

LP24 - ONDES ACOUSTIQUES

12 février 2016

””

Karen Monneret & Marianne Berland

,

Niveau : L3

Commentaires du jury

2014 : Cette leçon peut être l’occasion de traiter les ondes acoustiques dans les fluides ou dans les milieux périodiques, certes, mais elle peut aussi être l’occasion de traiter les deux cas qui donnent lieu à des phénoménologies très différentes.

2013 : [A propos du nouveau titre] Le candidat est libre d’étudier les ondes acoustiques dans un fluide ou dans un solide élastique.

Jusqu’en 2013, le titre était : Ondes acoustiques dans les fluides

Bibliographie

- *Physique Tout-en-un PC*, **Sanz**
- *Physique PC*, **Renvoizé**
- *Ondes MP*, **Brebec**

→ Les deux premiers livres se valent. Sanz donne pas mal d’ODG. Le troisième est intéressant pour des analogies.

Prérequis

- thermodynamique ;
- mécanique des fluides ;
- ondes électromagnétiques ;
- ondes acoustiques dans les solides ;
- ondes mécaniques ;

Table des matières

1	Modélisation	2
1.1	Hypothèses	2
1.2	Equation du problème et linéarisation	3
2	Propagation des ondes acoustiques.	5
2.1	Ondes planes	5
2.2	Impédance acoustique	5
2.3	Aspets énergétiques	6
2.4	Intensité sonore.	7
3	Réflexion et Transmission d’une OAPP sous incidence normale.	7
3.1	Conditions aux limites.	8
3.2	Coefficients de réflexion et transmission	8
3.3	Application : l’échographie.	9

Introduction

Son : élément de propagation d'information que nous utilisons le plus couramment (en plus de la lumière).

EXPÉRIENCE : cf. HPrépa, Ondes

Le montage est représenté en figure 1.

Régression linéaire : $c_s = 340$ m/s

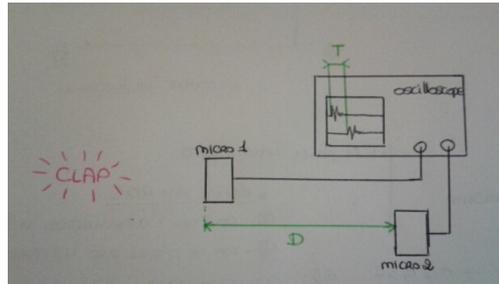


FIGURE 1 – Montage expérimentale pour retrouver la célérité du son dans l'air.

Comment le signal sonore se propage d'un émetteur à un autre ? (cf. SANZ PC)

→ besoin d'un milieu matériel (*possible à faire EXPERIENCE : cloche sous vide*)

Le milieu est un milieu élastique : les particules de fluide au voisinage de l'objet (HP) y voient leur volume et leur masse volumique varier. → modification de volume → modification de la pression → mise en mouvement des particules voisines → et ainsi de suite → génère une Onde Acoustique (OA).

→ La propagation des OA résulte du couplage entre les variations de pression et déplacement des particules de fluides.

Nous allons alors voir dans cette leçon, comment mettre en équation ce phénomène. Nous verrons que ces ondes sont régies par la même équation que celle de la corde vibrante. Puis nous en verrons les solutions, pour ensuite finir sur une application des ondes acoustiques : l'échographie.

1 Modélisation

1.1 Hypothèses

cf. Sanz PC + HPrépa Ondes

- fluide parfait = viscosité, conduction thermique négligées → les transformations peuvent être considérées réversibles.
- pas de pesanteur
- approximation acoustique : au repos le fluide est caractérisé par une pression uniforme P_0 , une masse volumique uniforme μ_0 et une vitesse particulaire nulle.

L'onde sonore est définie comme une perturbation, de faible amplitude, par rapport à cet équilibre. L'état du fluide devient :

- $P(M, t) = P_0 + p_1(M, t)$ avec $|p_1(M, t)| \ll P_0$
- $\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$ avec $|\mu_1(M, t)| \ll \mu_0$
- $\vec{u}(M, t) = \vec{0} + \vec{u}_1(M, t)$ avec $||\vec{u}_1|| \ll c_s$

De plus la moyenne temporelle de ces perturbations est nulle : $\langle p_1(M, t) = 0 \rangle$, $\langle \mu_1(M, t) = 0 \rangle$ et $\langle \vec{u}_1(M, t) = \vec{0} \rangle$.

→ On pourra alors faire des DL d'ordre 1.

- perturbation adiabatique : Les petits mouvements du fluide sont "rapides" : les échanges de chaleur n'ont donc pas "le temps" de se produire.
- durée caractéristique de diffusion thermique sur une longueur L : $T_{diff}^* = \frac{L^2}{D_{th}}$
- durée caractéristique de variation des grandeurs sur L : $T^* = \frac{L}{c}$
- coefficient de diffusion thermique de l'air $D_{th}(air) = 2.10^5 m^2.s^{-1}$
- $c(air) \simeq 340 m.s^{-1}$
- $\frac{T^*}{T_{diff}^*} \ll 1$ ce qui équivaut à $f \ll \frac{c^2}{D_{th}}$ soit $f \ll 6$ GHz. L'adiabaticité est respecté car f est comprise entre 20 Hz et 20 kHz. Cela est aussi valable pour les ultrasons. Cela équivaut à dire que $\lambda \gg l$ avec l le libre parcours moyen. Ainsi comme la longueur d'onde est très grande devant le libre parcours moyen, on suppose la perturbation adiabatique.

Transformation réversible et adiabatique : Cette transformation est alors isentropique et le coefficient de compressibilité est $\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$.

1.2 Equation du problème et linéarisation

cf. Sanz PC

système d'équation :

- équation de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{u}) = 0 \tag{1}$$

- équation du mouvement (3D) : Equation d'Euler

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{grad}) \vec{u} \right) = - \vec{grad} P \tag{2}$$

- Equation d'état : bilan isentropique

$$\mu = \mu(P) \tag{3}$$

Etudions l'équation 1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} + (\mu_0 + \mu_1) \text{div}(\vec{u}_1) + (\vec{grad} \mu) \cdot \vec{u}_1 &= 0 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{u}_1) &= 0 \end{aligned}$$

Même méthode pour l'équation 2. Nous pouvons également le voir par ODG :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right\| &\approx \frac{U}{T} \\ \|(\vec{u} \cdot \vec{grad}) \vec{u}\| &\approx \frac{U^2}{L} \\ \frac{\|(\vec{u} \cdot \vec{grad}) \vec{u}\|}{\left\| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right\|} &\approx \frac{U}{LT} = \frac{U}{c} \ll 1 \end{aligned}$$

La perturbation vitesse est négligeable devant la célérité.

Pour l'équation 3, le calcul est très bien développé dans le **CAP PREPA**.

$$\begin{aligned} \chi_S &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{S, \text{repos}} \\ d\mu &= \frac{\partial \mu}{\partial P} dP = \mu \chi_S dP \\ \dots &\longrightarrow \mu_1(M, t) = \mu_0 \chi_S p_1(M, t) \end{aligned}$$

Les équations linéarisées sont :

$$- 1 \text{ donne : } \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \vec{div}(\vec{u}_1) = 0 \quad (4)$$

$$- 2 \text{ donne : } \quad \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \right) = - \vec{grad}(p_1) \quad (5)$$

$$- 3 \text{ donne : } \quad \mu_1 = \mu_0 \chi_S p_1 \quad (6)$$

En éliminant μ_1 (6 dans 4), on obtient un système d'équation couplées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} &= - \frac{1}{\chi_S} \vec{div} \vec{u}_1 \\ \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} &= - \frac{1}{\mu_0} \vec{grad}(p_1) \end{aligned}$$

A partir de ce système d'équations, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} &= c_s^2 \Delta p_1 \\ \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} &= c_s^2 \Delta \vec{u}_1 \end{aligned}$$

Cette équation s'apparente à l'équation de d'Alembert avec la célérité du son de formule : $c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$.

Analyse dimensionnelle : $[\chi_S] = M^{-1} L^{+1} T^{+2}$ et $[\mu_0] = M L^{-3}$. D'où $[c_S] = L T^{-1}$.

Célérité dans différents milieu :

- gaz : fluide assimilé à un gaz parfait validant la loi de Laplace $\frac{P}{\mu^\gamma} = cte$.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= \gamma \frac{d\mu}{\mu} \\ \frac{d\mu}{dP} &= \frac{\mu_0}{\gamma P_0} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \end{aligned}$$

A 25 degré, on retrouve $c=346 \text{ m.s}^{-1}$. En accord avec l'expérience introductive. \rightarrow Hypothèse isentropique validée.

- liquide $\chi_S = 5.10^{-10} Pa^{-1}$ et $\mu_{eau} = 1000 kg.m^{-3}$. D'où $c=1410 \text{ m/s}$.

- solide $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$ avec E le module d'Young. Cas pour le fer : $E=190 \text{ GPa}$ et $\mu=7875 \text{ kg.m}^{-3} \rightarrow c=4910 \text{ m/s}$.

- On observe que $c_{solide} > c_{liquide} > c_{gaz}$

TRANSITION : Maintenant que nous avons établi l'équation de propagation des ondes acoustiques, résolvons cette équation.

2 Propagation des ondes acoustiques.

2.1 Ondes planes

cf. Sanz PC

L'équation de propagation est à priori à 3 dimensions. Si on est suffisamment loin de la source, on peut approximer des surfaces d'ondes à des plans perpendiculaires à la direction de propagation. on fait alors l'approximation des ondes planes, propagation unidirectionnelle.

Nous savons que la solution de l'équation de D'Alembert à une dimension peut se décomposer en somme d'ondes planes progressives (OPP). Fixons la direction de propagation selon \vec{u}_x . On a alors :

$$p_1(M, t) = f(t - x/c) + g(t + x/c)$$

avec f une OPP allant dans les x croissants et g, une OPP allant dans les x décroissants.

De plus, par l'équation d'Euler, on voit que \vec{u}_1 est selon la direction de propagation : on dit que l'onde est longitudinale.

\vec{u} et p sont couplées. Ainsi il ne faut pas résoudre leur équation séparément. Voyons alors la relation qui les relie.

2.2 Impédance acoustique

cf. Sanz PC

système couplé :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} &= c_s^2 \Delta p_1 \\ \frac{\partial^2 \vec{u}_1}{\partial t^2} &= c_s^2 \Delta \vec{u}_1\end{aligned}$$

Pour une OPP x croissants :

$$\begin{aligned}p_1(M, t) &= f(t - x/c) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \frac{-1}{c} f'(t - x/c) \\ u(x, t) &= \frac{1}{\mu_0 c} f(t - x/c) + h(x) (= 0) \\ u(x, t) &= \frac{1}{\mu_0 c} p_1(x, t)\end{aligned}$$

On obtient alors un facteur de proportionnalité qui est défini par $Z_a = \frac{p_1}{u_1} = \mu_0 c$, nommée l'impédance acoustique en unité $kg.m^{-2}.s^{-1}$.

De même pour une OPP x décroissants : $\frac{p_1}{u_1} = -\frac{1}{\mu_0 c} = -Z_a$.

ODG : $Z_{a,solide} > Z_{a,liquide} \gg Z_{a,gaz}$.

- $Z_{eau} = 1.4.10^6 SI$

- $Z_{air} = 440 SI$

Nous verrons à quoi sert cette impédance à la fin de la leçon.

2.3 Aspets énergétiques

Cap Prépa PC

Bilan local d'énergie sonore.

L'onde est caractérisée par :

- une onde vitesse traduisant un déplacement des particules de fluides → on peut lui associer une densité d'énergie cinétique.
- une onde de pression traduisant une compression ou une dilatation des particules de fluides. → On lui associe une densité d'énergie potentielle résultant du travail des forces de pression.

→ La propagation d'une onde sonore se traduit par une propagation d'une énergie mécanique. On peut ainsi, comme on a vu pour les ondes électromagnétiques, y associer un vecteur densité de courant énergétique $\vec{\Pi}$.

puissance transmise à travers une surface orientée Σ :

$$P(t) = \iint_{M \in \Sigma} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

Conservation de l'énergie : $dE = \delta E_{ech}$

La variation de l'énergie mécanique totale pendant dt doit être égale à l'énergie échangée par le système pendant cette même durée. (convention d'orientation : + pour une grandeur reçue).

- énergie reçue pdt dt sur une surface fermée : $\delta E_{ech} = -P(t)dt = -dt \iint_{M \in \Sigma} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}$
- densité d'énergie volumique : $E(t) = \iiint_{M \in V} e(M, t) d\tau$

V étant fixé, on a alors : $dE = E(t + dt) - E(t) = \iiint_{M \in V} \frac{\partial e(M, t)}{\partial t} d\tau dt$.

La conservation de l'énergie devient (avec le théorème d'Ostrogradski) :

$$\begin{aligned} \iiint_{M \in V} \left[\frac{\partial e(M, t)}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}(M, t)) \right] d\tau &= 0 \\ \frac{\partial e(M, t)}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}(M, t)) &= 0 \end{aligned}$$

vecteur densité de courant énergétique.

Étude des forces de pression exercée sur la surface de la particule de fluide :

$$d\vec{F} = (P_0 + p_1(M, t)) \cdot d\vec{S}$$

La surface se déplace avec le fluide à la vitesse $\vec{u}_1(M, t)$. La puissance de la force de pression totale est alors :

$$dP_T(t) = \vec{F} \cdot \vec{u}_1(M, t) = P_0 \vec{u}_1 \cdot d\vec{S} + p_1(M, t) \vec{u}_1 \cdot d\vec{S}$$

Dans l'approximation acoustique le premier terme en moyenne est nul. Ainsi il reste que :

$$\begin{aligned} P_T(t) &= \iint_{M \in \Sigma} p_1(M, t) \vec{u}_1 \cdot d\vec{S} \\ \vec{\Pi}(M, t) &= p_1(M, t) \vec{u}_1(M, t) \end{aligned}$$

Ce vecteur densité de courant énergétique a pour unité $W \cdot m^{-2}$.

densité volumique d'énergie sonore.

On a maintenant : $\frac{\partial e(M,t)}{\partial t} + \text{div}(p_1(M,t)\vec{u}_1(M,t)) = 0$.

Regardons les équations linéarisées : En multipliant l'équation 5 par \vec{u}_1 et en mélangeant 6 dans 4 puis en la multipliant par p_1 , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 u_1^2 + \frac{1}{2} \chi_{SP1} p_1^2 \right) + \text{div}(p_1 \vec{u}_1) = 0$$

Par identification, le premier terme est la densité volumique d'énergie cinétique du fluide et le deuxième terme est la densité volumique d'énergie potentielle emmagasinée par le fluide sous l'effet des forces de pression.

2.4 Intensité sonore.

cf. Sanz PC

Intensité sonore : puissance moyenne par unité de surface transportée par l'onde [$W.m^{-2}$]. Il est peut considéré comme le flux moyen du vecteur de Poynting sonore à travers une surface orthogonale à la propagation \vec{n} :

$$I = \langle \Pi \rangle = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{n} \rangle$$

Les sons variant d'un facteur 10^{12} , on utilise une échelle logarithmique :

$$I_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

avec $I_0 = 10^{-12} W.m^{-2}$ l'intensité de référence correspondant au seuil d'audibilité pour une fréquence voisine de 4000 Hz. C'est l'intensité minimale détectée par l'oreille humaine.

ODG :

- seuil de douleur : 120 dB;
- seuil d'audibilité : 0 dB
- ronronnement d'un chat : 15 dB
- conversation normale : 60 dB
- boîte de nuit : 130 dB

TRANSITION : Maintenant que nous avons vu les caractéristiques des ondes sonores, regardons leur application, leur fonction lors de la transmission et réflexion d'onde.

3 Réflexion et Transmission d'une OAPP sous incidence normale.

cf. Sanz PC

Système étudié : interface entre deux milieux à $x=0$. Le milieu (1) a une impédance Z_1 et le milieu (2) Z_2 . Il existe une onde incidente, réfléchiée et transmise définie telle que :

- onde incidente : $p_i(x,t) = f(t - x/c)$ et $v_i = \frac{1}{Z_1} f(t - x/c)$
- onde réfléchiée : $p_r(x,t) = g(t + x/c)$ et $v_r = \frac{-1}{Z_1} g(t + x/c)$
- onde transmise : $p_t(x,t) = h(t - x/c)$ et $v_t = \frac{1}{Z_2} h(t - x/c)$

3.1 Conditions aux limites.

- continuité de la vitesse : pas de décollement entre les deux milieux et pas de mélange des deux milieux. \rightarrow continuité de la composante normale à la surface \rightarrow continuité de la vitesse elle-même. On a alors

$$\frac{1}{Z_1}(f(t) - g(t)) = \frac{1}{Z_2}h(t)$$

- continuité de la pression (admis) :

$$f + g = h$$

3.2 Coefficients de réflexion et transmission

En amplitude

$$r_u = \frac{u_r(0, t)}{u_i(0, t)}$$

$$t_u = \frac{u_t(0, t)}{u_i(0, t)}$$

Calcul de r_u :

$$\frac{1}{Z_1}(f - g) = \frac{1}{Z_2}(f + g)$$

$$\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}\right)f = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)g$$

$$r_u = \frac{f}{g} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

De la même façon : $t_u = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$.

On observe que $r_p = -r_u$ et $t_p = +\frac{Z_2}{Z_1}t_u$.

Commentaires :

- t_p et t_u réels positifs : les ondes incidentes et transmises sont toujours en phase.
- $Z_2 > Z_1$ alors $r_p > 0$ et $r_u < 0$: onde de pression i et r en phase et onde de vitesse i et r en opposition de phase.
- $Z_2 < Z_1$ inverse que précédent
- $Z_2 = Z_1$ pas d'onde réfléchie : on parle d'adaptation d'impédance.
- $Z_2 \gg Z_1$, $r_p = 1$ et $r_u = -1$: réflexion sur un mur.
- $Z_1 \gg Z_2$: réflexion sur un milieu au repos.

En énergie

$$R = \frac{\langle \Pi_r(\vec{0}, t) \cdot \vec{u}_x \rangle}{\langle \Pi_i(\vec{0}, t) \cdot \vec{u}_x \rangle}$$

$$T = \frac{\langle \Pi_t(\vec{0}, t) \cdot \vec{u}_x \rangle}{\langle \Pi_i(\vec{0}, t) \cdot \vec{u}_x \rangle}$$

On obtient :

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Avec la relation de conservation d'énergie : $R+T=1$.

On en conclut alors que pour avoir une transmission énergétique satisfaisante, il faut que les deux milieux aient des impédances acoustiques voisines.

3.3 Application : l'échographie.

cf. CAP PREPA exercice

- $Z_{air} = 440 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
- $Z_{tissu} = 1.62.10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
- $Z_{glycerine} = 2.42.10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$

On voit que $R(air/tissu) \approx 1$. Ainsi les ultrasons ne sont pas envoyés dans le corps. On en déduit qu'il est nécessaire d'utiliser un gel ayant une impédance voisine de celle de la peau : il en est le cas de la glycérine.

EXPERIENCE : observation de l'adaptation d'impédance. Emetteur-Récepteur dans l'air et dans la glycérine.

Conclusion

Dans cette leçon, nous avons étudié les ondes acoustiques et vu qu'elles étaient également régi par l'équation de d'Alembert. Cette propagation est expliquée par le couplage entre la pression et la vitesse des particules de fluide. Nous avons vu les solutions en ondes planes progressives et la relation liant ces deux grandeurs couplées. Nous avons pu ainsi définir les coefficients de réflexion et transmission et leur application dans l'adaptation d'impédance pour l'échographie.

Nous pouvons également étudier d'autres types d'ondes comme les ondes stationnaires et voir dans quel domaine elles s'appliquent.