LP23 Aspect analogique et numérique du traitement d'un signal - Etude spectrale

18 novembre 2018

—. — . . — — . . —.. . —. — . — — — —. . — —. ..— . —.. ..—
—. — . ..— . — ..

Florine Dubourg & Vincenzo Aronica

Questions et commentaire du Jury

Cf fin du poly

Bibliographie

- ✍ *Traitement du signal*, **Yvan Duroc** ⟶ Partie traitement du signal
- ✍ *Traitement des signaux et acquisition de données*, **Francis Cottet** ⟶ Partie traitement du signal
- ✍ *Mathématique pour la physique*, **Walter Apple** ⟶ Propriétés TF et Série de Fourier
- ✍ *Cap Prépa MPSI*, **J.Perez** ⟶ Un peu de tout sauf la partie numérisation
- ✍ *BUP 872*, ⟶ Cryptage d'un signal-Modulation/Démodulation

Expériences

- Filtre RC
- Programme python : construction fonction créneau

Table des matières

Introduction

Nous utilisons au quotidien des signaux de différentes natures, que ce soit lorsque l'on écoute de la musique, qu'on utilise nos portable ou qu'on regarde la TV. Nous allons donc nous intéresser aujourd'hui à l'étude de signaux, plus particulièrement nous allons nous demander comment on peut décrire un signal, comment on peut le modifier, comment on peut numériser ce signal ?
Afin d'illustrer les aspects analogiques et numériques du traitement du signal nous allons nous intéresser à la méthode de cryptage utilisé par canal + sur la TNT. Pour cela nous allons tenter de décrypté un son qu'on qualifiera de crypté par abus de langage.

Faire écouter le son "crypté"

✍ ⏲ 1 min

Avant d'essayer de rendre ce son audible, intéressons nous à l'étude spectrale

1 Signal et représentation spectrale

1.1 Décomposition en série de Fourrier

Soit f(t) une fonction T-périodique. Le développement en Série de Fourier de la fonction f(t) peut être écrit sous la forme :

$$S_n(f(t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f)\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right) + b_n(f)\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\right) \tag{1}$$

Avec $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Où le terme $\frac{a_0(f)}{2}$ est la moyenne de la fonction f(t). Si l'on considère par exemple un signal électrique, ce terme correspond à la composante continue du signal.

On peut alors caractériser un signal par son spectre qui regroupe l'ensemble des fréquences du signal.

Nous pouvons illustrer cette décomposition spectrale en créant un signal créneau en sommant des harmoniques de rang croissant.

Création d'un signal créneau

✍ Voir code python en annexe ⏲ 2 min

Pour un signal carré : $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi}\frac{\sin\left((2n+1)2\pi\frac{t}{T}\right)}{2n+1}$
Comparer à l'aide du programme python la fonction f(t) pour n = 1, 3, 10, 100.

Remarque :

On constate que l'apparition d'une "crête" près de la discontinuité, la série de Fourier converge simplement mais pas uniformément. C'est le phénomène de Gibbs : au voisinage d'une discontinuité les sommes partielles de la série de Fourier présentent un dépassement d'amplitude constante.

Nous venons de traiter le cas des signaux périodiques. On va donc s'intéresser maintenant aux signaux non périodiques en rappelant les notions de la Transformé de Fourier

1.2 Généralisation aux signaux non périodiques : Transformé de Fourier

Soit f(t) une fonction appartenant à l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ [1], on appelle Transformée de Fourier de f(t) la fonction de la variable ν :

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

Ainsi la TF permet de passer d'une description temporelle à une description fréquentielle. L'un des interêts de passer dans le domaine des fréquences est de montrer directement l'amplitude des différentes composantes fréquentielles du signal.

On peut tracer la TF d'un signal créneau.

☕

TF d'un signal créneau

✍ Au talent ⏲ 1 min

Regarder la TF à l'oscillo d'un signal créneau de 4V et f = 10kHz par exemple.

Une fois les rappels sur la transformée de Fourier effectués, on peut s'intéresser à plusieurs éléments d'analyse spectrale régulièrement utilisés en traitement du signal.

1.3 Étude Spectrale

Soit f(t) un signal, on définit son énergie comme :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

En utilisant le théorème de Parseval : *La TF est une isométrie sur $\mathbb{L}^2$, on a donc :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\overline{\tilde{g}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu$$

En prenant f=g, on obtient :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu$$

La dse s'exprime donc comme : $DSE_f(\nu) = |TF(f)(\nu)|^2$. Physiquement la dse fournit un représentation de la répartition fréquentielle de l'énergie du signal.

On peut s'intéresser à la répartition de la puissance d'un signal. La puissance moyenne d'un signal f(t) s'exprime comme :

$$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

Ainsi la dsp s'exprime comme : $DSP_f(\nu) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}|TF(f)(\nu)|^2$.

1. Espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de carré sommable muni de la norme : $\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$

Cela étant dit, observons maintenant la dsp du son crypté :

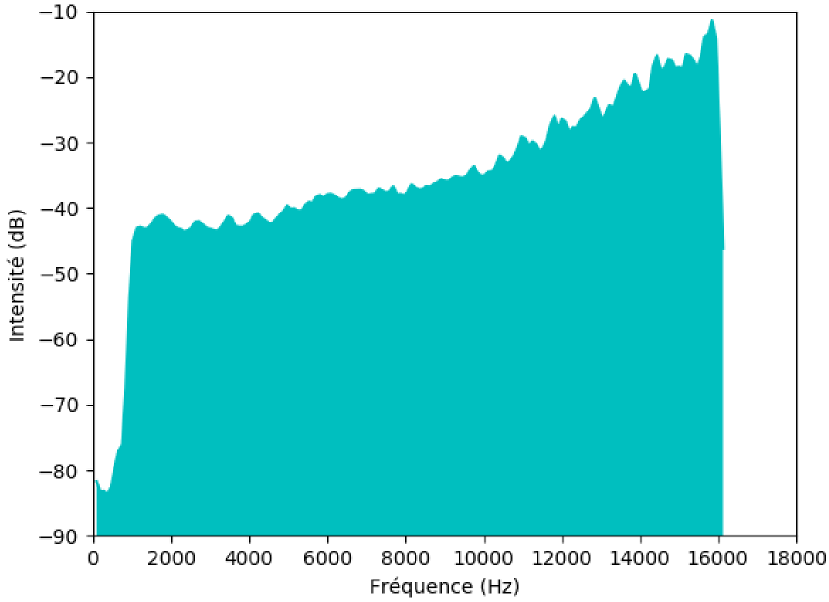

Figure 1 : Spectre du son crypté.

On peut remarquer que la densité spectrale augmente avec la fréquence avant de s'effondrer à 16000 Hz.
Si l'on compare avec une le spectre d'une musique audible :

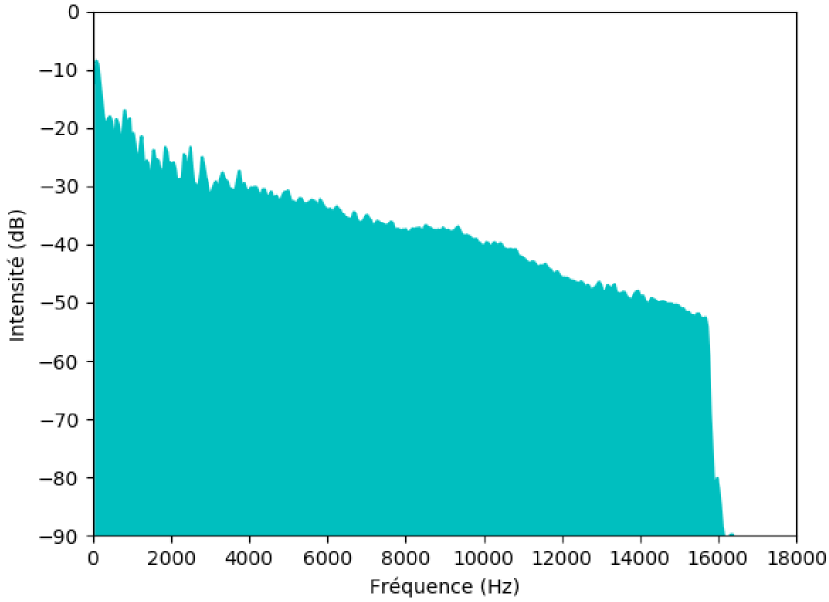

Figure 2 : Spectre du musique audible.

On constate que les sons audible et inaudible ont un spectre inversé.

> *En réalité le spectre du son inaudible a été inversé, il est nécessaire de procéder à une modulation d'amplitude pour le rendre de nouveau audible, c'est l'objet de la prochaine partie*

2 Traitement analogique

2.1 Modulation en amplitude

La modulation est généralement utilisée afin de transmettre un signal physique entre deux points distants. Nous allons nous intéressé ici à la modulation d'amplitude qui consiste à multiplier le signal f(t) étudié à un autre signal appelé onde porteuse.

<u>Exemple</u> : Soit $f(t) = A\cos(2\pi\nu_s t)$ et $p(t) = B\cos(2\pi\nu_p t)$

$$\begin{aligned} s(t) &= f(t)\cdot p(t) \\ &= A\cdot B\cdot \cos(2\pi\nu_s t)\cdot\cos(2\pi\nu_p t) \\ &= \frac{A\cdot B}{2}\cdot\left(\cos\left(2\pi\left(\nu_p+\nu_s\right)t\right)+\cos\left(2\pi\left(\nu_p-\nu_s\right)t\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi modulation = apparition de 2 signaux de fréquence $\nu_p \pm \nu_s$.

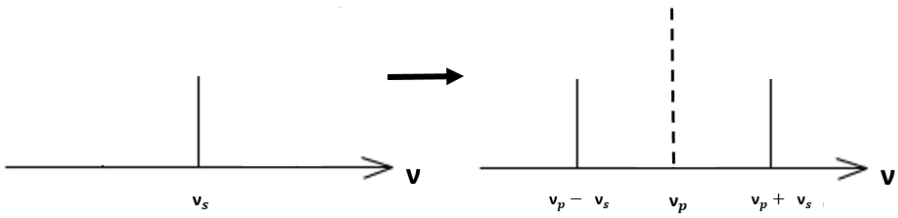

Figure 3 : Spectre d'un signal après modulation..

De la même façon pour un signal complexe :

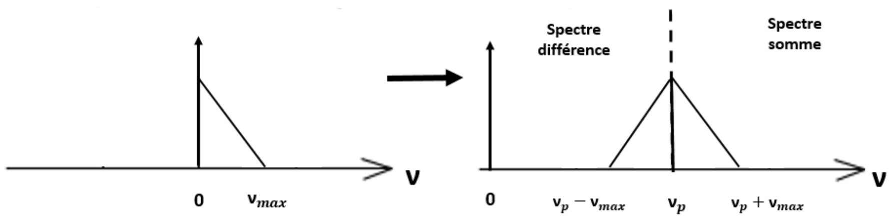

Figure 4 : Spectre triangulaire après modulation.

Si l'on revient sur le spectre du son crypté, on constate que le spectre s'arrête à 16000 Hz, c'est la fréquence de la porteuse. En multipliant ce signal par une porteuse de fréquence ν_p = 16000Hz on obtient le signal de densité spectrale :

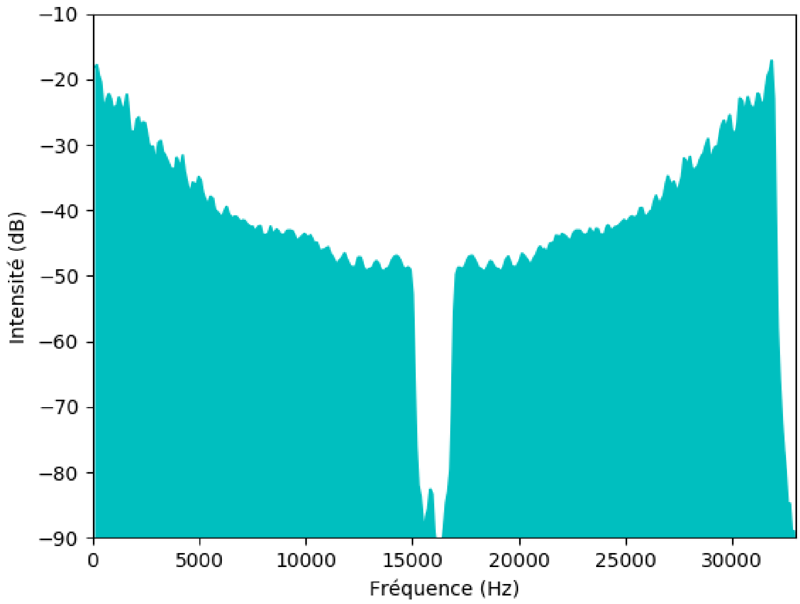

Figure 5 : Spectre du son après démodulation.

→ **Faire écouter le SON**

Le son est audible cependant il reste le spectre somme. Pour éliminer cette partie du spectre, nous allons nous intéressé au filtrage

2.2 Filtrage

Les filtres sont des systèmes linéaires et invariant dans le temps (SLIT) caractérisés par une réponse h(t) nommée réponse impulsionnelle du filtre. Soit e(t) le signal d'entrée, on peut écrire le signal de sortie s(t) comme :

$$s(t) = (h \otimes e)\,(t)$$

Soit dans l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned}\tilde{s}(\nu) &= TF\,(h \otimes e)\,(t) \\ &= \tilde{h}(\nu) \cdot \tilde{e}(\nu)\end{aligned}$$

$\tilde{h}(\nu) = \frac{\tilde{s}(\nu)}{\tilde{e}(\nu)}$ est la fonction de transfert du filtre.

La connaissance de la fonction de transfert nous permet de connaître le signal de sortie pour n'importe quel signal d'entrée.

Cas du filtre RC :

Mettons cela en évidence en étudiant un filtre RC.

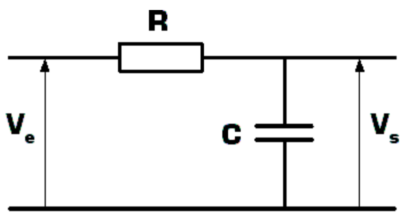

Figure 6 : Filtre RC.

Sa fonction de transfert est : $\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ où $\omega_c = \frac{1}{RC}$

Pour caractériser ce filtre on peut tracer ses diagrammes de Bode :

- en gain : $G_{dB} = 20\log\left(|\tilde{h}(\omega)|\right)$
- en phase : $\phi(\omega) = arg(\tilde{h}(\omega)) = -arctan(\frac{\omega}{\omega_c})$

☕

Filtre RC

✍ Fascicule de TP élec ⏲ 2 min

Réaliser une filtre passe-bas RC avec R = 10kΩ et C = 10nF pour avoir $f_c \approx 1.6kHz$. Tracer le diagramme de Bode en utilisant la réponse indicielle :

- Mesurer la tension aux bornes du GBF et du condensateur
- Paramétrer Latis-pro : seuil montant 100mV, pas de 10μs et 2000 points
- Acquérir, lisser puis dériver s(t)
- Faire une analyse de Fourier en amplitude et en phase

Ce filtre coupe les hautes fréquences, c'est donc un filtre passe bas d'ordre 1. Pour :

- $\omega \ll \omega_c \rightarrow G_{dB} = 0$
- $\omega \gg \omega_c \rightarrow G_{dB} = -20\log(\frac{\omega}{\omega_c}) \rightarrow$ Signal de sortie divisé par 10 à chaque décade
- $\omega = \omega_c \rightarrow G_{dB} = -3dB$

Nous pouvons également citer les filtres passe haut, passe bande, coupe bande.
De même, nous pouvons citer les filtres du second ordre qui possèdent une pente caractéristique de -40dB/décade et qui sont par conséquent plus sélectif. Ces filtres dépendent aussi d'un paramètre Q appelé facteur de qualité qui, pour une valeur $> \frac{1}{\sqrt{2}}$, entraîne un phénomène de résonance.

Nous pouvons maintenant revenir au son décrypté. Nous appliquons un filtrage passe bas de fréquence de coupure 16kHz pour ôter le spectre somme. On obtient le spectre suivant :

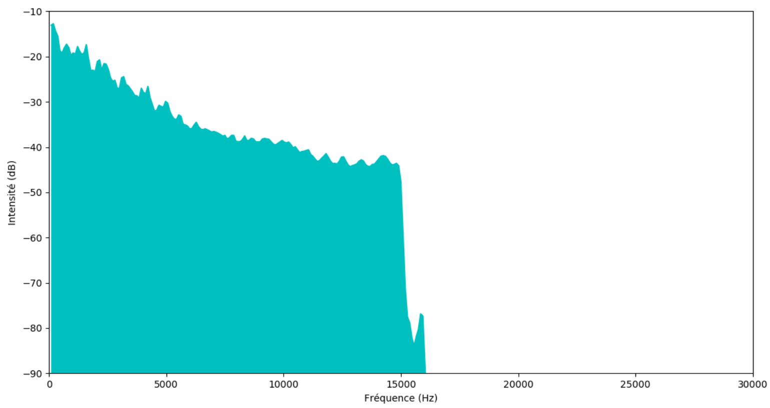

Figure 7 : Spectre du son après démodulation et filtrage.

Remarque

La différence n'est pas perceptible car les fréquences filtrées sont peu audible pour l'être humain

Le signal sonore que nous avons utilisé était en réalité sous forme numérique, et tous les traitements ont été effectués sous forme numérique. Voyons comment s'effectue la numérisation, et à quoi il faut faire attention pour ne pas perdre en qualité du signal.

3 Numérisation

La numérisation consiste à acquérir un signal analogique continu et de le transformer via un CAN en un signal numérique échantillonné et quantifié.

3.1 Échantillonage idéal

Les équipements numériques ne peuvent traiter des signaux continus, il est donc nécessaire de l'échantillonner. L'échantillonnage consiste à discrétiser le temps d'un signal analogique x(t). La période entre deux échantillons est la période d'échantillonnage T_e.

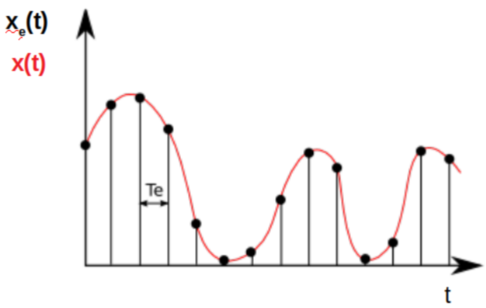

Figure 8 : Signal échantillonné.

Mathématiquement le signal échantillonne $x_e(t)$ s'exprime comme :

$$x_e(t) = x(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$$

la fréquence d'échantillonnage $\nu_e = \frac{1}{T_e}$ ne peut pas être choisi arbitrairement, elle doit respecter le critère Shannon qui stipule que : $\nu_e \geq 2 \cdot \nu_m ax$, où $\nu_m ax$ est la fréquence maximale du signal à échantillonner. Si ce critère n'est pas respecté, le signal est sous échantillonné et on a donc une perte d'information.

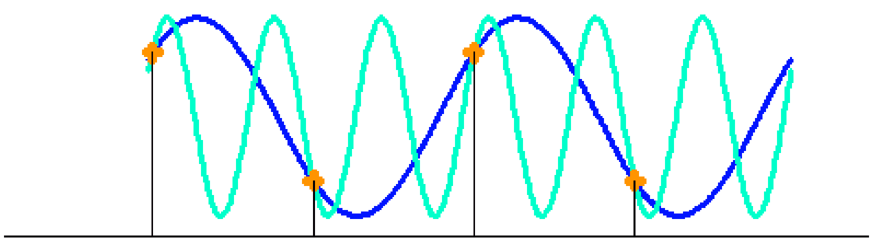

Figure 9 : Signal sous échantillonné.

Intéressons nous au spectre $\tilde{x}_e(\nu)$ du signal échantillonné.

$$\begin{aligned}\tilde{x}_e(\nu) &= TF[x_e(t)]\\ &= TF[x(t)] \otimes TF[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT_e)]\\ &= \tilde{x}(\nu) \otimes \nu_e \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - n\nu_e)\\ &= \nu_e \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{x}(\nu - n\nu_e)\end{aligned}$$

Si l'on considère arbitrairement que le spectre du signal est de forme triangulaire :

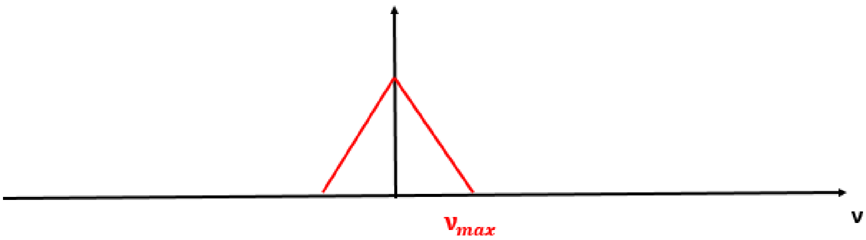

Figure 10 : Spectre triangulaire.

on peut mettre en évidence le non respect du critère de Shannon :

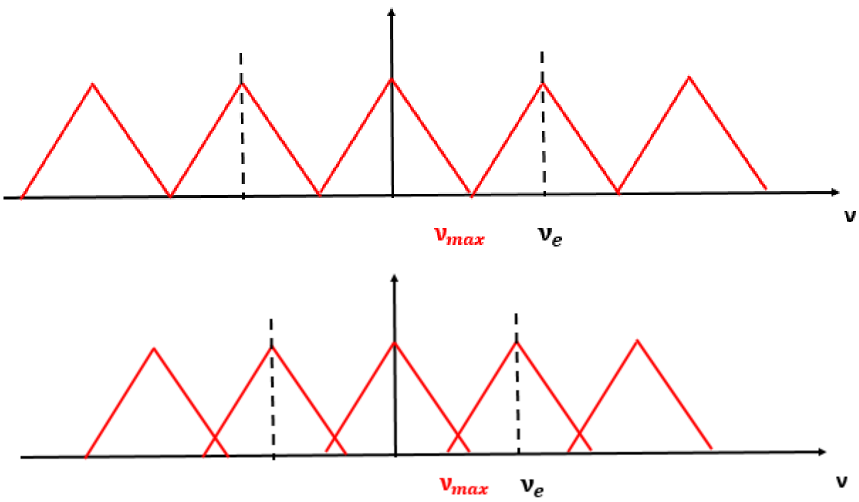

Figure 11 : En haut : critère de Shannon respecté. En bas : non respect du critère de Shannon.

On peut sur la figure que lorsque le critère de Shannon est respecté, le spectre sont bien disjoints. Il est donc possible de retrouver le spectre du original du signal. En revanche lorsque le critère de Shannon n'est pas respecté, les spectres se recouvrent. Il n'est donc plus possible de retrouver le spectre d'origine. C'est ce qu'on appelle **le repliement de spectre** ou alliasing. Pour éviter cela, on peut utiliser un filtre anti-repliement qui coupera les fréquences supérieures à $\frac{Fe}{2}$.

3.2 Limites de l'échantillonnage idéal

En réalité il n'est pas possible de prélever des échantillons instantanés comme nous l'avons décrit mathématiquement. En pratique on utilise un échantillonneur bloqueur.

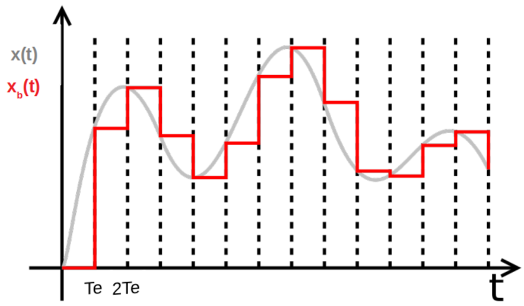

Figure 12 : Échantillonneur bloqueur

Le signal est alors bloqué pendant une durée de mise en mémoire égale à la période d'échantillonnage.
Le signal échantillonné est alors :

$$x_b(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) \cdot rect_{Te}\left(\frac{t-(n+\frac{1}{2})T_e}{T_e}\right)$$

De plus il sera nécessaire de quantifier le signal en amplitude. La qualité de la quantification dépendra également du nombre de bits choisis. Par exemple :

- Pour un 1 CD : $\nu_e = 44.1kHz$ quantification sur 16 bits $\rightarrow$ *Débit* $= 44.1 \times 16 = 705.6kbit/s$ $\rightarrow$ Pour 1min v=5Mo
- Pour un son téléphonique : $\nu_e = 8kHz$ quantification sur 8 bits $\rightarrow$ *Débit* $= 64kbit/s$ $\rightarrow$ Pour 1min v=480ko

faire écouter les deux son à 44 et 8 kHz

Conclusion

Nous avons pu voir à travers cette leçon la décomposition d'un signal en fréquence en utilisant le formalisme de Fourier. Nous avons pu voir qu'en s'intéressant au spectre d'un signal il était facile de le manipuler (filtrage, modulation).
Nous avons également introduit un aspect du traitement numérique d'un signal à savoir l'échantillonnage. Nous n'avons pas parler d'un autre aspect important du traitement d'un signal à savoir le bruit. Nous traiterons cet aspect à l'occasion de la séance de TP consacrées à cet effet.

4 Commentaires du jury

Questions posées :

- Une fonction L2, c'est quoi ?
- Qu'est-ce qui est marquant dans la DSF d'un signal discontinu comme le signal créneau que tu as présenté ? (réponse attendue : la décroissance est en 1/n, alors que les signaux continus décroissent au moins en 1/n)
- Justifier que le filtre est un produit de convolution
- Comment définit-on la réponse indicielle dans l'espace réel ?
- Expliquer pourquoi la TF d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac.
- Comment tu obtiens la fonction de transfert du filtre RC ? Tu peux tracer à main levée le diagramme de Bode ?
- Que représente le terme en $a_0/2$ de la DSF ?
- C'est quoi, une isométrie ? Le produit scalaire sur L2, c'est quoi ?
- Comment est-ce que le logiciel fait la densité spectrale ?
- Modulation d'amplitude : quand on veut transporter des signaux plutôt que de les chiffrer, on fait quoi de différent par rapport à ce qui a été présenté ici ?
- Calcul de la fréquence de coupure du filtre RC.
- Allure du diagramme de Bode, commentaires sur la réponse indicielle (diagramme bruité à cause de la durée d'acquisition et du GBF)
- Le logiciel, il fait quoi, exactement, quand il lisse/dérive/TF un signal ?
- C'est quoi, le plus gros problème quand on ne respecte pas le critère de Shannon ?

Retours :

- Globalement, plus un TP-cours qu'un cours : trop de manips et d'applications, pas assez de concepts nouveaux. Propositions pour améliorer le plan :
  - Mettre moins de maths ("L2" peut être remplacé par "de carré sommable")
  - Passer moins de temps sur les manips (tracer le diagramme de Bode à l'avance, se contenter de le commenter)
  - Le son chiffré était une idée intéressante, mais il vaudrait sans doute mieux en faire une dernière partie qui récapitulerait tout ce qui a déjà été vu (le problème d'en faire un fil conducteur est qu'on fait des traitements numériues dans la partie "Analogique", et ça passe pas trop)
  - La modulation d'amplitude n'est pas forcément pertinente à aborder : remplacer peut-être par un filtrage de bruit ?
  - Les notions de puissance, densité spectrale ne sont pas forcément pertinentes à aborder
  - Faire le calcul du filtre RC, pour caser un calcul au tableau
  - Peut-être mettre la DSF en pré-requis pour présenter la TF de manière propre
  - Passer plus de temps sur le numérique
  - Mettre au niveau L3 ? (pour le delta de Dirac et le produit de convolution)
  - Les ordres de grandeur ont été appréciés, mais il aurait fallu passer plus de temps sur les bits, octets, etc.
- Les correcteurs rappellent que "projeter des trucs, ça ne compte pas"
- Ne pas oublier de tourner le GBF vers le jury quand on manipule