

LP26 – PROPAGATION AVEC DISPERSION

6 octobre 2016

On préfère le vin d'ici à l'eau-delà.

Charles Paleo & Guillaume Jung

Niveau : CPGE 2 / Licence 2

Commentaires du jury

1999 : Ne pas se limiter, pour la construction d'un paquet d'onde à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines. La déformation du paquet d'onde est rarement envisagée. Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques, par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.

2012 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.

Bibliographie

- *Tec & Doc Physique PC PC**, **Olivier** → physique des ondes
- *Ondes mécaniques et ondes électromagnétiques*, **Garing** → plasma (p173)
- *Physique tout-en-un PC-PC**, **Sanz** → dispersion
- *Expériences de Physique au CAPES*, **Duffait** → câble coaxial (p305)

Prérequis

- Équations de Maxwell
- Équation de d'Alembert
- Propagation des OEM dans le vide

Expériences

- ☛ Dispersion avec un prisme
- ☛ Étalement d'un paquet d'onde dans un câble coaxial

Table des matières

1	Caractéristiques d'un phénomène de dispersion	2
1.1	Définition	2
1.2	Paquet d'onde & vitesse de groupe	2
1.3	Second ordre	3
2	Étude d'un câble coaxial	3
2.1	Équation des télégraphistes	3
2.2	Condition de Heaviside	4
3	Étude d'un plasma	4
3.1	Hypothèses	4
3.2	Relation de dispersion	4
3.3	Vitesse de phase, vitesse de groupe et application aux télécoms	5

Introduction

La dispersion apparaît dans des phénomènes aussi simples que les arcs-en-ciel, ou dans le passage de la lumière dans un prisme : dans les deux cas, la lumière non monochromatique est décomposée en plusieurs rayons monochromatiques (expérience de Newton en 1666).

Dispersion de la lumière blanche

1 Caractéristiques d'un phénomène de dispersion

1.1 Définition

Lorsque l'équation de d'Alembert est vérifiée, il n'y a pas de déformation de l'onde. Mais lorsque la **vitesse de phase** $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ de l'onde dépend de sa fréquence, on dit qu'il y a dispersion.

Le phénomène de dispersion n'est donc observable que si l'onde envoyée est composée de plusieurs fréquences. La relation entre le vecteur d'onde k et la pulsation ω est appelée **relation de dispersion**.

Pour une onde électromagnétique dans le vide (qui vérifie donc l'équation de d'Alembert) :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

la relation de dispersion s'écrit simplement :

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (2)$$

Et l'onde se propage à la vitesse $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c$.

1.2 Paquet d'onde & vitesse de groupe

Un paquet d'onde est un ensemble d'OPPH de pulsations voisines autour de ω_0 telles que la durée du signal soit grande devant T_0 . En plus de permettre l'étude des phénomènes de dispersion, un paquet d'onde est également un signal réaliste (l'OPPH étant infinie spatialement et temporellement).

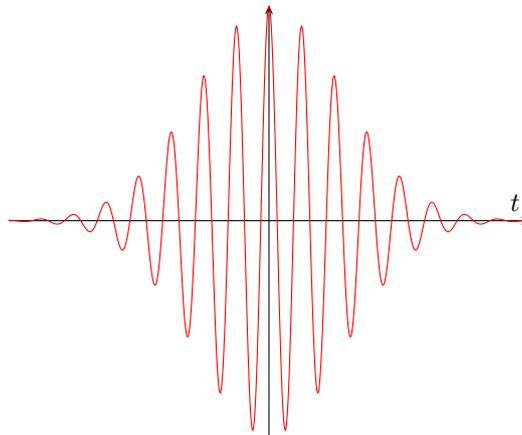


FIGURE 1 – Un paquet d'onde.

Un tel signal est décomposable grâce au formalisme de Fourier :

$$f(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega \quad (3)$$

De plus :

$$e^{i(\omega t - kx)} = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} e^{i[(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x]} \quad (4)$$

$$f(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) e^{i[(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x]} d\omega \quad (5)$$

$$f(x, t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)} \times J(x, t) \quad (6)$$

$\Delta\omega \ll \omega_0$ donc les variations de $J(x, t)$ sont lentes devant celle de $e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}$ qui joue donc le rôle de porteuse et $J(x, t)$ d'enveloppe.

De plus, au 1er ordre :

$$k = k_0 + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad (7)$$

$$J(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) e^{i[(\omega - \omega_0)(t - x \frac{dk}{d\omega}|_{\omega_0})]} d\omega = J\left(x = 0, t - x \frac{dk}{d\omega}|_{\omega_0}\right) \quad (8)$$

On voit donc que l'enveloppe se propage à la **vitesse de groupe** v_g :

$$v_g = \frac{1}{\left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} \quad (9)$$

1.3 Second ordre

En poussant le développement de k jusqu'au second ordre :

$$k = k_0 + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 = k_0 + \frac{1}{v_g} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \quad (10)$$

$$J(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) e^{i[(\omega - \omega_0)(t - x\alpha(\omega))]} d\omega \quad (11)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{v_g} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad (12)$$

La vitesse de propagation $1/\alpha(\omega)$ dépend de ω dès que le second ordre est non nul. Il y a alors déformation du paquet d'onde : c'est la dispersion.

2 Étude d'un câble coaxial

2.1 Équation des télégraphistes

Un câble de transmission peut-être représenté par le schéma de la figure 2.

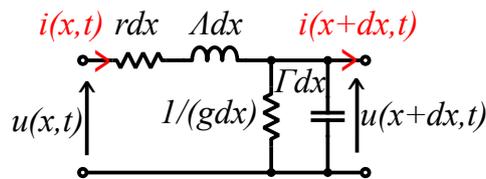


FIGURE 2 – Schéma équivalent des composants élémentaires d'une ligne de transmission.

Une application de la loi des mailles et de la loi des nœuds donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial x} = -gu - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -ri - \Lambda \frac{\partial i}{\partial x} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + [g\Lambda + r\Gamma] \frac{\partial i}{\partial t} + rgi \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [g\Lambda + r\Gamma] \frac{\partial u}{\partial t} + rgu \end{cases} \quad (13)$$

Soumis à une tension $u(x, t) = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$, on obtient la relation de dispersion :

$$k^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 - rg + i\omega(g\Lambda + r\Gamma) = \left(\frac{\omega}{\Lambda \Gamma}\right)^2 \left(1 + \frac{ig}{\omega \Gamma}\right) \left(1 + \frac{ir}{\omega \Lambda}\right) \quad (14)$$

On définit $k' = \text{Re}\{k\}$ et $k'' = \text{Im}\{k\}$. La partie imaginaire de k est donc liée à l'atténuation de l'onde : elle se propage mais son amplitude diminue au cours de sa propagation.

2.2 Condition de Heaviside

On cherche à présent une solution sans dispersion, donc de la forme $u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-x/\delta}$ (δ étant la distance caractéristique d'atténuation) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f''\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-x/\delta} \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} f'\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-x/\delta} - \frac{1}{\delta} f\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-x/\delta} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f''\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-x/\delta} + \frac{2}{\delta c} f'\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-x/\delta} + \frac{1}{\delta^2} f\left(t - \frac{x}{c}\right) e^{-x/\delta} \quad (17)$$

En les remplaçant dans l'équation 13, on obtient :

$$\left[\frac{1}{c^2} - \Lambda\Gamma\right] f''\left(t - \frac{x}{c}\right) + \left[\frac{2}{\delta c} - g\Lambda - r\Gamma\right] f'\left(t - \frac{x}{c}\right) + \left[\frac{1}{\delta^2} - rg\right] f\left(t - \frac{x}{c}\right) = 0 \quad (18)$$

Ceci étant vrai pour tout (x, t) , on en déduit :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = v_\phi \quad \delta = \frac{2}{c(g\Lambda + r\Gamma)} \quad \delta^2 = \frac{1}{rg} \quad (19)$$

Ce qui impose, pour qu'il y ait compatibilité entre les deux expressions de δ , que $\frac{4\Lambda\Gamma}{(g\Lambda + r\Gamma)^2} = \frac{1}{rg}$ soit $g\Lambda = r\Gamma$, **condition de Heaviside**. Les constructeurs de câbles coaxiaux tentent au maximum de respecter cette condition afin de minimiser la dispersion.

Étalement d'un paquet d'onde dans un câble coaxial

✎ Duffait

⊖ 5 min

On envoie un pulse du GBF dans un câble coaxial de 100 m, on observe au début et au bout du câble le signal à l'oscilloscope.

On peut déterminer $v_\phi = c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$

OG : $L = 100$ m, décalage entrée-sortie $\Delta t \sim 420$ ns donc $c \sim 240 \times 10^6$ m.s⁻¹

3 Étude d'un plasma

3.1 Hypothèses

Un plasma est un milieu gazeux ayant les propriétés suivantes :

- il est constitué d'ions positifs, de charge $+e$ et de masse M et d'électrons, de charge $-e$ et de masse m ,
- les charges sont en mouvement non relativiste de vitesse \vec{v} ,
- il contient n ions positifs et n électrons par unité de volume, il est donc globalement neutre et le reste au passage d'ondes planes progressives de vecteur d'onde \vec{k} et de pulsation ω avec la notation :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (20)$$

3.2 Relation de dispersion

Afin d'arriver à la relation de dispersion dans le plasma, il est nécessaire de passer par quelques étapes de calculs que nous traitons ici.

Tout d'abord, calculons la densité de courant \vec{j} . L'équation de Maxwell-Ampère nous donne :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (21)$$

Or en notation complexe, nous avons $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = i\vec{k} \wedge \vec{B}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$ d'où la densité de courant :

$$\underline{\vec{j}} = i \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}_0}{\mu_0} + \epsilon_0 \omega \vec{E}_0 \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \Longrightarrow \quad \vec{j}_0 = i \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}_0}{\mu_0} + \epsilon_0 \omega \vec{E}_0 \right) \quad (22)$$

L'équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ nous donne en notation complexe

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \quad (23)$$

Puisque le plasma est localement neutre, l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div} \underline{\vec{E}} = 0 \Leftrightarrow i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$, traduit l'orthogonalité des vecteurs \vec{k} et $\underline{\vec{E}}$. Ainsi, grâce à l'équation (23), le trièdre $[\vec{k}, \underline{\vec{E}}, \underline{\vec{B}}]$ est orthogonal direct.

Nous pouvons donc en déduire : $\vec{k} \wedge \vec{B}_0 = \vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_0}{\omega} \right) = -\frac{k^2}{\omega} \vec{E}_0$ et obtenons avec l'équation (21) :

$$\vec{j}_0 = \frac{i \epsilon_0}{\omega} (\omega^2 - k^2 c^2) \vec{E}_0 \quad (24)$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à un électron de masse m , donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (25)$$

Or,

$$\frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|} \simeq \frac{v B_0}{E_0} \simeq v \frac{k}{\omega} = \frac{v}{v_\phi} \leq \frac{v}{c} \ll 1 \quad (26)$$

Nous pouvons donc négliger le terme dû au champ magnétique dans l'application du PFD, soit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} \quad (27)$$

Les ions positifs considérés ont une masse largement plus grande que celle des électrons. Nous considérons alors que seuls les électrons sont en mouvement, et que les ions positifs du plasma restent fixes. De ce fait, nous pouvons exprimer la densité de courant \vec{j} :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \underline{\vec{E}} \quad (28)$$

Calculons alors la dérivée temporelle de la densité de courant.

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{j}_0 \frac{d}{dt} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}) = \vec{j}_0 i \left(\underbrace{\vec{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}_{=0} - \omega \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{soit,} \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = -i\omega \underline{\vec{j}} \quad (29)$$

Nous obtenons alors : $\underline{\vec{j}} = i \frac{ne^2}{m\omega} \underline{\vec{E}}$. En comparant avec la relation (21), nous obtenons la **relation de dispersion** :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}} \quad (30)$$

– $\omega > \omega_p$: k réel positif, donc propagation sans atténuation. A très haute fréquence, le milieu est transparent car les variations du champ électrique sont trop rapides pour être ressenties par les électrons

– $\omega < \omega_p$: k imaginaire pur, pas de propagation, l'onde est totalement réfléchiée à l'interface

OG : $n \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ e}^{-\text{m}^{-3}}$ d'où $f_p \sim 900 \text{ kHz} - 9 \text{ MHz}$

3.3 Vitesse de phase, vitesse de groupe et application aux télécoms

Pour $\omega > \omega_p$:

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c \quad v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c \quad (31)$$

Pour communiquer avec les satellites, on utilise donc une fréquence supérieure à f_p (typiquement de l'ordre 1,5 GHz pour le GPS), et une fréquence inférieure pour utiliser les réflexions contre la ionosphère pour communiquer autour de la Terre (2,182 MHz est la fréquence internationale des urgences maritimes).

Conclusion

La dispersion est donc un phénomène qu'il faut prendre en compte dès que l'on propage des paquets d'onde dans des milieux réels où elle est souvent présente. Ce n'est pas toujours un phénomène problématique, la dispersion permet (entre autres) d'analyser un milieu ou une onde envoyée.

Questions et commentaires