LP24 – Ondes progressives, ondes stationnaires

2 novembre 2015

Dimitri Misiak & Johan Pinaud

Voilà tout ce qu'il y a ! Quarte, quinte et c'est marre ! Les autres intervalles c'est de la merde ! Le prochain que j'entends siffler un air païen, je fais un rapport au pape !
Père Blaise

Niveau : L3

Commentaires du jury

2015 : Les candidats doivent être attentifs à bien équilibrer leur exposé entre ces deux familles d'ondes qui, d'ailleurs, ne s'excluent pas entre elles.
2014 : À l'occasion de cette leçon, le jury tient à rappeler une évidence : avec un tel titre, la leçon doit être équilibrée et ne peut en aucun cas se limiter pour l'essentiel aux ondes progressives.
Jusqu'en 2013, le titre était : Exemples dephénomènes de propagation unidimensionnels. Ondes progressives, ondes stationnaires. Aspects énergétiques.
2009 : Il est important de savoir justifier la forme générale d'une onde progressive et d'une onde stationnaire. Si la notion d'impédance est utilisée, il faut préciser pour quel type d'onde elle s'applique.
2008 : Les notions d'impédance sont rarement maîtrisées. Un milieu unidimensionnel peut aussi être dispersif alors que les candidats n'envisagent trop souvent que des signaux monochromatiques.

Bibliographie

- ✍ *Cap prépa*, **Renvoizé** ⟶ Etude de la corde vibrante et notion générale
- ✍ *Ondes mécaniques et diffusion*, **Garing** ⟶ Pour tous les aspects énergétiques sur une corde vibrante et ondes stationnaires
- ✍ *Ondes électromagnétiques*,**Garing** ⟶ Etude du câble coaxial
- ✍ *H-prépa Ondes 2eme année*,**Brébec** ⟶ Complément sur la corde, aspect énergétique du câble coaxial

Prérequis

- ➢ Onde plane
- ➢ Lois de l'Electrocinétique

Expériences

- Propagation dans un câble coaxial
- Corde de Melde

Table des matières

1 Quelques exemples de phénomènes propagatifs **2**
- 1.1 Propagation d'une onde dans une corde fixée aux deux extrémités . . . 2
- 1.2 Propagation dans un câble coaxial . . . 3

2 Résolution en ondes progressives **4**
- 2.1 Solutions générales de l'équation de d'Alembert . . . 4
- 2.2 Ondes planes progressives et impédance caractéristique . . . 5
- 2.3 Aspect énergétique . . . 6
- 2.4 Les Ondes Planes Progressives Harmoniques (OPPH) . . . 6

3 Ondes stationnaires **7**
- 3.1 Mise en équation pour une corde vibrante . . . 7
- 3.2 Energie des modes . . . 9
- 3.3 Application : la corde de Melde . . . 9

Introduction

Les ondes sont quelque chose que nous côtoyons au quotidien. On trouve des ondes dans le son (ondes de pression), dans la lumière (ondes électromagnétiques), mais également des ondes mécaniques, par exemple des ondes se propageant le long d'une corde.

Propagation d'une onde dans une corde fixée à une extrémité
Matériel : Corde On illustre la notion d'onde progressive transversale dans un milieu matériel.

La diversité des ondes rend la définition générale d'une onde difficile à donner, en revanche on peut dégager des caractéristiques communes à tous types d'ondes.
Définition : Une onde correspond à la propagation d'une perturbation à travers un milieu. Il y a un transfert d'énergie sans transfert de matière.

Il existe différentes familles d'onde, comme les ondes progressives, comme pour l'onde dans une corde, qui se propage dans une direction, ou comme les ondes stationnaires, qui ne se propagent pas, très utilisé notamment en musique. Dans cette leçon, nous allons détailler les notions d'onde progressives et stationnaires, et voir les éventuels liens entre les deux. Nous allons commencer par nous intéresser aux différents milieux permettant la propagation des ondes.

1 Quelques exemples de phénomènes propagatifs

1.1 Propagation d'une onde dans une corde fixée aux deux extrémités

Considérons une corde homogène de section constante, de longueur L, de masse linéique μ, fixée entre ses deux extrémités, tendue par une tension $\vec{T}$. C'est par exemple de cas d'une corde d'un instrument de musique, par exemple une guitare. Nous allons étudier la propagation unidimensionnelle d'une onde mécanique transverse dans cette corde. Soit $y(x,t)$ le déplacement du point d'abscisse x à l'instant t.

- Petits angles : l'angle $\alpha(x,t)$ que fait la tangente à la corde en chacun de ses points avec la position au repos est un infiniment petit *ie* $|\alpha(x,t)| << 1$. On se limitera par la suite au premier ordre en α.
- On négligera les effets dus au champ de pesanteur devant la force de tension appliquée à la corde. ODG : ficelle de masse $m = 1g \Rightarrow Poids = 0.01N$ tendue par une masse $M = 500g \Rightarrow T = 5N$

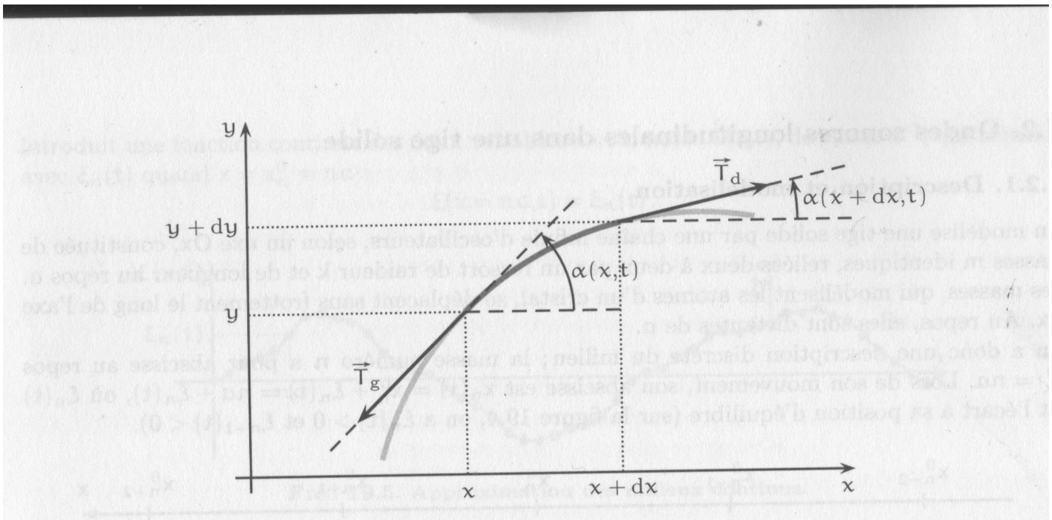


Fig. 19.3. Élément de corde.

L'élément de corde est soumis à deux forces de tension $\vec{T}_d$ (force en M exercée par la partie de la corde à droite de M sur la partie située à gauche) et $\vec{T}_g$ de la part du reste de la corde.
Appliquons la RFD à la corde :

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T}_{d/g} + \vec{T}_{g/d} \tag{1}$$

Or l'onde étant transverse, on a : $\vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{e}_y$.

Projection selon x :

$$0 = T(x+dx,t)cos(\alpha(x+dx,t)) - T(x,t)cos(\alpha(x,t))$$

Or $cos\alpha \simeq \alpha \Rightarrow T(x+dx,t) - T(x,t) = \frac{\partial T}{\partial x}dx = 0 \Rightarrow T(x,t) = T(t)$

Projection selon y :

$$\mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t)[sin(\alpha(x+dx,t)) - sin(\alpha(x,t))] \simeq T(t)[\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)] = T(t)\frac{\partial \alpha}{\partial x}dx$$

Or $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, on a alors :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Soit T_0 la tension uniforme de la corde quand elle est au repos. Lors des petits mouvements, la tension varie faiblement autour de T_0 soit $T(t) = T_0 + T_1(t)$ avec $T_1(t) << T_0$. En se limitant à l'ordre 1, on a :

$$T(t)\frac{\partial y}{\partial x} = [T_0 + T_1(t)]\frac{\partial y}{\partial x} = T_0[1 + \frac{T_1(t)}{T_0}]\frac{\partial y}{\partial x} \simeq T_0\frac{\partial y}{\partial x}$$

Finalement, on obtient l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

que l'on réécrit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0} \quad (3)$$

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ Analyse dimensionnelle :$[T_0] = kg.m.s^{-2}$, $[\mu] = kg.m^{-1} \Rightarrow [\frac{T_0}{\mu}] = m^2.s^{-2} \Rightarrow$ c est la vitesse de propagation de l'onde. ODG : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{5}{10^{-3}}} = 70m/s$
Equation linéaire : on va pouvoir appliquer le principe de superposition

On peut remarquer que les grandeurs suivantes sont liées par des relations dites de couplage :
$v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}$ et $F_y = -T_0\frac{\partial y}{\partial x}$.

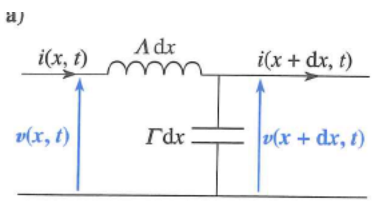
$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial t} = -T_0\frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Nous venons d'établir l'équation de propagation à 1D d'une onde mécanique transverse le long d'une corde. Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation d'une onde électrique, à travers l'étude du câble coaxial, et montrer que cela obéit au même type d'équation.

1.2 Propagation dans un câble coaxial

Nous allons maintenant nous intéresser à la propagation d'un signal dans un câble coaxial, que nous avons déjà utilisé en travaux pratique. Les mêmes câbles sont utilisés pour les télévisions ou les box internet pour le transfert de l'information. Il est possible de modéliser un tel câble avec un ligne à constante réparties *ie* que les caractéristiques électriques d'un élément de longueur dx de la ligne sont représentées par des dipôles électriques. Ce modèle est idéal dans le sens où l'on ne prend pas en compte les pertes. Γ et Λ représente respectivement la capacité linéique et l'inductance linéique du câble coaxial.



Loi des noeuds : $i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma\frac{du(x+dx,t)}{dt}dx \Rightarrow \boxed{\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -\Gamma\frac{du(x,t)}{dt}}$

Loi des mailles : $u(x,t) = u(x+dx,t) + \Lambda dx\frac{di(x,t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda\frac{di(x,t)}{dt}}$

Les grandeurs u(x,t) et i(x,t) sont les deux grandeurs couplées du problème. En utilisant les propriétés de la dérivée $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x}$, on obtient l'équation de propagation de l'onde électrique :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Gamma\Lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$: vitesse de propagation de l'onde.

La même équation régit l'évolution de i(x,t) :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$: vitesse de propagation de l'onde.

ODG : $\Gamma = \Lambda = \Rightarrow c = m/s$

Rmq : Suivant le temps, on peut faire la mesure avec le câble de 94.6m de la collection, ça prend peu de temps et permet de vérifier grossièrement la valeur de la vitesse.

Nous avons mis en place l'équation de propagation dans deux cas particuliers correspondant à une onde mécanique et une onde électrique unidimensionnelle. Nous aurions pu faire la même chose pour des ondes sonores ou électromagnétique, à 2D ou 3D : ces équations d'ondes sont appelées équation de d'Alembert. Nous allons maintenant nous intéresser à la résolution de ce type d'équation.

2 Résolution en ondes progressives

2.1 Solutions générales de l'équation de d'Alembert

Faisons le changement de variables $X = x - ct$ et $Y = x + ct$.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial X} + c\frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -c\frac{\partial}{\partial X}(-c\frac{\partial}{\partial X} + c\frac{\partial}{\partial Y}) = c^2\frac{\partial^2}{\partial X^2} - 2c^2\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y} + c^2\frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial X}(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}) + \frac{\partial}{\partial Y}(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}) = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

L'équation de d'Alembert $\frac{\partial^2 s}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ s'écrit alors :
$\frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{1}{c^2}(c^2\frac{\partial^2}{\partial X^2} - 2c^2\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y} + c^2\frac{\partial^2}{\partial Y^2}) = 0$
Soit :

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial X\partial Y} = 0} \tag{7}$$

s est la grandeur scalaire (à 1D) associée à l'onde. Par intégration sur X et Y, on trouve que

$$s(X,Y) = f(X) + g(Y) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

(f,g) deux fonctions déterminées par les conditions aux limites du problème.

Maintenant que nous avons la forme générale de l'équation de d'Alembert, nous allons nous intéresser à des solutions particulières appelées ondes planes progressives.

2.2 Ondes planes progressives et impédance caractéristique

Définition et interprétation

- **Définition :** On appelle onde progressive une onde qui se propage dans une direction repérée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, sans se déformer, à la célérité c. Son expression générale est :

$$y(M,t) = f(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{r} - ct)$$

  avec $\overrightarrow{r}$: vecteur position en M.

- **Interprétation :** y(x,t)=f(x-ct). En deux instants différents t_0 et t_1, on a :

$$y(x,t_1) = f(x - ct_1) = f([x - c(t_1 - t_0)] - ct_0 = y(x - c(t_1 - t_0), t_0)$$

  A t_1 l'onde a le même profil qu'à t_0 mais translaté de $c(t_1 - t_0)$.

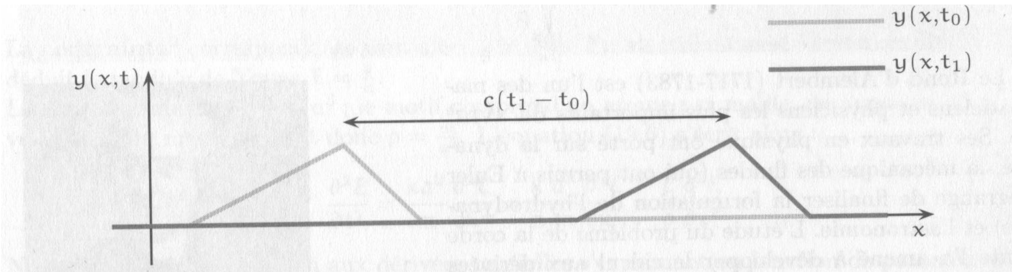


FIG. 19.7. Onde progressive $y(x,t) = f(x - ct)$ aux instants t_0 et $t_1 > t_0$.

La solution générale de l'équation de d'Alembert est la somme d'une onde se propageant vers les x croissants ($f(x-ct)$) et d'une onde se propageant vers les x décroissants ($g(x+ct)$). Maintenant que nous avons la forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert, on peut définir la relation de structure de l'onde, qui relie les grandeurs couplées du problème.

Relation de structure de l'onde dans le cas du câble coaxial

Soit une onde progressive de courant se propageant vers les x croissants *ie* $i(x,t) = f(x - ct)$. On se sert la relation de couplage :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i(x,t)}{dt} = \Lambda c f'(x - ct) \qquad (8)$$

En intégrant l'équation (8) par rapport à la variable x, on a :

$$u(x,t) = \Lambda c f(x - ct) + F(t)$$

F(t) doit être solution de l'équation de d'Alembert $\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow F(t)$ fonction affine. On veut propagation et pas divergence pour t tendant vers l'infini, soit F(t)=cte. Ce terme ne décrit pas une onde, nous le laissons de côté mais il n'est pas forcément nul. Finalement :
$u(x,t) = \Lambda c f(x - ct) = \Lambda c i(x,t) = Z_c i(x,t)$ avec $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$
Z_c est appelé impédance caractéristique du câble coaxial (ou impédance propagative). Cette impédance propagative est une grandeur intensive ne dépendant que des caractéristiques du milieu, qu'il ne faut pas confondre avec l'impédance dissipative, grandeur extensive, et qui est dans ce cas ci, la résistance du câble coaxial.
On peut montrer que pour une onde se propageant vers les x décroissants, on a la relation : $u(x,t) = -Z_c i(x,t)$. Ainsi, pour une solution générale de l'équation de d'Alembert, s'exprimant comme la somme d'une onde progressive vers les x croissants et une vers les x décroissants, on n'a pas relation de proportionnalité entre u et i mais les relations suivantes :

$$i(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

et

$$u(x,t) = Z_c[f(x - ct) - g(x + ct)]$$

ODG : $Z_c \sim 50\Omega$.

Généralisation et intérêt : Cette notion d'impédance n'est pas caractéristique des ondes électriques ou du câble coaxial. On peut également définir une impédance caractéristique dans le cas d'une corde avec $Z_c = \sqrt{T_0\mu}$. L'impédance caractéristique va intervenir dans les coefficients de réflexion et de transmission entre deux milieux distincts. Nous ne détaillerons pas ce phénomène mais si l'impédance à la jonction entre deux milieux est la même que celle du premier milieu, l'onde se propageant ne fait pas de distinction entre les deux milieux et il n'y a pas d'onde réfléchie.

Une onde étant caractérisé par le transfert d'énergie, nous allons nous intéresser à la propagation de l'énergie dans le cas d'une perturbation.

2.3 Aspect énergétique

Pour mettre en évidence la propagation de l'énergie dans le cas des ondes progressives, nous allons reprendre le cas du câble coaxial. L'énergie linëïque du câble s'écrit :

$$e = \frac{1}{2}\Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma u^2(x,t)$$

Considérons une onde plane progressive se propageant vers les x croissants. On a alors :

$$i(x,t) = f(x-ct)$$

et

$$u(x,t) = Z_c f(x-ct)$$

L'énergie linéique s'écrit alors :

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma u^2(x,t) = \frac{1}{2}\Lambda f^2(x-ct) + \frac{1}{2}\Gamma {Z_c}^2 f^2(x-ct)$$

$$e(x,t) = \boxed{\tfrac{1}{2}\Lambda f^2(x-ct)}$$

On peut même aller plus loin en faisant un bilan d'énergie sur un intervalle de temps dt, sur une épaisseur dx. Durant dt, l'énergie entrant dans le volume est égale à la variation d'énergie $\frac{\partial e}{\partial t}dxdt$. D'où :

$$P(x,t)dt - P(x+dx,t)dt = \frac{\partial e}{\partial t}dxdt$$

$$\Rightarrow \boxed{\tfrac{\partial e}{\partial t} + \tfrac{\partial P}{\partial x} = 0}$$

On obtient ainsi la relation de conservation de l'énergie régissant la corde. Plusieurs remarques sont à faire ici :

- On obtient la même forme d'équation que pour la conservation de la charge en électromagnétisme ou la conservation de la masse en mécanique des fluides
- toutefois, il ne s'agit que d'une équation idéale, dans la mesure où nous avons négligé les pertes potentielles, le caractère non parfait des conducteurs constituant le câble, les phénomènes de dispersion ..

Nous venons d'étudier les ondes progressives, beaucoup utilisées en physique pour leur simplicité. Nous allons maintenant introduire un cas particulier de ces ondes progressives, afin de simplifier encore l'étude des phénomènes propagatifs.

2.4 Les Ondes Planes Progressives Harmoniques (OPPH)

Onde progressive harmonique : Une onde plane progressive est dite harmonique si sa dépendance en temps est sinusoïdale. En notant ω la pulsation temporelle correspondante, et $\vec{k}$ la norme du vecteur d'onde, une onde plane progressive harmonique s'écrit :

$$y(M,t) = y_0 cos(wt - \vec{k}.\vec{r} + \phi)$$

Une telle onde possède une double périodicité spatiale et temporelle. La période spatiale d'une OPPH est appelée **longueur d'onde** $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ Sa période temporelle est appelée **période** $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Le couplage spatio temporel imposé par l'équation de d'Alembert fait que les deux périodes ne sont pas indépendantes. En réinjectant la forme de l'onde dans l'équation de d'Alembert, pour une OPPH unidimensionnelle, on a :

$$y(x,t) = y_0 cos(wt - kx + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow -y_0^2 k^2 cos(wt - kx + \phi) + \frac{1}{c^2} y_0^2 \omega^2 cos(wt - kx + \phi) = 0$$
$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{w^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c} \text{ Relation de dispersion}}$$

Intérêt des OPPH : Les OPPH forment une base de solution de l'équation de d'Alembert. En effet, l'équation de d'Alembert étant une équation aux dérivées partielles linéaires, toute combinaison linéaire de solution est donc une solution. L'analyse de Fourier permettant de décomposer toute fonction périodique sous la forme d'une somme de sinusoïde, les OPPH apparaissent comme une base dans laquelle on va décomposer la solution générale de l'équation de d'Alembert.
Limitation : Les OPPH n'ont que peu de sens physique car sont d'extension spatiale et temporelle infinie et donc d'énergie infinie. En revanche comme elles forment une base des ondes planes, on étudie seulement les OPPH et on reconstitue les ondes par superposition.

Nous nous sommes intéressé dans un premier temps à un certain type de solution qui couplaient le temps et la position. Pour autant, elles ne permettent pas d'expliquer ce qu'il se passe pour une corde tendue aux deux extrémités (faire la manip sur la paillasse avec la corde de melde). Nous allons maintenant voir qu'il existe des solutions découplant position et temps, et qui sont les ondes stationnaires.

3 Ondes stationnaires

3.1 Mise en équation pour une corde vibrante

On considère que l'on peut découpler la position et le temps, c'est à dire que la déformation y(x,t) de la corde s'écrit : $y(x,t) = F(x)G(t)$.En réinjectant dans l'équation de d'Alembert, on trouve :

$$y(x,t) = y_0 cos(kx + \psi_0) cos(\omega t + \phi_0)$$

- y_0,ψ_0,ϕ_0 sont déterminés par les CL et les CI.
- k et ω vérifie la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.
- Il n'y plus de propagation : on observe une onde stationnaire, l'onde semble osciller sur place sinusoidalement, avec une ampliture $y_0 cos(kx + \psi_0)$ dépendant de la position. A ce moment, on sent qu'il risque de se passer des choses particulières si l'amplitude de l'onde s'annule pour certaines positions.
- Les points / $y(x,t) = 0$ $\forall t$ sont appelés noeuds de vibration. Le plan d'onde correspondant est appelé plan nodal. Les points / l'amplitude $y_0 cos(kx + \psi_0)$ est maximale sont appelés les ventres de vibrations (plan ventrale).

Lien entre ondes progressives et ondes stationnaires ?

$$y(x,t) = y_0 cos(kx + \psi_0) cos(\omega t + \phi_0)$$

En utilisant la trigonométrie, on a $cosacosb = \frac{1}{2}[cos(a+b) + cos(a-b)]$. D'où :

$$y(x,t) = \frac{y_0}{2}[cos(\omega t + kx + \phi_0 + \psi_0) + cos(\omega t - kx + \phi_0 - \psi_0)]$$

$\Rightarrow$ Une onde stationnaire peut toujours s'écrire comme la somme de deux ondes progressives, l'une vers les x croissants et une vers les x décroissants. Par un raisonnement analogue, toute onde progressive harmonique de la forme $y(x,t) = y_0 cos(wt - kx)$ peut s'écrire comme la superposition de deux ondes stationnaires en quadrature de phase :$y(x,t) = y_0 cos(wt) cos(kx) + y_0 sin(wt) sin(kx)$ (avec la formule trigonométrique : $cos(a-b) = cosacosb + sinasinb$).
A la vue de l'équivalence entre les deux descriptions, nous sommes en droit de nous demander quelle type de description choisir. Pour cela, il faut se baser sur les conditions aux limites imposées au système. Si Cl/ $y(x,t) = 0$ $\forall$t, correspond à un noeud de vibration : description en OS.

Modes propres d'une corde vibrante fixée aux deux extrémités

On commence par regarder les CL : $y(0,t) = 0 = y(L,t)\ \forall t$

$$\begin{cases} cos(\psi_0) = 0 \text{ (c)} \\ cos(kL + \psi_0) = 0 \text{ (d)} \end{cases}$$

(c) impose $\psi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$. On choisit $\psi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $y(x,t) = y_0 sin(kx)cos(\omega t + \phi_0)$.
(d) devient $sin(kL) = 0 \Leftrightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}} \Leftrightarrow L = \frac{n\lambda_n}{2}$
La relation de dispersion $\omega = kc$ impose : $\boxed{\omega_n = \frac{nc\pi}{L}}$ et $L = \frac{n\lambda}{2}$. Les pulsations spatiales et temporelles prennent des valeurs discrètes. On obtient ainsi un ensemble discret de solution de l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante :
$\boxed{y_n(x,t) = y_{0n} sin(\frac{n\pi x}{L}) cos(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n)}$
Une telle solution est appelée **mode propre de vibration.**

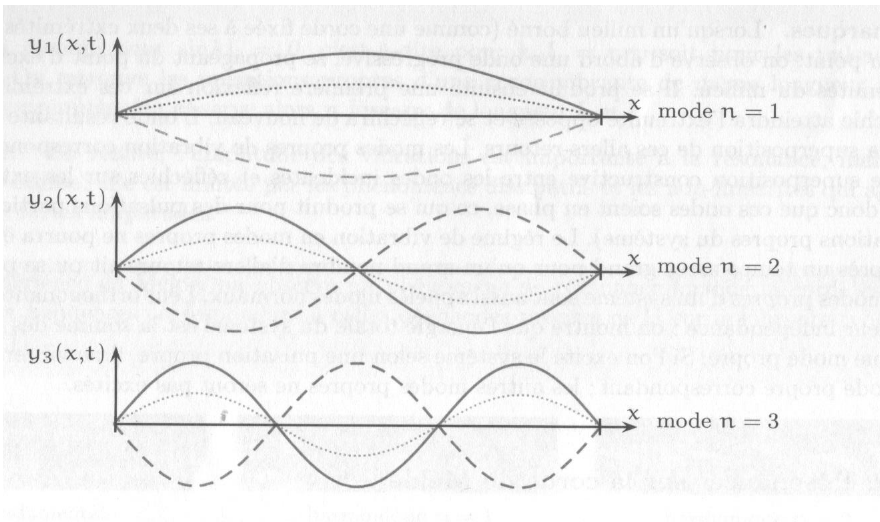


FIG. 19.9. Modes propres d'une corde vibrante.

- n=1 : $y_1(x,t) = y_{01} sin(\frac{\pi x}{L}) cos(\frac{\pi ct}{L} + \phi_1))$, s'annule pour $x = 0$ et $x = L$: 1 seul ventre pour deux noeuds : mode fondamental
- n=2 : $y_2(x,t) = y_{02} sin(\frac{2\pi x}{L}) cos(\frac{\pi ct}{L} + \phi_2))$, s'annule pour $sin\frac{2\pi x}{L} = 0\ [\pi]$ *ie* $x = 0\ [\frac{L}{2}]$: 2 ventres de vibration, 3 noeuds

Un mode propre est tel que tous les points vibrent en phase ou en opposition de phase. Le mode correspondant à n=1 est appelé **mode fondamental**. Une mode $n > 1$ est appelé **harmonique de rang n**.
L'équation de d'Alembert étant linéaire, le mouvement général d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités s'écrit comme la superposition de ses modes propres :

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} sin\frac{n\pi x}{c} cos(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n)}$$

Si l'on excite un système selon une pulsation propre, il ne vibrera que selon le mode propre correspondant : les autres modes propres ne seront pas excités.

Rmq : Lorsqu'un milieu bornée est excité en un point, on observe d'abord un onde progressive, qui va se réfléchir une première fois sur les extrémités. L'onde résultante sera la superposition de ces aller retours. Les modes propres correspondent au cas d'une superposition constructives entre les ondes incidentes et réfléchies sur les extrémités, il faut donc que les ondes soient en phase ce qui ne se produit que pour certaines pulsations particulières : les pulsations propres du système. Le régime de vibration en mode propre ne pourra être observé qu'après un temps assez grand pour qu'un nombre suffisant d'aller et retour ait pu se produire.

3.2 Energie des modes

L'énergie linéique d'une corde vibrante s'écrit, par analogie avec le câble coaxial,

$$e = \frac{1}{2}(\frac{\partial y}{\partial t})^2 + \frac{T_0}{2}(\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

Pour un mode n, on a : $y_{0n} sin(\frac{n\pi x}{L}) cos(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n)$

- $(\frac{\partial y_n}{\partial x})^2 = (\frac{n\pi}{L})^2 (y_{0n} cos(\frac{n\pi x}{L}) cos(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n))^2 = k_n^2 y_{0n}^2 cos^2(\frac{n\pi x}{L}) cos^2(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n)$
- $(\frac{\partial y}{\partial t})^2 = w_n^2 y_{0n}^2 sin^2(\frac{n\pi x}{L}) sin^2(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n)$

L'énergie **linéique** d'un mode s'écrit donc : $e_n(x,t) = \frac{1}{2}(\frac{\partial y_n}{\partial t})^2 + \frac{T_0}{2}(\frac{\partial y_n}{\partial x})^2 = \frac{1}{2}\mu w_n^2 y_{0n}^2 sin^2(\frac{n\pi x}{L}) sin^2(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n) + \frac{1}{2} T_0 k_n^2 y_{0n}^2 cos^2(\frac{n\pi x}{L}) cos^2(\frac{n\pi ct}{L} + \phi_n)$

Si l'on veut calculer l'énergie totale d'un mode, on a : $E_n = \int_0^L e_n(x,t) dx$
Comme $\int_0^L cos^2(k_n x) dx = \int_0^L sin^2(k_n x) dx = \frac{L}{2}$, on obtient :

$$E_n = \frac{1}{2}\mu w_n^2 y_{0n}^2 \frac{L}{2} sin^2(\omega_n t + \phi_n) + \frac{1}{2} T_0 k_n^2 y_{0n}^2 \frac{L}{2} cos^2(\omega_n t + \phi_n)$$

Or $\omega_n^2 = k_n^2 c^2 = k_n^2 \frac{T_0}{\mu}$, d'où :

$$E_n = \frac{1}{4} y_{0n}^2 L T_0 k_n^2 \Longrightarrow \boxed{E_n = \frac{1}{4} y_{0n}^2 \frac{n^2\pi^2}{L} T_0 = constante}$$

L'énergie des modes est une constante, indépendante du temps ! Sans apport d'énergie ni processus dissipatif, l'énergie d'une mode propre de la corde ne varie pas au cours du temps. On peut montrer que l'énergie totale dans tous les modes est la somme de l'énergie de chaque mode, à savoir :

$$E = \sum_n E_n$$

3.3 Application : la corde de Melde

On montre et détaille le montage expérimental. Montre les différents modes que l'on peut obtenir, sans commentaire sur les fréquences, on reviendra dessus plus tard).

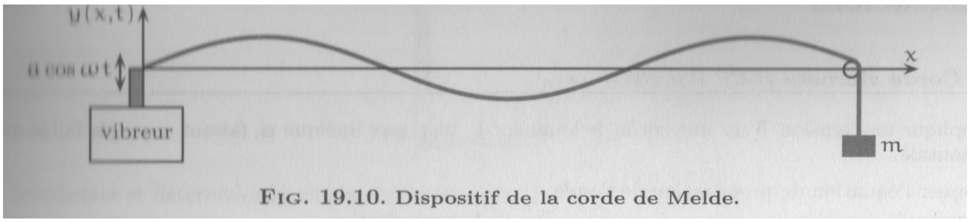


FIG. 19.10. Dispositif de la corde de Melde.

Nous ne sommes plus dans le cas des oscillations libres sur une corde vibrante car les conditions aux limites sont différentes. En effet, les CL sont dans ce cas :

$$y(0,t) = acos(\omega t)$$

et

$$y(L,t) = 0$$

En $x = L$, on a un noeud de vibration on cherche donc la solution sous la forme d'une onde stationnaire :

$$y(x,t) = y_0 cos(\omega t + \phi) cos(kx + \psi)$$

Les CL donnent :

$$y(0,t) = acos\omega t = y_0 cos(\omega t + \phi) cos\psi \Rightarrow \phi = 0 \text{ et } a = y_0 cos\psi$$

$$y(L,t) = 0 = acos(\omega t) cos(kL + \psi)$$

$\Rightarrow cos(kL+\psi)=0 \Rightarrow kL+\psi=(n+\frac{1}{2})\pi \Rightarrow \boxed{\psi = n\pi+\frac{\pi}{2}-kL}$
Ainsi, $a = y_0 cos\psi = y_0 cos(n\pi + \frac{\pi}{2} - kL) = y_0(-1)^n sin(kL)$ et

$$y(x,t) = y_0 cos\omega t cos(k(x-L)+n\pi+\frac{\pi}{2}) = y_0 cos\omega t cos(k(x-L)+\frac{\pi}{2})cos(n\pi) = \frac{a}{(-1)^n sin(kL)} cos\omega t(-1)^n sin(k(L-x))$$

$$\boxed{y(x,t) = \frac{a}{sin(kL)} cos\omega t sin(k(L-x))}$$

On a une onde stationnaire, dont l'amplitude diverge dès lors que $sin(kL) = 0$ et donc pour $k_n = \frac{n\pi}{L}$ ou encore $\omega_n = \frac{nc\pi}{L}$: il y a donc un phénomène de résonance qui se produit. On retrouve les pulsations propres d'une corde vibrante de même longueur et fixée à ses deux extrémités.

☕

Montrer que en changeant la fréquence, on voit l'apparition de différents modes. Calculer la valeur théorique de la fréquence propre correspondante et comparer avec l'expérience $f = \frac{c}{2L} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}\frac{1}{2L}$ $(T_0 = mg))$

En pratique l'amplitude des ventres n'est pas infinie. En effet, on sortirait du cadre de l'approximation $\alpha << 1$: les équations ne sont plus les mêmes.

Conclusion

Au cours de cette leçon, nous nous sommes intéressés aux phénomènes de propagation afin de comprendre les équations les régissant. Nous avons alors résolu ces équations en introduisant les notions d'ondes progressives et d'ondes stationnaires tout en remarquant le lien qui les unit. Nous nous sommes limités à certaines hypothèses (petites déformations, pas de perte, pas de phénomènes dissipatifs), mais il semble évident que ces aspects devront être étudiés afin de mieux comprendre la physique des ondes.

Questions et remarques :