LP20 : Induction Electromagnétique.

Nicolas Vitrant et Selim Touati

11/10/2013

Bibliographie

- Cours de Physique de Feynman : Électromagnétisme (tome 1) [1]
- Dunod Physique PC-PC* [2]
- Tec&Doc Physique PC-PC* [3]

Prérequis

Électromagnétisme :
- Équations de Maxwell
- ARQS
- Potentiels électromagnétique
- Loi d'Ohm locale
- Force de Lorentz et Loi de Laplace

Table des matières

introduction

En approchant une boussole d'un fil électrique, Oersted découvre en 1820 l'existence d'un champ magnétique généré par un courant électrique, auquel Biot et Savart donneront la même année une expression analytique.

En 1831, Michael Faraday tente d'observer un courant électrique généré par un champ magnétique, à l'aide de deux bobines enroulées sur le même axe. S'il n'observe pas l'effet attendu, il remarque cependant un tressautement de l'aiguille de son galvanomètre lors de l'établissement du courant dans une des bobines. Après une longue série d'expériences il énonce la loi de Faraday, qui décrit l'apparition d'une force électromotrice le long d'un circuit fermé, proportionnelle à la variation du flux de champ électromagnétique à travers le circuit : $e = k\frac{d\phi}{dt}$.

La loi de Lenz (1834), qui stipule que les effets des phénomènes d'induction tendent à s'opposer aux causes qui leurs ont donnée naissance, fixe le signe de la constante k. Sa valeur ne dépend alors que du choix d'unité, et on a $|k| = 1$ dans le système d'unité usuel.

Nous allons maintenant tenter de donner un cadre d'application à cette loi, et une démonstration de sa validité à partir des équations de Maxwell.

1 Modèle et conventions

1.1 Hypothèses de travail et conventions d'orientation

On se placera tout au long de cette leçon dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires, et dans une approximation non-relativiste. On suppose également les effets des charges négligeables devant ceux des courants (ARQS magnétique).

Dans toute la première partie, nous ne nous intéresserons qu'a des circuits filiformes fermés.

Afin de traiter le courant électrique comme une grandeur algébrique, il est nécessaire de donner un sens de parcours au circuit en question. De même, il faut orienter une surface pour pouvoir définir le flux du champ magnétique à travers celle-ci. Ces deux choix sont cependant liés par la définition du rotationnel, et le respect de la convention dite “de la main droite” est nécessaire à l'écriture du théorème de Stokes. Il s'agit également de la convention de vissage (la surface est dirigée vers l'avant, lorsque le circuit est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre).

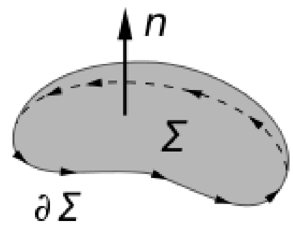

FIGURE 1 – Convention d'orientation des circuits fermés

1.2 Champ électromoteur

La force électromotrice (f.e.m) est définie comme la quantité de travail fourni à un porteur de charge par le champ électromagnétique, le long d'un parcours

$\mathcal{C}$, par unité de charge.

La force de Lorentz a pour expression :

$$\vec{F}_{EM} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Le travail reçu par une charge q parcourant $\mathcal{C}$ est alors :

$$W_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_{EM}.\vec{dl} = q \int_{\mathcal{C}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$$

La f.e.m générée le long du circuit s'écrit donc :

$$e_{\mathcal{C}} = \frac{W_{\mathcal{C}}}{q} = \int_{\mathcal{C}} \vec{E_m}.\vec{dl}$$

avec $\vec{E_m}$ le champ électromoteur, qui a pour expression dans le cas général : $E_m = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$.

Dans le cas d'un conducteur filiforme fermé, on décompose $\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_c}$ avec $\vec{v_c}$ la vitesse du conducteur, et on remplace $\vec{E}$ par son expression en terme de potentiels. On a alors :

$$e_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} (-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v_r} + \vec{v_c}) \wedge \vec{B}).\vec{dl} = \oint_{\mathcal{C}} (-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v_c} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$$

$\vec{v_r}$ étant colinéaire à $\vec{dl}$.

2 Circuits filiformes fermés

Comme le titre l'indique, nous nous restreignons ici à l'étude des circuits filiformes fermés, et nous supposons que les circuits et les surfaces considérées sont orientés conformément à la convention énoncée au 1.1.

2.1 Démonstration de la Loi de Faraday

Si la force électromotrice crée dans un circuit est toujours (par définition) égale à la circulation du champ électromoteur le long de ce circuit, celle-ci n'est pas toujours égale à la variation du flux de champ magnétique à travers le circuit, et par conséquent la loi de Faraday ne s'applique pas dans tous les cas.

Nous allons maintenant donner une démonstration de cette loi dans deux cas simplifiés, ce qui nous fournis une condition suffisante (mais non nécessaire) à l'application de la Loi de Faraday.

2.1.1 Induction de Neumann

Le cas le plus simple est celui de l'induction de Neumann, pour lequel on considère un circuit immobile dans un champ variable. La vitesse du conducteur $\vec{v_c}$ est alors nulle en tout point du circuit, et la f.e.m générée le long de celui-ci s'écrit simplement [2,3] :

$$e_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} (-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}).\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}.\vec{dl}$$

Or, d'après la loi de Maxwell-Faraday $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$. Donc, d'après le théorème de Stokes :

$$e_{\mathcal{C}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{S}} \vec{B}.\vec{dS} = -\frac{\partial \phi_S}{\partial t}$$

Ou $\mathcal{S}$ est une surface quelconque supportée par $\mathcal{C}$.

Nous retrouvons alors immédiatement l'expression de la Loi de Faraday.

2.1.2 Induction de Lorentz

Nous nous intéressons maintenant au cas de l'induction de Lorentz, c'est à dire des circuits mobiles dans un champ permanent. Nous nous restreindrons ici au cas des circuits en translation, ce qui simplifie légèrement les calculs.

La f.e.m générée le long d'un circuit se réécrit dans ce cas :

$$e_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{v_c} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$$

Nous allons maintenant chercher à exprimer la variation du flux a travers le circuit. Considérons les surfaces $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{S}(t+dt)$ supportées respectivement par le circuit $\mathcal{C}$ aux dates t et $t+dt$, et $\mathcal{S}_{lat}$ la surface balayée par le circuit entre ces deux instants. On a alors :

$$-\int_{\mathcal{S}(t)} \vec{B}.\vec{dS} + \int_{\mathcal{S}(t+dt)} \vec{B}.\vec{dS} + \int_{\mathcal{S}_{lat}} \vec{B}.\vec{dS} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d\phi &= \int_{\mathcal{S}(t+dt)} \vec{B}.\vec{dS} - \int_{\mathcal{S}(t)} \vec{B}.\vec{dS} \\ &= -\int_{\mathcal{S}_{lat}} \vec{B}(t).\vec{dS} \\ &= -\oint_{\mathcal{C}} (\vec{dl} \wedge \vec{v_c} dt).\vec{B} \end{aligned} \tag{1}$$

On retrouve alors :

$$e_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{dl} \wedge \vec{v_c}).\vec{B} = -\frac{d\phi}{dt}$$

On peut remarquer que, si l'induction de Neumann est une conséquence directe de la loi de Maxwell-Faraday, celle-ci n'intervient pas dans le calcul de l'induction de Lorentz, qui est une due au terme $\vec{v} \wedge \vec{B}$ de la force de Lorentz. Il est surprenant de voir que la loi de Faraday est en réalité due à l'action conjointe de deux phénomènes différents, qui ne semble pas avoir de lien profond [1].

Ce résultat peut en réalité s'étendre au cas des circuits filiformes fermés, indéformables, ayant un mouvement quelconque (non-relativiste, bien entendu) dans un champ éventuellement variable.

Des précautions sont cependant à prendre lorsque l'on considère des conducteurs volumiques ou surfaciques, ou encore des circuits déformables. Seul l'étude du champ électromoteur permet alors une résolution rigoureuse du problème.

2.2 Auto-induction, induction mutuelle

Le flux magnétique à considérer pour appliquer la loi de Faraday est le flux total à travers le circuit. En particulier, il est nécessaire en toute rigueur de considérer le champ magnétique généré par les courants induits, qui crée à son tour un courant dans le conducteur.

La f.e.m générée dans un circuit est alors :

$$e_{\mathcal{C}} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - \frac{d\phi_{ind}}{dt}$$

Or, d'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique généré par une distribution de courant est proportionnel a l'intensité de celui-ci. Ainsi : $\phi_{ind} = LI$, ou L est un facteur propre au circuit, appelé coefficient d'auto-induction, ou inductance. On a toujours $L \geq 0$, d'après la loi de Lenz.

On a alors : $e_{\mathcal{C}} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - L\frac{dI}{dt}$.

On retrouve, en l'absence de champ extérieur, la caractéristique de la bobine inductive : $e = -L\frac{dI}{dt}$.

Considérons maintenant deux circuits fermés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, suffisamment proche l'un de l'autre pour que le flux du champ créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 soit non négligeable.
Toujours en raison de la loi de Biot et Savart, on a : $\phi_{1/2} \propto I_1$ et $\phi_{2/1} \propto I_2$. On peut également démontrer le théorème de Neumann, qui implique que le facteur de proportionnalité est le même dans les deux cas. On note ce facteur M, le coefficient d'induction mutuelle, qui peut prendre des valeurs positives ou négatives.

2.3 Bilans énergétiques

L'étude énergétique la plus simple est celle de l'induction de Lorentz : on se place dans les mêmes hypothèses que dans le paragraphe 2.1.2.

Le travail fourni par le champ électromagnétique au circuit pour un déplacement infinitésimal $d\vec{P}$ s'écrit (force de Laplace) :

$$\begin{aligned}
\delta W_{EM} &= \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}_L.d\vec{P} = \oint_{\mathcal{C}} I.(d\vec{l} \wedge \vec{B}).d\vec{P} \\
&= I.\oint_{\mathcal{C}} (d\vec{P} \wedge d\vec{l}).\vec{B} \\
&= -I.\int_{\mathcal{S}_{lat}} \vec{B}.d\vec{S} \\
&= I.\delta\phi
\end{aligned} \tag{2}$$

La puissance mécanique à fournir au circuit pour lui imposer un mouvement est alors :

$$P_{meca} = -P_{EM} = -\frac{\delta W_{EM}}{dt}$$

La puissance fournie aux porteurs de charges s'écrit alors :

$$P_{diss} = e.I$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{d\phi_{ind}}{dt}.I - \frac{d\phi_{ext}}{dt}.I \\
&= -\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}L.I^2) - P_{EM} \\
&= -\frac{dE_{AI}}{dt} + P_{meca}
\end{aligned} \tag{3}
$$

On retrouve ainsi une loi de conservation de l'énergie : la puissance fournie au porteur de charge est égale a la somme de la puissance fournie par l'énergie d'auto-induction, et de la puissance mécanique apportée au circuit.

Dans le cas de l'induction de Neumann, il n'est pas possible d'écrire un bilan énergétique pour le circuit inductif seul. En effet, il est nécessaire de considérer la source du champ variable, et la rétroaction du circuit sur celle-ci, pour mener une étude énergétique rigoureuse. Nous allons faire l'étude d'un système de circuits couplés, pouvant être considérés respectivement comme une source de champ magnétique variable et un circuit inductif.

On peut écrire : [2,3]

$$
\begin{aligned}
P_{diss} &= e_1.I_1 + e_2.I_2 \\
&= -I_1(\frac{d\phi_{1/1}}{dt} + \frac{d\phi_{2/1}}{dt}) - I_2(\frac{d\phi_{2/2}}{dt} + \frac{d\phi_{1/2}}{dt}) \\
&= -L_1.I_1.\frac{dI_1}{dt} - L_2.I_2.\frac{dI_2}{dt} - M(I_1.\frac{dI_2}{dt} + I_2.\frac{dI_1}{dt}) \\
&= -\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}.L_1.I_1^2 + \frac{1}{2}.L_2.I_2^2 + M.I_1.I_2) \\
&= -\frac{d}{dt}(E_{AI1} + E_{AI2} + E_{IM})
\end{aligned} \tag{4}
$$

On retrouve bien une relation de conservation d'énergie. L'énergie d'induction $E_I = E_{AI1}+E_{AI2}+E_{IM}$ est en réalité une réécriture de l'énergie électromagnétique, et est donc toujours positive.

On peut alors en déduire la relation :

$$
\begin{aligned}
|M| &\leq \sqrt{L_1.L_2} \\
&= k.\sqrt{L_1.L_2}
\end{aligned} \tag{5}
$$

ou k est appelé coefficient de couplage des circuits 1 et 2.

3 Conducteurs volumique, et limites de la loi de Faraday

Nous sortons maintenant du cadre des circuits filiformes fermés, et nous nous intéressons à des courants volumiques et surfaciques. Nous verrons alors que la loi de Faraday ne s'applique plus toujours, et qu'il est donc nécessaire de revenir a l'expression du champ électromoteur pour décrire correctement les phénomènes d'induction.

3.1 Courants de Foucault

L'appellation courant de Foucault désigne l'ensemble des courants inductifs dans des conducteurs volumiques. Ils peuvent être mis en évidence par l'étude de la chute ralentie d'un aimant dans un cylindre conducteur. Il est alors nécessaire de considérer tous les circuits possible dans le conducteur, et de sommer les intensités générées le long de chacun d'eux.

L'énergie apportée pour générer ces courants est entièrement dissipée par effet joule dans le conducteur, ce qui a pour effet de l'échauffer. Les courants de Foucault sont alors généralement traités comme des termes dissipatifs, s'opposant au mouvement ou a la variation de courant dans les circuits considérés. Il peut alors être utile de briser les lignes de courants possible, par exemple en feuilletant les matériaux utilisés, afin de minimiser les pertes d'énergie dues à cette effet.

Cet effet connaît plusieurs applications ou conséquences courantes : chauffage par induction, freinage des poids-lourds, ou encore limitation de vitesse aux abords des lignes hautes-tensions.

3.2 Roue de Barlow

On considère un disque conducteur plein, en rotation autour de son axe. On referme le circuit en connectant par un fil immobile l'axe à un point situé sur le bord du disque (point de contact en frottement). Le tout est placé dans un champ magnétique constant, mais inhomogène.

L'étude des courants dans le disque conducteur montre que les trajets suivis sont indépendants du temps. Par conséquence, le flux du champ magnétique à travers le (ou les) circuits considérés ne varie pas. Pourtant on voit apparaître une force électromotrice le long du circuit : la règle du flux est brisée dans ce cas !

Qualitativement, c'est le mouvement du conducteur qui est a prendre en compte : dans le cas d'un circuit filiforme il est toujours confondu avec le mouvement des lignes de courants, mais ce n'est pas toujours le cas lorsque l'on considère des conducteurs volumiques.

$$e = \int_0^R \vec{E}_m . \vec{dr} = \int_0^R (\vec{v_c} \wedge \vec{B}) . \vec{dr}$$

Un exemple proposé par Feynman dans [1] met en évidence l'effet inverse : une variation de flux à travers un circuit ne provoquant pas toujours l'apparition d'une force électromotrice.