

LP25 – ONDES ACOUSTIQUES.

20 février 2017

Antoine Essig & Louisiane Devaud

"Grand-mère pourquoi as-tu de si grandes oreilles ? C'est pour mieux t'entendre mon enfant."

LACERNELLA RUBRA ET CANIS LUPUS

Niveau : L2

Commentaires du jury

2014 : Cette leçon peut être l'occasion de traiter les ondes acoustiques dans les fluides ou dans les milieux périodiques, certes, mais elle peut aussi être l'occasion de traiter les deux cas qui donnent lieu à des phénoménologies très différentes.

2013 : [À propos du nouveau titre] Le candidat est libre d'étudier les ondes acoustiques dans un fluide ou dans un solide élastique.

Jusqu'en 2013 le titre était : *Ondes acoustiques dans les fluides*.

2011, 2012, 2013 : Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le modèle limite de l'onde plane progressive harmonique et de la comparer éventuellement à l'onde sphérique.

Jusqu'en 2008 le titre était : *Ondes sonores dans les fluides*.

2008 : L'aspect énergétique est trop souvent négligé. L'approximation acoustique est souvent mal dégagée. Pour 2009, le terme sonore est remplacé par le terme acoustique pour indiquer qu'on peut s'intéresser à des signaux non audibles par l'homme.

2007 : L'aspect énergétique est souvent négligé. On remarquera que les ondes sonores ne sont pas toutes planes progressives harmoniques.

Jusqu'en 2003 le titre était : *Ondes sonores dans les fluides. Approximation acoustique. Aspect énergétique*.

1999 Est-il vraiment indispensable de se placer d'emblée dans le cadre formel de la mécanique des fluides ? Un modèle unidimensionnel et scalaire n'est pas sans intérêt pédagogique. Le développement de l'aspect énergétique doit faire apparaître une densité d'énergie et un vecteur de propagation.

Bibliographie

- ↗ *Sanz PC* → La base
- ↗ *Cap prépa ondes* → Introduction de χ_s
- ↗ *Hprépa* → Retour sur l'hypothèse acoustique
- ↗ *Bouloumié* → Amortissement par viscosité et cisaillement
- ↗ *Garing* → causes d'amortissement (bonus)

Préquis

- Équation de D'Alembert et ses solutions
- Équation de diffusion
- Mécanique des fluides
- Notions de thermodynamique

Expériences

- ☞ Oscillations d'une bougie
- ☞ Cloche à vide, facultatif
- ☞ Mesure de la célérité du son dans l'air

Table des matières

1	Modèle de la propagation du son dans les fluides	3
1.1	Approximation acoustique	3
1.2	Équation de propagation	4
1.3	Retour sur les hypothèses	4

2 Propriétés énergétiques et propagation	5
2.1 Ondes planes progressives harmoniques	5
2.2 Aspect énergétique	6
3 Influence de la viscosité	8
3.1 Amortissement	8
3.2 Cisaillement	8

Introduction

Nous parlons quotidiennement. On nous répond. C'est donc bien que nous pouvons transmettre une information qui est captée par son destinataire. Cette information est communément qualifiée de son. Mais qu'est-ce exactement ? Et comment se propage-t'il ?

Nous pouvons alors réaliser une petite expérience :

Oscillations d'une bougie (ou cloche à vide)



⊖ 2 minutes

Matériel

- Micro (P74.29)
- Ampli de puissance (P47.5)
- GBF
- Bougie
- Caméra

On envoie un signal de quelques Hertz dans le micro et on observe les mouvements de la flamme. **Le son nécessite un milieu matériel pour se propager.**

Dans cette leçon nous allons nous intéresser à la vitesse de propagation du son, son intensité, ses causes d'amortissement... Un modèle théorique nous permettra donner des réponses et la validité des hypothèses de ce dernier seront vérifiées.

1 Modèle de la propagation du son dans le fluides

1.1 Approximation acoustique

Dans notre étude nous allons considérer un fluide parfait au repos. On caractérise ce dernier par p_0 , μ_0 et $\vec{v}_0 = \vec{0}$. Le son est une perturbation par rapport à l'état d'équilibre caractérisé par P_1 , sur-pression acoustique ; \vec{v}_1 , sur-vitesse ; μ_1 , sur-densité. On considère les variations par rapport à l'état d'équilibre comme des infiniment petits du premier ordre et de valeurs moyennes temporelles nulles.

Soit :

- $p = p_0 + p_1$, $p_1 \ll p_0$
- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, $\vec{v}_1 \ll$ vitesse caractéristique à déterminer
- $\mu = \mu_0 + \mu_1$, $\mu_1 \ll \mu_0$

Les équations que nous possédons sont :

- La conservation de la masse : $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$ (une équation scalaire)
- L'équation d'Euler : $\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} p$ en l'absence de forces volumiques (une équation vectorielle, soit trois scalaires)

Or nous avons cinq inconnues (p_1 , \vec{v}_1 , μ_1). Il nous manque donc une équation.

Pour cela on s'intéresse au lien entre la masse volumique et la pression. On écrit $\mu = f(p)$. Soit $\mu_0 + \mu_1 = f(p_0 + p_1) = f(p_0) + f'(p_0)p_1$ qui se simplifie en $\mu_1 = f'(p_0)p_1 = \frac{d\mu}{dp}(p_0)p_1 = \mu_0 \chi_0 p_1$ car $\chi_0 = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu}{dp}(p_0)$. Comme χ dépend de la transformation et que celle que nous considérons est isentropique¹ c'est donc un χ_s .

Comme nous travaillons au premier ordre on peut linéariser les équations ce qui donne :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}_1) = 0 \quad (1)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad} p_1 \quad (2)$$

1. Nous avons considéré notre fluide comme parfait et on peut alors montrer que la transformation est isentropique.

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1 \quad (3)$$

On possède à ce stade trois équations couplées.

1.2 Équation de propagation

En combinant les équations on détermine l'équation sur la surpression :

$$\Delta p_1 - \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

On trouve une équation de D'Alembert avec une célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$

On fait de même pour \vec{v}_1 . Pour cela on commence par montrer que $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$

démo :

$$\text{rot}(\vec{v}) \Rightarrow \mu_0 \text{rot}\left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\right) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{v}_1) = -\text{rot}(\text{grad} p_1) = \vec{0} \Rightarrow \text{rot} \vec{v}_1 = \vec{cst} \text{ or } \langle \text{rot} \vec{v}_1 \rangle = \vec{cst} = \vec{0}$$

On arrive alors à l'équation :

$$\Delta \vec{v}_1 - \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

On a encore une fois une équation de D'Alembert, tri-dimensionnelle cette fois avec la même célérité c que pour l'onde de pression.

1.3 Retour sur les hypothèses

Il faut savoir que l'hypothèse d'évolution isentropique du fluide était contestée par Newton. Ce dernier, estimant les transferts thermiques comme instantanés dans le fluide, penchait plutôt pour l'hypothèse d'une transformation isotherme.

Les calculs des célérités attendues dans les deux cas ainsi qu'une comparaison expérimentale permet alors de trancher. En supposant l'air comme étant un gaz parfait on peut calculer la célérité de l'onde.

Hypothèse isentropique :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (6)$$

où $\gamma = 1,4$ (diatomique), R est la constante des gaz parfaits, T la température en Kelvins et M la masse molaire du gaz (29g.mol^{-1} pour l'air).

OdG

Une application numérique pour $T = 300 \text{K}$ donne $c = 346 \text{m.s}^{-1}$

Hypothèse isotherme :

$$c = \sqrt{\frac{RT}{M}}, \quad (7)$$

OdG

Une application numérique pour $T = 300 \text{K}$ donne $c = 293 \text{m.s}^{-1}$

Il ne reste plus qu'à comparer à la valeur expérimentale.

Mesure de la célérité du son dans l'air



⌚ 3 minutes

Matériel

- Émetteur/récepteur
- Oscilloscope
- GBF

On positionne l'émetteur et le récepteur face à face et on mesure à l'oscilloscope le temps entre l'émission du signal par l'émetteur et de sa réception par le récepteur. Connaissant la distance séparant ces derniers on remonte à la célérité du son.

On trouve : $c = \dots\dots\dots m.s^{-1}$.

On valide alors notre hypothèse d'évolution isentropique.

Il s'agit alors de se préoccuper des conditions dans lesquelles on peut effectivement rester dans une évolution adiabatique. Pour cela il faut que la période de l'onde soit courte devant le temps caractéristique de diffusion thermique, soit :

$$\tau_{diff} = \frac{\lambda_{onde}^2}{D_{th}} \gg T_{onde} \Rightarrow f_{onde} \ll \frac{c^2}{D_{th}}, \tag{8}$$

où D_{th} est le coefficient de diffusion thermique, λ la longueur d'onde de l'onde sonore, c la célérité de l'onde.

OdG

On obtient $f_{onde} \ll 6GHz$ dans l'air !

Comme on peut montrer par une étude microscopique que $D_{th} \approx c \times lpm^2$, où lpm est le libre parcours moyen, cela donne $\lambda_{onde} \gg lpm$. Les molécules subissent trop de chocs pour migrer des régions chaudes vers les régions froides. Les échanges thermiques n'ont "pas le temps" de se faire.

On peut montrer que la vitesse caractéristique devant laquelle v_1 être petit pour satisfaire à l'approximation acoustique est c^3 . On a alors $\xi = v_1 T \ll cT = \lambda$, où ξ est le déplacement du fluide et T la période de l'onde. On a donc obtenu : $\lambda \gg \xi, lpm$. C'est l'approximation grandes longueurs d'ondes. Une manière de comprendre ce résultat et de se rendre compte qu'à petites longueurs d'ondes l'approximation des milieux continus n'est plus valable.

2 Propriétés énergétiques et propagation

2.1 Ondes planes progressives harmoniques

On a déjà rencontré les équations de D'Alembert unidimensionnelles et on a déjà étudié la forme de ses solutions. On admettra que dans le cas d'une équation de D'Alembert tridimensionnelle on trouve toutes les solutions en superposant toutes les ondes planes progressives (OPP) se propageant dans toutes les directions \vec{u} possibles.

On se place maintenant dans le cas particulier d'une onde progressive harmonique (OPPH) : $p_1 = p_{10} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ soit en complexes $\underline{p_1} = \underline{p_{10}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

En injectant cette solution dans l'équation de D'Alembert il vient :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{9}$$

On a alors $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$ vitesse de phase ne dépendant pas de ω .

Il y a propagation sans dispersion.

2. En fait on a $D_{th} = \frac{1}{3} \bar{u} \times lpm$, où \bar{u} est la vitesse quadratique moyenne, d'où $D_{th} = \frac{1}{\sqrt{3}\gamma} c \times lpm$.
 3. Un peu paradoxale semble-t'il comme nous considérons des ondes de compression et que l'hypothèse $v \ll c$ est justement l'hypothèse d'incompressibilité.. Cela vient du fait que la condition précédente n'est valable qu'à hauts Reynolds. Sinon elle est plus restrictive et on a $v/c \ll \sqrt{Re}$.

L'équation (2) donne $\mu_0 i \omega \vec{v}_1 = -(-i\vec{k})\underline{p}_1$. La partie réelle donne alors :

$$\vec{v}_1 = \frac{p_{10}}{\mu_0 \omega} \vec{k} \quad (10)$$

Cette propriété des OPPH est indépendante de la fréquence donc valable pour les OPP.

Les ondes sonores planes progressives sont longitudinales.

On peut alors poser :

$$\frac{p_{10}}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{\mu_0 \omega}{\|\vec{k}\|} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}} = Z \quad (11)$$

Z est appelé impédance acoustique par analogie avec l'électrocinétique (la pression joue le rôle de tension et le vitesse d'intensité).

Attention

Comme les OPP sont des superpositions d'OPPH on a :

- $\frac{p_1}{v_1} = Z$ pour une propagation suivant les x croissants
- $\frac{p_1}{v_1} = -Z$ pour une propagation suivant les x décroissants

OdG

- $Z_{eau} = 1,410^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
- $Z_{air} = 410 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$

De manière générale $Z_{sol} > Z_{lid} \gg Z_{gaz}$

Remarque

Cette notion d'impédance est très importante car comme en élec la différence d'impédance entre des milieux définit la proportion d'onde transmise et d'onde réfléchie à l'interface entre deux milieux.

2.2 Aspect énergétique

On examine la puissance de la force de pression due à la surpression de l'onde sonore qui s'exerce sur une surface donnée.

$$d\mathcal{P} = p_1(M, t) d\vec{S}_M \cdot \vec{v}_1(M, t) \Rightarrow \mathcal{P} = \iint_S p_1(M, t) \cdot \vec{v}_1(M, t) \cdot d\vec{S}_M \quad (12)$$

\mathcal{P} est la puissance transportée par l'onde sonore à travers la surface (S).

Par définition on appelle $\vec{\mathcal{R}} = p_1 \vec{v}_1$ ($W.m^{-2}$), vecteur densité de flux de puissance sonore.

On trouve l'équation locale en calculant $div \vec{\mathcal{R}}$:

$$div \vec{\mathcal{R}} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_s p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right) = 0 \quad (13)$$

On analyse les différents termes :

- $e = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2$ est la densité d'énergie due à l'onde sonore que l'on peut séparer en une densité d'énergie cinétique et une densité d'énergie potentielle de compression.
- $\vec{\mathcal{R}}$ est la densité de flux de puissance sonore.

Application au cas de l'OPP :

Pour une OPP p_1 et v_1 sont reliées par l'impédance acoustique, il vient : $e = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 = \chi_s p_1^2 = \mu_0 v_1^2$

On a équi-répartition de l'énergie.

De même $\mathcal{R} = ec\vec{u}$

L'énergie se propage la célérité c dans la direction de l'onde.

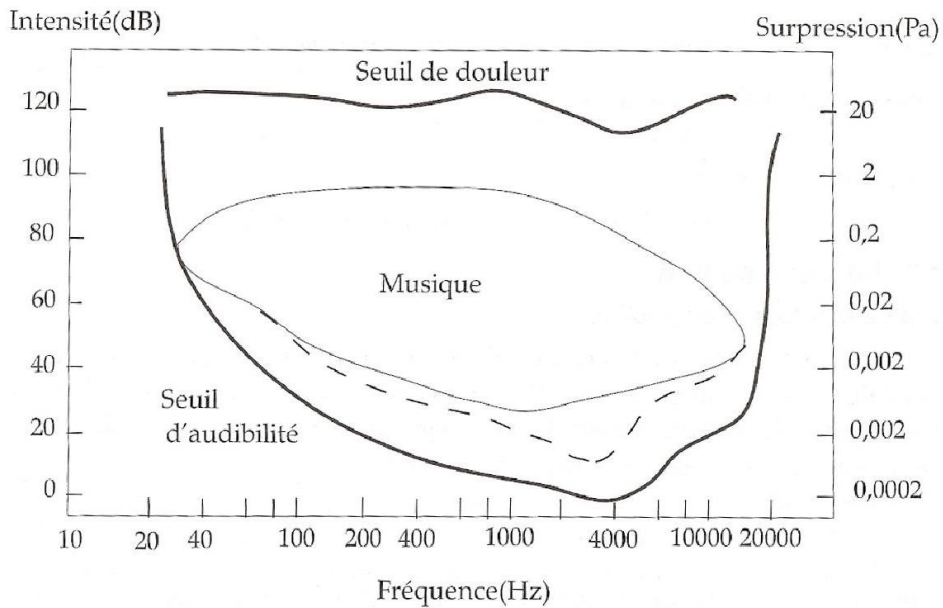
On peut maintenant s'intéresser à une manière de quantifier l'intensité du son. Pour cela on définit l'intensité sonore par $I = \langle \vec{\mathcal{R}} \rangle$ et on a :

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad I_0 = 10^{-12} W.m^{-2} \tag{14}$$

remarque

- L'oreille est un récepteur logarithmique, d'où la définition.
- I est une puissance d'où le 10 devant le log, c'est donc la même définition que dans les filtres où l'on a $10 \log H^2 = 20 \log H$.

SEUILS D'AUDIBILITE ET DE DOULEUR



Physique Tout en un 2^e année PC-PSI
M.N. Sanz, B. Salamito et al.

FIGURE 1 – Graphe de l'intensité sonore de différentes en fonction de la fréquence.

↓ On a vérifié l'hypothèse selon laquelle les échanges thermiques sont longs, qui découle du fait que nous avons considéré un fluide parfait. Nous allons maintenant nous intéresser à l'hypothèse de viscosité nulle. LA pris en compte d'une viscosité change t'elle radicalement les résultats ?

3 Influence de la viscosité

3.1 Amortissement

Soit un fluide visqueux dont on considérera l'évolution comme isentropique. Pour simplifier le problème on se place dans un cadre unidimensionnel. la force visqueuse s'écrit $\vec{f}_{visc} = \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \text{grad}(\text{div} \vec{v})$, η est la viscosité dynamique⁴.

L'équation de Navier-Stokes projetée donne :

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{4\eta}{3\mu_0 c^2} \frac{\partial^3 p_1}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (15)$$

avec $\mu_0 \chi_s c^2 = 1$

On cherche une solution sous la forme $p_1 = p_{10} e^{i(kx - \omega t)}$ et on obtient une équation de dispersion de la forme :

$$k^2 = \frac{\omega^2/c^2}{1 - i4\nu\omega/3c^2} \quad (16)$$

avec $\nu = \frac{\eta}{\mu_0}$

La viscosité intervient dans le terme $\theta = 4\nu\omega/3c^2$

OdG

- Air, $f = 10^3 \text{ Hz} \rightsquigarrow \theta = 10^{-6}$
- eau, $f = 2.10^4 \text{ Hz} \rightsquigarrow \theta = 7,5.10^{-8}$

θ étant très faible on réalise un développement limité : $k = \pm \frac{\omega}{c} (1 + \frac{i\theta}{2})$ l'onde se propageant vers les x croissants donne $p_1 = p_{10} e^{-\frac{\pi\theta x}{\lambda}} e^{i(\frac{\omega}{c}x - \omega t)}$. La vitesse rest égale à c mais il apparaît un amortissement. L'amplitude est divisée par e au bout d'une distance δ :

$$\delta = \frac{\lambda}{\pi\theta} = \frac{c}{\pi f \theta} = \frac{3c^3}{8\pi^2 \nu f^2} \quad (17)$$

AN :

$\delta = 100 \text{ km}$ pour l'air et $\delta = 320 \text{ km}$ pour l'eau. On peut donc considérer à notre échelle qu'il n'y a pas d'amortissement par viscosité.

Remarque

Il existe d'autres causes d'amortissement comme la relaxation moléculaire ou la diffusion thermique.

↓ *La premier de la viscosité que nous avons exploité est l'atténuation, mais la viscosité a également un effet de couplage entre les dérivées temporelles et spatiales de la vitesse. On va maintenant s'intéresser à l'existence d'ondes de cisaillement.*

3.2 Cisaillement

On considère un fluide occupant tout le demi-plan $z > 0$ et en $z = 0$ un plan oscillant tel que $\vec{v}(z = 0, t) = \text{acos}(\omega t) \vec{e}_x$.

L'équation de Navier-Stokes projetée sur l'axe \vec{e}_x donne :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (18)$$

La résolution par passage par les complexes donne :

4. On néglige ici la 2nd viscosité.

$$v = ae^{-\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\eta}}z} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\eta}}z - \omega t\right) \quad (19)$$

La profondeur de pénétration de l'onde est $\lambda = \sqrt{\frac{\eta}{\pi f \mu_0}}$

AN pour l'eau :

- $f = 1kHz \rightarrow \lambda = 17,8\mu m$
- $f = 10Hz \rightarrow \lambda = 0,178mm$

On peut donc considérer qu'il n'y a pas d'ondes acoustiques de cisaillement dans les fluides. C'est une grande différence avec les solides qui permettent la propagation d'ondes de compression et d'ondes de cisaillement.

Une onde sonore ne s'étale pas transversalement par effet visqueux. Elle est directionnelle.

Conclusion

Lors de cette leçon nous nous sommes intéressés au son. Nous avons montré que le son était une onde dont l'évolution était régie par l'équation de D'Alembert. Pour arriver à cette forme nous avons fait un certain nombre d'approximations, et nous nous sommes efforcés de vérifier *a posteriori* leur validité. Ces hypothèses sont parfaitement justifiées. En nous intéressant aux propriétés énergétiques des ondes acoustiques nous avons mis en évidence une similitude avec les ondes électromagnétiques (structure d'OPP, équation locale..). La différence vient de l'absence de dispersion dans les milieux pour les ondes acoustiques. On pourrait s'intéresser à la propagation des ondes acoustiques dans les solides et aux changements de milieux pour exploiter la notion d'impédance acoustique introduite dans la leçon.

Commentaires