci, de fréquence f connue, on cherche à déterminer sur quelle longueur les oscillations se propagent (effet de peau thermique). Réponse : $\delta = \sqrt{D/f}$.

AN : $D(\text{sol}) = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ (⚡ **Calecki-DGLR**, p.362

et $1/f = 365$ jours. On trouve $\delta = 3.9$ m. Application : les caves.

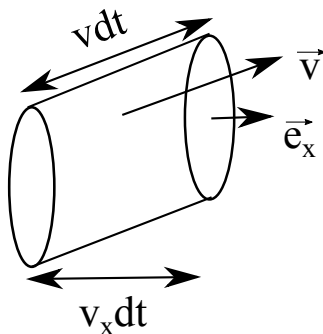
On a vu une application macroscopique de lois phénoménologiques de diffusion. On va maintenant essayer de retrouver ces lois à partir d'un modèle microscopique.

3. Modèle microscopique

⚡ **Alloul**, p.113

On considère pour cette discussion un gaz parfait d'électrons dans un métal. Nous allons donc essayer de retrouver la loi de Fourier, dans le cas de la chaleur. On va faire quelques hypothèses :

- Les chocs des électrons avec le réseau de cations fixes se font avec un temps τ en moyenne.
- Les vitesses des électrons sont aléatoires de distribution $\rho(\vec{v})$
- On a une thermalisation des électrons à chaque collision



Nombre d'électrons traversant la surface dS par unité de temps dt : $nv_x dt dS \rho(\vec{v})$. On note u l'énergie des électrons. La variation d'énergie par électron vaut donc :

$$\Delta u = \frac{du}{dx} v_x \tau = v_x \tau \frac{du}{dT} \frac{dT}{dx} = v_x \tau c \frac{dT}{dx},$$

en posant c la capacité calorifique d'un électron (ou la chaleur spécifique d'un électron).

$$\text{On trouve : } \vec{j}_u = - \int d^3 \vec{v} v_x \rho(\vec{v}) v_x \tau c \frac{dT}{dx} n dtdS$$

$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} v_*^2$

$$\text{Soit : } \kappa = \frac{1}{3} v_*^2 \tau c n \quad \text{et} \quad \vec{j}_u = -\kappa \vec{\text{grad}} T$$

On a effectivement retrouvé la loi de Fourier. Cependant, κ est exprimée en fonction de paramètres qu'on ne connaît pas. On va donc faire quelques hypothèses supplémentaires :

On considère un GP monoatomique classique (hypothèse audacieuse, je vous l'accorde). Cela nous donne donc $v_* = \frac{3k_B T}{m}$ et $c = \frac{3}{2} k_B$. On a donc : $\kappa = \frac{3}{2} \frac{n}{m} k_B^2 \tau T$.

On utilise aussi le modèle de Drude (d'où, peut-être, l'intérêt de parler de la conduction électrique dans le tableau d'analogies, même si justement l'analogie s'arrête prématurément). Dans les hypothèses classiques, on peut définir la conductivité électronique $\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m}$.

Deux choses à noter ici : d'une part, dans les deux cas on a un τ mystérieux dont on aimerait se débarrasser ; d'autre part, l'expérience (cf tableau ci-dessous) montre que les bons conducteurs électriques sont aussi de bons conducteurs de chaleur. On doit pouvoir faire quelque chose.

⚡ **Alloul**, p.115

	$\sigma (10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1})$	$\kappa (10^2 \text{ W/m/K})$	$\mathcal{L} (10^{-8} \text{ W/}\Omega/\text{K}^2)$
Cu	6.45	3.85	2.18
Mg	2.54	1.5	2.16
Pb	0.52	0.35	2.46

Hé oui ! On trouve la loi de **Wiedemann-Franz** :

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T = \mathcal{L} T.$$

Cette variation linéaire en T du rapport κ/σ est trouvée indépendante du métal avec une valeur de la constante de proportionnalité, appelée **nombre de Lorentz**, qui vaut : $\mathcal{L} = 1.12 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega / \text{K}^2$. Notons aussi que nous avons raison de prendre des pincettes au moment de sortir D (analogue de κ pour la diffusion de particules) de la divergence, puisque manifestement κ dépend de la température.

Cette loi de Wiedemann-Franz est bien vérifiée expérimentalement, cependant la vraie valeur de $\mathcal{L}$ n'est pas celle-là (il faut rajouter un petit préfacteur), erreur principalement due au fait qu'on a considéré un modèle classique, au lieu du modèle plus réaliste de Sommerfeld (cf LP47 pour plus de détails).

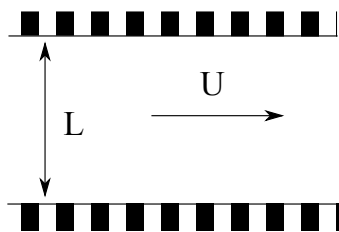
On peut se demander ce qu'il se passe lorsqu'on a à la fois de la diffusion et de l'advection et regarder quel phénomène domine l'autre.

III) Compétition entre les différents modes de transport

1. Mode de transport dominant

⚡ GHP, p.74-79

On va comparer qui de la diffusion ou de l'advection va dominer dans un même phénomène.



Transport de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})T}_{\text{advection: } UT/L} = \underbrace{D \Delta T}_{\text{diffusion: } D_{\text{th}} T / L^2}$$

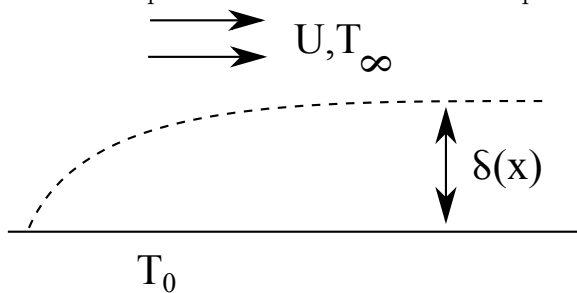
On compare les terme d'advection et de diffusion : $\frac{\text{advection}}{\text{diffusion}} = \frac{UL}{D_{\text{th}}} = \text{Pe}_{\theta}$, le nombre de Péclet thermique.

Dans le cas du transport de quantité de mouvement, par un raisonnement similaire, on retrouve : $\frac{UL}{\nu} = \text{Re}$, le nombre de **Reynolds**.

2. Couches limites

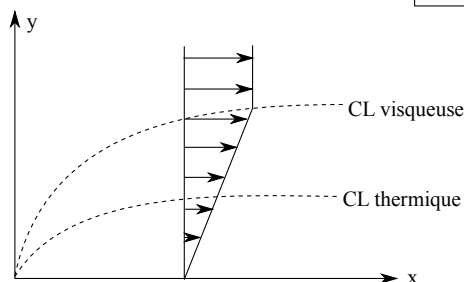
⚡ GHP, chap. 10

On peut aussi comparer les couches limites thermique et visqueuse.



- Couche limite visqueuse : $\delta_v(t) = \sqrt{\nu t}$. Soit : $\delta_v(x) = \sqrt{\nu x / U}$
- Couche limite thermique : $\delta_{\theta}(t) = \sqrt{D_{\text{th}} t}$. Soit : $\delta_{\theta}(x) = \sqrt{D_{\text{th}} x / v_{\text{lim}}}$.

On définit ensuite le nombre de **Prandtl** : $\text{Pr} = \frac{\nu}{D_{\text{th}}}$.



- $\text{Pr} \ll 1$: $v_{\text{lim}} = U \Rightarrow \delta_{\theta}(x) = \sqrt{\frac{D_{\text{th}} x}{U}}$.
- $\text{Pr} \gg 1$: $v_{\text{lim}} = \frac{\delta_{\theta}}{\delta_v} U \Rightarrow \left(\frac{\delta_{\theta}}{\delta_v} \right)^3 = \frac{D_{\text{th}}}{\nu} = \frac{1}{\text{Pr}}$

Cette dernière formule est intéressante puisqu'elle nous dit que pour des nombres de Prandtl voisins de 1 (comme c'est le cas pour l'air), les deux couches limites sont en gros de la même épaisseur, et la couche limite thermique est

"piégée" dans la couche limite visqueuse. Ainsi, pour refroidir mon assiette de soupe, je veux réduire la couche limite thermique, et pour cela il me suffit de réduire la couche limite visqueuse (puisque l'une agit sur l'autre), ce que je fais en soufflant sur ma soupe. Cette parenthèse "vie pratique" est dédiée à Aude Caussariou.

3. Compétition diffusion/gravité (partie bonus)

♣ **Calecki-DGLR**, exo IX.4

Note : Léo en a eu besoin pour occuper les 4 dernières minutes, mais en détaillant plus la partie sur la conduction électrique vous devriez ne pas en avoir besoin. La version hardcore avec les potentiels chimiques dans les semi-conducteurs est dans le DGLR.

L'idée de cette partie facultative est d'être le pendant de la partie sur Wiedemann-Franz, où on a montré qu'un phénomène de transport diffusif (la diffusion thermique) pouvait être couplé positivement à un transport non diffusif (les électrons). Non diffusif car il y a un terme de forçage extérieur (le potentiel V), non lié à une inhomogénéité de la densité de charge, et puis plus simplement parce que l'équation de transport des électrons n'est pas l'équation de la chaleur. Ici, au contraire, les deux phénomènes (diffusion de particules d'une part, transport avec forçage gravifique - et pourquoi pas ? - d'autre part) vont se compenser et aboutir à un phénomène bien connu, l'équilibre de l'atmosphère isotherme. On rappelle sa formule : $n(z) = n_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}}$. Clairement $n(z)$ est inhomogène, donc il y a diffusion vers le haut, de courant $\vec{j}_{\text{diff}} = -D \text{grad} n = \frac{DMg}{RT} n(z) \vec{u}_z$.

D'autre part les molécules tombent, en subissant toutefois un frottement fluide : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \vec{v} + m \vec{g}$ d'où en régime permanent $\vec{v} = -\mu g \vec{u}_z$ où $\mu = \alpha/m$ est la mobilité (terme qui vous évoquera peut-être un vague souvenir de cours sur les semi-conducteurs, non sans raison). Le courant de particules qui tombent est $\vec{j}_{\text{grav}} = -n \mu g \vec{u}_z$.

À l'équilibre, les deux flux se compensent, d'où $\frac{DMg}{RT} n = n \mu g$, miraculeusement n et g disparaissent et on tombe sur une formule très générale, la relation d'Einstein (Sutherland 1904, Einstein 1905, Smoluchowski 1906 et désolé pour les non-Einstein de la liste) : $\frac{D}{\mu} = \frac{RT}{M}$ où on retrouve bien en haut les termes de diffusion/agitation, en bas les termes de forçage/gravité.

Conclusion

Ce qu'on a essayé de dégager dans cette leçon, c'est que plusieurs phénomènes de transport peuvent être gouvernés par la même équation (l'équation de diffusion), mais que d'autres modes de transport existent, comme l'advection ou la conduction électrique. Elles peuvent être corrélées positivement (par exemple les métaux qui conduisent bien l'électricité conduisent aussi bien la chaleur), ou entrer en compétition comme on l'a vu avec la discussion des couches limites, laquelle nous a aussi montré que parfois les transports de plusieurs grandeurs peuvent aller de pair (cf Pr ≈ 1), et peut-être avec la partie bonus si vous allez vite. En ouverture, citons un mode de transport que nous avons honteusement passé sous silence mais que la LP19 se chargera de venger : le rayonnement.

Questions, commentaires, brouillon...