

# LC 20 : Induction électromagnétique

Thomas LE REUN & Théo CLAUDE

*La route est droite, mais la panthère est rose, t'entends jeune fauve ?*  
Roi HEENOK

## Références

- [1] C. MORE et S. OLIVIER. *Physique – 2<sup>ème</sup> année PSI\**, PSI. TEC&DOC, 2009.
- [2] H. GIÉ et J.-P. SARMANT. *Électromagnétisme – 2<sup>ème</sup> année MP\**, MP, PT\*, PT. TEC&DOC, 1996.
- [3] M. BERTIN, J.-P. FAROUX et J. RENAULT. *Électromagnétisme – Tome 3*. Michel Bertin, 1994.

## Prérequis

- Bases en électrocinétique
- Électromagnétisme dépendant du temps (dont ARQS)
- Conducteur en régime variable

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Deux types d'induction</b>	<b>2</b>
1.1 Cadre de l'étude . . . . .	2
1.2 Induction de NEUMANN . . . . .	3
1.3 Induction de LORENTZ . . . . .	3
<b>2 Force électromotrice et courants de FOUCAULT</b>	<b>4</b>
2.1 Circuit équivalent . . . . .	4
2.2 Application à la pince ampèremétrique . . . . .	4
2.3 Chauffage d'un billig <sup>1</sup> . . . . .	5
<b>3 Auto-inductance et inductance mutuelle</b>	<b>6</b>
3.1 Cas de la bobine . . . . .	6
3.2 Inductances mutuelles et transformateur . . . . .	6
<b>Conclusion</b>	<b>7</b>
<b>Pour aller plus loin...</b>	<b>7</b>

---

1. Le ou la billig est le nom breton désignant une plaque circulaire en fonte, extrêmement lourde, utilisée pour réaliser et faire cuire les galettes ou les crêpes. (cf. WIKI)

# Introduction

Contextualisation : électromagnétisme dépendant du temps. Les variations temporelles de  $\vec{B}$  impliquent  $\vec{\text{rot}} \vec{E} \neq 0$ . Nous allons montrer qu'en faisant varier un champ  $\vec{B}$ , il est possible de créer des courants.

Expérience : un aimant dans une bobine (oscillo en single trig). Le signal est gardé en mémoire et commenté par la suite.

Au cours de cette leçon, nous allons expliciter les causes de ces courants et les méthodes pour les étudier (convention). Puis, nous étudierons le phénomène d'induction dans le contexte électrocinétique ce qui nous permettra d'en voir plusieurs applications (mesure de courant, chauffage, transformateur).

## 1 Deux types d'induction

### 1.1 Cadre de l'étude

On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires :

- les temps de propagation sont négligés devant les temps caractéristiques de variations des champs,
- les courants  $\|\vec{j}\|$  sont prépondérants devant  $\|c\rho\|$ ,
- et il n'y a pas d'accumulation de charges.

Les équations de MAXWELL s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu \vec{j} \end{cases}$$

N.B. : La loi de BIOT et SAVART s'applique pour calculer le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et le théorème d'AMPÈRE s'applique pour calculer  $\vec{B}$ .

On suppose que les temps de variation des champs sont négligeables devant le temps typique de collisions des électrons sur le réseau de cation d'un conducteur. D'après le modèle de DRUDE, il vient :

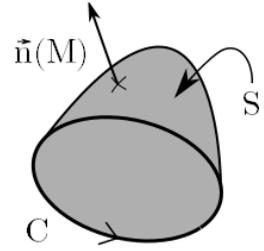
$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où  $\gamma$  est la conductivité du matériau. On obtient la loi d'OHM locale.

*Tra : Dans ce cadre, quelles sont les implications de l'équation de MAXWELL-FARADAY intégrée ?*

## 1.2 Induction de NEUMANN

Par convention, le sens d'un vecteur normal à une surface portée par un contour orienté est défini par la « règle de la main droite » (voir figure ci-contre).



La forme intégrée de MAXWELL-FARADAY donne :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n}(M) dS = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

où  $e$  est appelée force électromotrice et  $\Phi_B$  est le flux du champ  $\vec{B}$  à travers la surface  $S$  portée par le contour  $C$ .

Ainsi, en utilisant la loi d'OHM locale, on comprend que les variations temporelles de  $\vec{B}$  sont sources de courant dans le contour  $C$ .

*Tra : On voit que la dérivée temporelle du flux coupé induit une force électromotrice. Qu'en est-il d'un circuit mobile dans un champ  $\vec{B}$  constant ?*

## 1.3 Induction de LORENTZ

Supposons que l'on observe, dans le référentiel ( $\mathcal{R}$ ) du laboratoire, un champ électromagnétique  $(\vec{E}_{\mathcal{R}}, \vec{B}_{\mathcal{R}})$  statique et uniforme. Soit un conducteur se déplaçant à une vitesse rectiligne uniforme  $\vec{v}_e$  non relativiste par rapport à ( $\mathcal{R}$ ). Notons ( $\mathcal{R}'$ ) le référentiel lié à ce conducteur.

La force de LORENTZ appliquée à une charge  $q$  étant invariante par transformation galiléenne, elle s'exprime de la même manière dans ( $\mathcal{R}$ ) que dans ( $\mathcal{R}'$ ). Si l'on note  $\vec{v}_{\mathcal{R}}$  (resp.  $\vec{v}_{\mathcal{R}'}$ ) la vitesse de la charge dans ( $\mathcal{R}$ ) (resp. dans ( $\mathcal{R}'$ )), on obtient nécessairement pour tout  $\vec{v}_{\mathcal{R}}$  :

$$q(\vec{E}_{\mathcal{R}} + \vec{v}_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B}_{\mathcal{R}}) = q(\vec{E}_{\mathcal{R}'} + \vec{v}_{\mathcal{R}'} \wedge \vec{B}_{\mathcal{R}'})$$

La transformation des champs est donc :

$$\begin{cases} \vec{E}_{\mathcal{R}'} = \vec{E}_{\mathcal{R}} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}_{\mathcal{R}} \\ \vec{B}_{\mathcal{R}'} = \vec{B}_{\mathcal{R}} \end{cases}$$

**Remarque :** Le cadre naturel des équations de MAXWELL est la relativité. Ces transformations des champs démontrées à partir d'un changement de référentiel galiléen ne sont valables que dans le cadre de l'ARQS magnétique.

La circulation de  $\vec{E}_{\mathcal{R}'}$  sur un contour fermé du conducteur n'est pas forcément nulle. Un courant peut-être induit dans le conducteur même si le champ électromagnétique est statique.

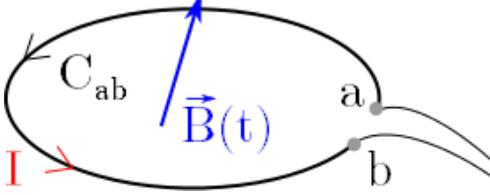
*Tra : Une leçon entière sera consacrée à cet aspect de l'induction électromagnétique à travers la conversion de puissance électromécanique. C'est donc l'induction de NEUMANN qui sera illustrée dans la suite de ce cours.*

## 2 Force électromotrice et courants de FOUCAULT

### 2.1 Circuit équivalent

En pratique le courant induit est généralement exploité au sein d'un circuit électrocinétique. Cherchons à quel composant est équivalent un conducteur soumis à un champ magnétique variable.

On suppose que la distance entre  $a$  et  $b$  est négligeable devant la longueur  $l$  de  $C_{ab}$ .



$$\begin{aligned} \int_{C_{ab}} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \int_{C_{ab}} (\text{grad}(V) + \partial_t \vec{A}) \cdot d\vec{l} \\ \int_{C_{ab}} \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} &= - (V(b) - V(a)) + \int_{C_{ab}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \\ \frac{l}{\gamma s} I &= - (V(b) - V(a)) + e_{ab} \end{aligned}$$

où  $s$  est la section du fil.

Ainsi,  $V_{ba} \approx e - RI$  avec  $R = \frac{l}{\gamma s}$ .

Le tronçon de circuit est équivalent à un générateur de force électromotrice  $e$  et de résistance  $R$ .

### 2.2 Application à la pince ampèremétrique

D'après le théorème d'AMPÈRE, le courant  $I_P$  décrit FIGURE 1 crée un champ  $\vec{B}$  dans le noyau ferromagnétique égal à  $\mu \frac{I_P}{2\pi r_{\text{pince}}} \vec{u}_\theta$  où  $r_{\text{pince}}$  est le rayon de la pince. En supposant que le rayon des spires  $r_{\text{spire}}$  est petit devant  $r_{\text{pince}}$ , ce champ est homogène et perpendiculaire au vecteur normal des spires. Ainsi, il vient :

$$I_S \approx \mu \frac{N}{R} \frac{dI_P}{dt} \frac{r_{\text{spire}}^2}{2r_{\text{pince}}}$$

où  $N$  est le nombre de spire de la pince ampèremétrique et  $R$  sa résistance.

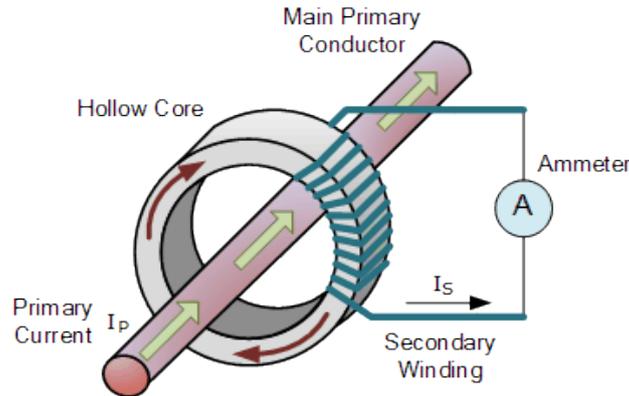


FIGURE 1: Fonctionnement d'une pince ampèremétrique.

Si  $I_P$  est sinusoïdale,  $I_S$  lui est proportionnelle. On peut donc mesurer par ce biais une intensité élevée en étant isolé du circuit.

*Tra : Nous avons étudié ici des courants linéiques. Plaçons nous à présent dans le cadre de courants volumiques en étudiant les courants de FOUCAULT*

## 2.3 Chauffage d'un billig<sup>2</sup>

Les courants induits donnent lieu à une puissance volumique  $\mathcal{P}_v$  dissipée par effet JOULES égale à  $\vec{j} \cdot \vec{E}$ . Considérons un conducteur cylindrique soumis de façon homogène à un champ  $\vec{B}$  variable parallèle à son axe (voir FIGURE 2).

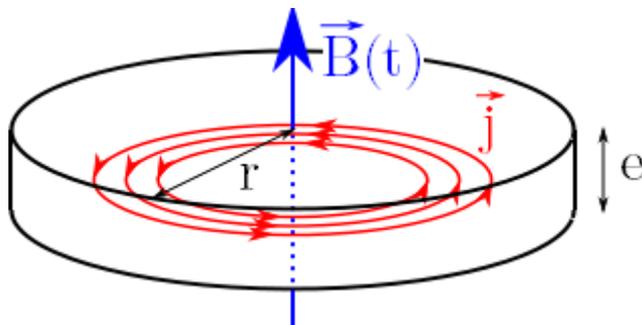


FIGURE 2: Courants de FOUCAULT dans un billig cylindrique.

Le système est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$  et est symétrique par tout plan défini par  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$  donc on cherche le champ électrique induit tel que  $\vec{E} = E\vec{u}_\theta$ . Ainsi, en intégrant sur un contour de rayon  $\rho$  centré sur  $Oz$ , on obtient :

$$E = -\frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \rho$$

En intégrant  $\mathcal{P}_v = \gamma E^2$  sur tout le volume, il vient :

$$\mathcal{P} = \iiint_v \mathcal{P}_v d\tau = 2\pi e \int_0^r \gamma \frac{1}{4} \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \rho^3 d\rho = \gamma \left( \frac{dB}{dt} \right)^2 \frac{\pi e}{8} r^4$$

En supposant  $\vec{B}$  sinusoïdal de fréquence  $f$ , la puissance moyenne dissipée dans le conducteur vaut :

$$\langle \mathcal{P} \rangle_t = \gamma f^2 (B_0)^2 \frac{e}{4} \pi^3 r^4$$

Si l'on suppose que l'énergie est entièrement dissipée sous forme de chaleur, on a :  $\langle \mathcal{P} \rangle_t dt = mc_p dT$  où  $m$  est la masse du conducteur,  $c_p$  sa capacité thermique massique et  $dT$  sa variation de température.

En pratique cette méthode de chauffage est fortement limitée par le champ créé en retour par le courant induit. En effet, si l'on suppose que le flux  $\Phi_B$  augmente, le courant  $\vec{j} \cdot \vec{u}_\theta$  est négatif et crée un flux qui s'oppose à l'augmentation de  $\Phi_B$ .

*Tra : « L'induction s'oppose par ses conséquences aux causes qui lui ont donné naissance. » d'après la loi de LENZ. Cet loi de modération a déjà été observé lors de l'étude de la bobine, un composant qui s'oppose au variations de courant.*

<sup>2</sup>. Le ou la billig est le nom breton désignant une plaque circulaire en fonte, extrêmement lourde, utilisée pour réaliser et faire cuire les galettes ou les crêpes. (cf. WIKI)

### 3 Auto-inductance et inductance mutuelle

#### 3.1 Cas de la bobine

La bobine peut être vue comme un solénoïde et crée un champ  $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} I$  avec  $N$  le nombre de spires et  $l$  la longueur de la bobine. Ainsi la force électromotrice auto-induite sur la bobine est égale à  $-\mu_0 \frac{N^2}{l} \frac{dI}{dt} \pi r^2$  où  $r$  est le rayon des spires. La bobine génère une tension  $e = -L \frac{dI}{dt}$  avec l'inductance  $L = \mu_0 \pi r^2 \frac{N^2}{l}$ . On retrouve la tension  $u = L \frac{dI}{dt}$  en convention récepteur.

*Tra : La force électromotrice induite par la bobine dépend du flux magnétique qui la traverse. Il est donc possible de coupler magnétiquement deux circuits, c'est le principe du transformateur.*  
*Exp : alimenter une bobine par un GBF (basses fréquences!), approcher une autre bobine et observer un signal en sortie.*

#### 3.2 Inductances mutuelles et transformateur

On considère deux bobines couplées (voir FIGURE 3). Le flux de champ magnétique de la bobine 1 dans la bobine 2 est proportionnel au courant  $i_1$ . On pose :

$$\begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1 \\ \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2 \end{cases}$$

On peut montrer que  $M_{12} = M_{21} = M$  par la formule de NEUMANN.

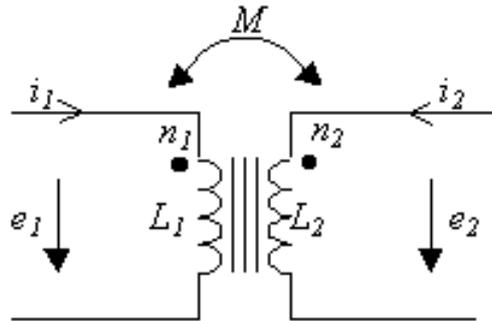


FIGURE 3: Schéma de principe d'un transformateur.  $n_1$  et  $n_2$  désignent le nombre de spires par mètre de bobine.

Donc, par principe de superposition, on obtient les forces électromotrices suivantes sur les bobines :

$$\begin{cases} e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

L'énergie magnétique  $\mathcal{E}_m$  stockée dans le transformateur vérifie  $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -e_1 i_1 - e_2 i_2$ . On a donc :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

Or l'énergie magnétique est définie positive car  $\mathcal{E}_m = \int_v \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$  donc  $L_1 \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 + 2M \frac{i_1}{i_2} + L_2 \geq 0$ . Ainsi, comme le discriminant de ce polynôme est négatif,  $M^2 \leq L_1 L_2$ . Le coefficient de couplage  $k$  égal à  $\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$  est compris entre 0 et 1.

Dans le cas d'un transformateur parfait, on veut que le couplage soit maximal, c'est-à-dire que  $M$  soit maximal i.e.  $k = 1$ .

Donc  $\frac{e_1}{e_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}$  si les bobines 1 et 2 ont la même géométrie. Si l'on alimente la bobine 1 avec le secteur, pour charger son portable sur la bobine 2 il faut que  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{220}{12}$ .

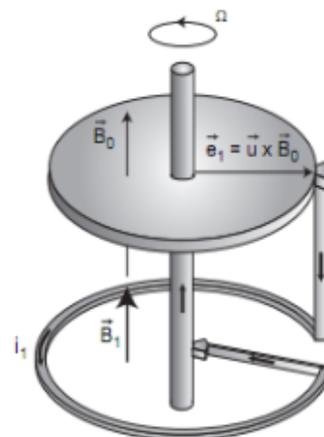
## Conclusion

Nous avons eu, dans cette leçon, un aperçu des implications l'équation de structure de MAXWELL-FARADAY. Cependant, les applications que nous avons choisi de présenter en guise d'illustrations sont loin d'être exhaustives. L'induction permet aussi la transformation des ondes électriques en ondes acoustiques (haut-parleur) et réciproquement (micro), la conversion électromécanique, la création de capteur inductifs, etc. Au delà de l'instrumentation, l'induction entre en jeu dans l'explication de phénomènes naturels d'importance comme le magnétisme terrestre.

## Vers l'infini et la génération spontanée du magnétisme terrestre.



Super-agrégatif survolant les côtes bretonnes<sup>3</sup>.



Dynamo de BULLARD.

On pense que c'est sur le principe de la dynamo que repose l'origine du champ magnétique terrestre. Un courant électrique est créé dans une boucle conductrice se déplaçant dans un champ magnétique : c'est l'effet dynamo. Il y a conversion d'énergie mécanique en énergie électromagnétique. Inversement, un courant dans une boucle conductrice produit un champ magnétique. Un courant produit un champ, une variation de champ produit un courant, mais sans champ et sans courant initiaux, l'effet dynamo peut-il s'amorcer et se stabiliser ?

L'exercice sur la dynamo de BULLARD est bien traité dans [1]. Niveau recherche actuelle, il y a les articles de PINTON, ODIER et VOLK : *Generation of magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium* et *Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo* par exemple ☺.

3. Oui, je sais, j'ai que ça à faire... mais tout le monde ne peut pas se vanter d'avoir Super-agrégatif comme binôme!