LP 19 - Bilans thermiques : flux conductifs, convectifs, radiatifs

30 mars 2018

Tristan Guyomar & Ugo Petrone

slt là
QUENTIN AMET

Niveau : L2

Commentaires du jury

2017 : Il ne faut pas oublier de faire des bilans thermiques dans cette leçon qui ne consiste pas en un catalogue des divers flux.
2016 : Le jury attend un bilan mettant en oeuvre les divers types de flux.
Jusqu'en 2015, le titre était : Flux conductifs, convectifs, radiatifs, bilans thermiques.
2015 : Le traitement d'au moins un exemple mettant en jeu plusieurs mécanismes de transferts thermiques est l'un des objectifs de cette leçon.

Bibliographie

✍ *Tout-En-Un PC/PC**, **Sanz** ⟶ La base sur la conduction thermique et le rayonnement, avec quelques subtilités importantes pour les questions

✍ *Ondes Mécaniques et Diffusion*, **Garing** ⟶ Exemple de la conduction dans le sol

✍ *Physique PC-PC**, **Stéphane Olivier** ⟶ l'exemple de l'ailette de refroidissement et les développements déjà présents dans le Sanz y sont, c ui

Prérequis

- Corps noir
- Premier principe de la thermodynamique
- Loi de Fourier

Expériences

- ui bjr

Table des matières

Introduction

Jusqu'à présent, on a étudié en thermodynamique des transferts thermiques entre deux états d'équilibre. On introduit ici l'étude de systèmes hors de l'équilibre thermodynamique : on va ainsi pouvoir considérer la variable temporelle dans nos problèmes et faire des bilans à l'aide de la notion de **flux**.

1 Généralités et cadre de l'étude

1.1 Équilibre thermodynamique local

Dans les cours précédents, on a défini trois différentes échelles : microscopique (dont la taille caractéristique est la distance entre particules dans un gaz ; $\delta \sim 10^{-10}$m), macroscopique (dont la taille caractéristique est la taille du système étudié $L \sim 1$m) et mésoscopique (dont la taille caractéristique est très grande devant δ et très petite devant L). Dans notre cas, le système macroscopique n'est pas à l'équilibre thermodynamique mais on peut le diviser en sous-systèmes de taille mésoscopique pour lesquels une variable d'état Y a une valeur bien définie : cela constitue l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local.

1.2 Les différents modes de transfert thermique

✍ Sanz

Il existe trois modes de transfert thermique :

- **La conduction thermique** : c'est un transport d'énergie à travers un milieu matériel sans déplacement macroscopique de la matière. Ce transport est dû à l'agitation thermique des particules microscopiques ; au cours des chocs, les particules des zones chaudes cèdent de l'énergie aux particules des zones froides. Ce transfert thermique apparaît par exemple dans le fond d'une casserole ou à travers les murs d'une maison.
- **La convection thermique** : c'est un transfert thermique dû à un déplacement de matière ; par exemple, un fluide en mouvement transporte son énergie interne. On parle de convection naturelle quand le mouvement de fluide apparaît spontanément à cause des inégalités de température, notamment dans casserole d'eau bouillante chauffée par le bas. On parle de convection forcée lorsque le mouvement du fluide est provoqué par une cause extérieure, par exemple dans des circuits de refroidissement.
- **Le rayonnement** : c'est un transfert d'énergie à travers un milieu transparent par l'intermédiaire d'un rayonnement électromagnétique. C'est le seul type de transfert pouvant exister dans le vide. Lorsque l'on se chauffe au Soleil ou devant un feu de cheminée, on reçoit un transfert thermique radiatif.

2 Conduction thermique et bilans

2.1 Point sur les bilans énergétiques

On effectue ici un bilan énergétique sur un système fermé Σ à frontière fixe, de telle sorte qu'il ne reçoive aucun travail mécanique. Le premier principe appliqué à Σ entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit :

$$U_\Sigma(t + \mathrm{d}t) - U_\Sigma(t) = \mathrm{d}U_\Sigma = \delta Q\mathrm{ext} + \mathcal{P}_{\mathrm{prod}}\mathrm{d}t$$

On peut mettre ce bilan sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}U_\Sigma}{\mathrm{d}t} = \oiint_{P\in S} \phi_{\mathrm{ext}}(P,t)\mathrm{d}S_p + \iiint_{M\in V} \mathcal{P}_V(M,t)\mathrm{d}\tau_M$$

Cette équation représente donc un bilan énergétique car elle s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{STOCKAGE} = \mathrm{TRANSFERT} + \mathrm{PRODUCTION}$$

2.2 Bilan thermique

La quantité de chaleur δQ qui traverse une surface orientée $\mathrm{d}\vec{S}$ pendant un temps $\mathrm{d}t$ est liée au vecteur densité de courant thermique $\vec{j_Q}$:

$$\delta Q = \vec{j_Q}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\mathrm{d}t$$

La loi de Fourier, établie en 1807, relie le vecteur densité de courant thermique et le gradient du champ de température $T(M,t)$:

$$\vec{j_Q}(M,t) = -\lambda \vec{grad} T(M,t)$$

où λ est la conductivité thermique, exprimée en W.m^{-1}.K^{-1}.

La loi de Fourier est une loi phénomologique et ne repose pas sur des fondements théoriques. De plus, elle n'est pas applicable dans tous les cas : il ne faut pas que le gradient thermique soit trop fort, varie trop rapidement dans le temps et on considère ici un milieu homogène et isotrope.
On peut comparer les ordres de grandeur de conductivité thermique de différents matériaux, en figure 1.

Figure 1 – Tableau récapitulatif de différentes conductivités thermiques pour différents matériaux

Matériau	λ à 300K en W.m^{-1}.K^{-1}
Cuivre	400
Acier	50
Béton	1
Eau	0,6
Air (sous $P = 10^5$Pa	2,6 $\times 10^{-2}$

Procédons maintenant au bilan thermique à trois dimensions, pour un milieu isotrope homogène, de masse volumique ρ, de capacité thermique c. On reprend le bilan énergétique établi en **2.2**, cette fois-ci sur un volume élémentaire dτ.
La variation d'énergie interne du système entre t et $t + \mathrm{d}t$ est :

$$\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t) = \delta mc(T(M,t+\mathrm{d}t) - T(M,t)) = \rho c \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le transfert thermique total reçu par le système s'écrit :

$$\delta Q = -\mathrm{div} \vec{j_Q}(M,t) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$$

L'énergie produite dans le système est :

$$\mathcal{P}_{\text{prod}} = \mathcal{P}_V \mathrm{d}\tau$$

L'équation locale traduisant le bilan énergétique s'écrit donc :

$$\rho c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M,t) + \mathcal{P}_V(M,t)$$

2.3 Exemple : la conduction dans le sol

✍ Garing, Ondes Mécaniques et Diffusion et Sanz On cherche ici à connaître la profondeur adéquate à laquelle placer une cave pour éviter que les variations saisonnières de température viennent perturber la température de la cave. Le même problème se pose pour des canalisations, on cherche à éviter le gel dû aux variations journalières de température.
On assimile le sol terrestre à un demi-espace (x>0) homogène de masse volumique ρ, de chaleur massique c et de conductivité thermique λ. On note $T(x,t)$ la température à la date t et à la profondeur x. On suppose que la température à la surface du sol suit la loi : $T(0,t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$. On admet qu'à grande profondeur, la température du sol tend vers la moyenne annuelle $T(\infty, t) = T_0$. On considère finalement qu'il n'y a pas d'énergie produite dans le domaine étudié.
L'équation de diffusion vérifiée par la température est donc :

$$D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.
On pose $\Theta(x,t) = T(x,t) - T_0$ et on passe en notations complexes : $\Theta(x,t) = \mathrm{Re}(\underline{f}(x) \exp(i\omega t))$. L'équation caractéristique de l'équation précédente a pour solutions :

$$r = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$\underline{f}(x) = \underline{\alpha}\exp\left(-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right) + \underline{\beta}\exp\left((1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right)$$

Or T ne tend pas vers l'infini quand x augmente et $\underline{\Theta}(0,t) = T_1\cos(\omega t)$ donc :

$$\underline{\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\alpha} = T_1$$

On obtient finalement :

$$T(x,t) = T_0 + T_1\exp\left(\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

On note que la distance caractéristique d'atténuation δ diminue avec ω : plus les variations de température sont rapides et moins elles se propagent loin. Si $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période de l'onde, on peut alors écrire $\delta = \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}$.
Le sol a une diffusivité thermique moyenne $D_{\text{sol}} = 6,5\times 10^{-7}\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.
Pour t =1 an, la distance caractéristique est donc de : $\delta = 2,5$ m. Si on veut creuser une cave de telle sorte que les variations annuelles de température aient une amplitude inférieure à 2° C, il faut que : $|T_1\exp(-x_0/\delta)| < 2$, soit : $x_0 > \delta\ln(20/2) \sim 6$ m.
Pour t =1 jour, la distance caractéristique d'atténuation est de : $\delta = 14$ cm. En enterrant les canalisations d'eau à 1m de profondeur, on divise l'amplitude des variations diurnes de température est divisée par 10^3 environ, ce qui les préserve du gel.

3 Bilan thermique avec flux convectif

3.1 Loi de refroidissement de Newton

Lorsque l'on étudie des fluides, la convection est généralement plus importante que la conduction. Ce phénomène n'est pas linéaire mais on peut l'approximer à l'aide de la loi de refroidissement de Newton. Cette loi relie le vecteur densité de courant thermique à la différence de température de surface du solide T_s et celle du fluide T_f :

$$\vec{j_Q} = h(T_s - T_f)\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface solide et h le coefficient de transfert thermique qui s'exprime en W.m^{-2}.K^{-1}.

3.2 Exemple : ailette de refroidissement

Pour évacuer la chaleur d'une source vers l'atmosphère, on a souvent recours à un dispositif appelé ailette de refroidissement, de section S, de périmètre p, de coefficient d'échange convectif h, de conductivité thermique λ. On considère ici que ce dispositif ne génère aucune puissance thermique. Le bilan thermique en régime permanent est donc :

$$\text{BILAN CONDUCTIF} = \text{PERTE CONVECTIVE}$$

donc

$$\Phi(x) - \Phi(x+\mathrm{d}x) = hp\mathrm{d}x(T(x) - T_f) \Leftrightarrow \left[-\lambda\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}s\right] - \left[-\lambda\frac{\mathrm{d}T(x+\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x}s\right] = hp\mathrm{d}x(T(x) - T_f)$$

raouter flux de l'ailette

On aboutit donc à l'équation de l'ailette :

$$\delta^2\frac{\mathrm{d}^2T(x)}{\mathrm{d}x^2} + T(x) = T_f \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda s}{hp}}$$

On suppose que $T(x\to\infty) = T_f$ et $T(x=0) = T_0$. La solution de cette équation est :

$$T(x) = T_f + (T_0 - T_f)\exp(-x/\delta)$$

On compare maintenant le flux de chaleur avec et sans ailette. On a :

$$\begin{cases} \Phi_{avec} = \lambda \frac{bc}{a}(T_0 - T_f) \\ \Phi_{sans} = hbc(T_0 - T_f) \end{cases}$$

Ainsi, le rapport entre ces deux flux vaut : $\frac{\Phi_{avec}}{\Phi_{sans}} = \frac{\lambda}{ha} \sim 50$ pour l'aluminium. Le flux avec ailette est donc 50 fois plus important que le flux sans ailette, ce qui montre bien l'importance d'une ailette de refroidissement sur les processeurs des ordinateurs.

4 Bilan thermique avec flux radiatif

4.1 Loi de Planck et loi de Stefan-Boltzmann

✍ Sanz

Après avoir étudié des transferts thermiques à support matériel, on s'intéresse maintenant aux flux radiatifs. En 1900, Planck propose une loi donnant la densité spectrale d'énergie volumique à la température T :

$$u^0_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

Cette loi introduit notamment le quantum d'énergie $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$. On retrouve grâce à cette loi la relation entre l'expression du flux surfacique de rayonnement d'équilibre :

$$\phi^0(T) = \frac{c}{4}\int_0^\infty u^0(\lambda, T)\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}\mathrm{d}\lambda$$

On retrouve ici la loi de Stefan-Boltzmann, établie expérimentalement en 1879 par Stefan et justifiée théoriquement par Boltzmann en 1884 :

$$\phi^0(T) = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}T^4 = \sigma T^4 \quad \text{où} \quad \sigma = 5,670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$$

On peut noter que le flux surfacique émis par un corps noir est égal au rayonnement d'équilibre thermique présenté précédemment et vaut :

$$\phi_e^{CN} = \phi^0(T) = \sigma T^4$$

Finalement, la loi du déplacement de Wien donne la longueur d'onde λ_m pour laquelle l'énergie volumique est maximale :

$$\lambda_m T = 2898\ \mu\mathrm{m.K}$$

4.2 Exemple de bilan thermique avec flux radiatif : température d'équilibre de la Terre

✍ Sanz

On étudie l'équilibre thermique radiatif de la Terre. En première approximation, la température de surface résulte de l'équilibre entre le rayonnement reçu du Soleil et le rayonnement produit par la Terre. De plus, la Terre réfléchit une partie de l'énergie reçue par le Soleil (on appelle cette fraction réfléchie l'albedo, notée A) et absorbe le reste. Le rayon du Soleil est $R_S = 7,0 \times 10^5$km et sa température surfacique est $T_S = 5800$K. La puissance totale rayonnée par le Soleil est donc :

$$\mathcal{P}_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$$

La terre reçoit la puissance surfacique :

$$\mathcal{P}_{surf} = \frac{\mathcal{P}_S}{4\pi d_{TS}^2} \quad \text{où} \quad d_{TS} = 1,5 \times 10^{11}\ \text{m est la distance Terre-Soleil}$$

En supposant que les rayons solaires arrivent parralèles entre eux au niveau de la Terre (légitime compte tenu de la distance importante entre la Terre et le Soleil), on peut considérer que la terre reçoit la même puissance que celle d'un disque de rayon R_T (le rayon de la Terre) placé perpendiculairement à l'axe Terre-Soleil. La puissance reçue par la Terre est donc :

$$\mathcal{P} = \sigma T_S^4 \pi \frac{R_T^2 R_S^2}{d_{TS}^2} = 1,8 \times 10^{17}\ \mathrm{W} \quad \text{soit un flux égal à} \quad \Phi = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R_T^2} = 1,4\ \mathrm{kW.m^{-2}}$$

Comme on l'a dit précédemment, la Terre réfléchit une partie A de la puissance $\mathcal{P}$ qu'elle reçoit. Elle réemet la puissance $\mathcal{P}_{émis} = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2$, où T_0 est la température de surface recherchée. On a donc :

$$(1-A)\mathcal{P} = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2 \Leftrightarrow T_0 = (1-A)^{1/4}\sqrt{\frac{R_S}{2d_{TS}}}T_S$$

La valeur moyenne de l'albedo est de $0,31$, ce qui donne une température de surface égale à $T_0 = 255$ K. Cette valeur est trop faible : il faut prendre en compte la présence de l'atmosphère.

On assimile l'atmosphère de la Terre à une couche sphérique de centre confondu avec celui de la Terre et d'épaisseur $e \sim 30$ km $\ll R_T$.
La longueur d'onde d'émission maximale du Soleil est donnée par la loi de Wien et vaut : $\lambda_m \sim 500$ nm. En considérant que la température de surface recherchée doit être de l'ordre de 300 K, la longueur d'onde maximale d'émission de la Terre est de l'ordre de 10 μm. Ces deux longueurs étant très différentes, on peut faire les hypothèses suivantes :

- l'atmosphère laisse passer une grande partie du rayonnement solaire, on supposera en premier lieu qu'elle le transmet intégralement.
- l'atmosphère absorbe complètement le rayonnement de la Terre, notamment à cause de l'eau présente qui absorbe les rayonnements dans la gamme de longueurs d'onde rayonnées par la Terre.

On note T_0 et T_1 les températures respectives de la Terre et de l'atmosphère, supposées uniformes et on considère que l'albedo est le même que celui introduit précédemment. Les bilans thermiques ,respectivement pour l'ensemble du système {Terre+atmosphère} et pour la Terre, sont :

$$\begin{cases}(1-A)\mathcal{P} = \sigma T_1^4 4\pi R_T^2 \\ (1-A)\mathcal{P} + \sigma T_1^4 4\pi R_T^2 = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2\end{cases}$$

La résolution de ce système donne $T_1 = 255$ K et $T_0 = 2^{1/4}T_1 = 303$ K. Cette valeur de température est trop élevée.

Il faut en réalité améliorer ce modèle. En effet, la Terre n'est pas totalement transparente au rayonnement solaire : une partie du rayonnement ultraviolet est absorbé par l'ozone stratosphérique et une partie du rayonnement infrarouge est absorbé par l'eau.
On suppose donc que l'atmosphère absorbe une fraction α du rayonnement solaire et donc que la Terre absorbe la fraction $1-\alpha$ du même rayonnement. Le bilan énergétique de l'ensemble du système est inchangé mais le bilan de la Terre devient alors :

$$(1-A)(1-\alpha)\mathcal{P} + \sigma T_1^4 4\pi R_T^2 = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2$$

ce qui donne une température de surface de $T_0 = 290$ K, soit 17° C, ce qui est beaucoup plus satisfaisant.
On peut encore affiner ce modèle sur deux points principaux :

- l'atmosphère n'est pas totalement opaque au rayonnement terrestre.
- la surface de la Terre ne fait pas qu'émettre simplement du rayonnement, une partie de l'énergie thermique reçue sert à l'évaporation des océans et est ensuite restituée lors de la condensation de la vapeur d'eau en altitude

Conclusion

On a donc présenté les trois principaux flux thermiques que sont les flux conductifs, convectifs et radiatifs. Dans certaines situations, plusieurs types de flux sont présents en même temps, notamment dans l'exemple de l'ailette de refroidissement. En faisant des bilans thermiques, on aboutit aux équations de diffusion de la température.