

PROPAGATION AVEC DISPERSION

19 octobre 2017

Mohamed Bensmili & Milan Rozel

Moi, quand on m'en fait trop, je correctionne plus : je dynamite, je disperse, je ventile !

RAOUL VOLFONI

Niveau : L2

Commentaires du jury

1999 : Ne pas se limiter, pour la construction d'un paquet d'onde à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines. La déformation du paquet d'onde est rarement envisagée. Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques, par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.

2012 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.

Bibliographie

✦ *Tex et Doc Physique PC PC**, **Olivier**

✦ *Physique tout-en-un PC-PC**, **Sanz**

✦ *Optique*, **Bruhat**

→ Physiques des ondes

→ Dispersion

→ Calcul de l'indice optique dans un diélectrique anisotrope, p.418, Attention il utilise des notations anglo-saxonnes en EM et le calcul mérité d'être réarranger pour des raisons pédagogique

Prérequis

- Electromagnétisme et propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide
- Bases de mécaniques du point
- Bases de l'électrocinétique
- Bases de d'analyse vectorielle

Expériences

- ✦ Dispersion de la lumière blanche par un prisme de verre
- ✦ Simulations python de dispersion de paquet d'onde

Table des matières

1	Première approche	2
1.1	Propagation et notion de vitesse de phase	2
1.2	Notion de paquet d'onde	3
1.3	Effet de la dispersion	3
2	Dispersion dans le câble coaxial	5
2.1	Equation de propagation	5
2.2	Condition de Heaviside	6
3	Dispersion dans un diélectrique	7
3.1	Equation de propagation	7
3.2	Modèle de l'électron élastiquement lié	7
3.3	Equation de Sellmeier et équation de Cauchy	8



Dispersion de la lumière blanche par un prisme

Réaliser une image à l'infini (avec un achromat) d'un diaphragme éclairé par une lampe Quartz-Iode mettre un prisme sur le chemin du rayon sortant pour projeter la figure de dispersion sur un mur

Introduction

En 1666 I. Newton fit traverser à un prisme un rai de lumière blanche et observa la séparation de la lumière blanche en plusieurs couleurs. Ainsi, en vertu de la loi de Snell-Descartes ¹ déjà connue à l'époque de cette expérience, il fut possible de déduire que la vitesse de la lumière dépendait, dans le verre, de sa couleur. C'est ce qu'on appelle la dispersion.

Nous allons donc tenter d'appréhender le phénomène de dispersion dans un cas général, puis ensuite nous nous intéresserons à deux cas de dispersion ayant une application dans le domaine des télécommunications.

1 Première approche

1.1 Propagation et notion de vitesse de phase

✦ *Physique Tout-en-un MP-MP** p555, **Sanz**, OEM dans le vide et milieux conducteurs, **Garing**

On commence par s'intéresser au cas simple de la propagation d'une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) dans le vide.

L'équation de propagation est l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1)$$

L'OPPM peut par exemple s'écrire sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y \quad (2)$$

\vec{E} Peut aussi s'écrire sous la forme $\vec{E} = E_0 e^{i\phi(x,t)} \vec{e}_y$. En fixant une valeur de la phase $\phi(x,t)$, on peut étudier son évolution dans le temps et dans l'espace. Par exemple si on fixe

$$\phi(x,t) = C \quad (3)$$

On peut écrire l'égalité suivante

$$\omega t_1 - kx_1 = \omega t_2 - kx_2 = C \quad (4)$$

$$\frac{\omega}{k} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (5)$$

On a donc identifier une vitesse de déplacement pour un point de phase constante qu'on appellera vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (6)$$

En injectant la formule de \vec{E} dans l'équation de propagation on obtient la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (7)$$

Cette relation de dispersion nous permet de trouver la vitesse de phase et donne certaines propriétés du milieu. Ici on voit que v_ϕ ne dépend pas de ω on dit donc que ce milieu n'est pas dispersif.

1. Vers 940-1000, Abou Sad al-Ala ibn Sahl est un mathématicien perse à la cour de Bagdad qui a écrit un traité vers 984 sur les miroirs ardents et les lentilles dans lequel il expose comment les miroirs courbes et les lentilles peuvent focaliser la lumière en un point. C'est la première mention de la loi de la réfraction redécouverte plus tard en Europe sous le nom de loi de Snell-Descartes. dicit Wikipédia.

Je voudrais pas dénoncer mais il l'a trouvé en premier.

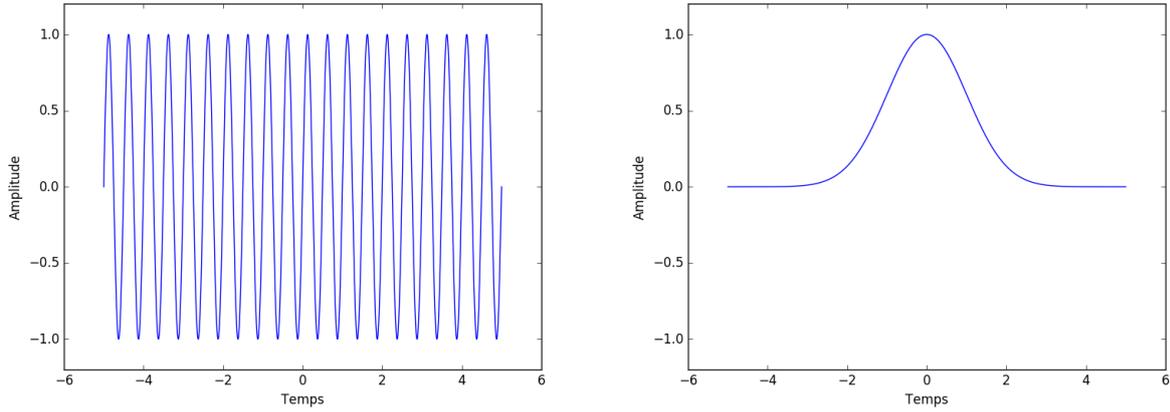


FIGURE 1 – Exemple de porteuse, P et d’enveloppe G

1.2 Notion de paquet d’onde

Une OPPM bien qu’utile mathématiquement a peu de sens physique. Tout d’abord elle transporte une onde d’extension spatiale infinie et n’a ni début, ni fin, hors lorsqu’on cherche à transmettre un signal il a un début et une fin.

Pour construire un paquet d’onde on peut par exemple prendre une OPPM, qu’on appellera porteuse, et la multiplier par une enveloppe (typiquement une gaussienne) on définit ainsi notre paquet d’onde (fig. 1,2) :

$$f(x, t) = P(x, t) \times G(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} G(x, t) \tag{8}$$

On limite ainsi temporellement et spatialement notre signal et on rend son énergie finie.

1.3 Effet de la dispersion

Ecrivons maintenant le paquet d’onde grâce au formalisme de Fourier on a (fig. 3) :

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega t - kx)} A(\omega) d\omega \tag{9}$$

Factorisons $f(x, t)$ par $P(x, t)$ pour obtenir

$$f(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x)} A(\omega) d\omega \tag{10}$$

Ainsi on a l’expression suivante de G(x,t)

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i((\omega - \omega_0)t - (k - k_0)x)} A(\omega) d\omega \tag{11}$$

On peut maintenant supposer que le k dépend de ω et que $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ où $\Delta\omega$ est la largeur typique de l’enveloppe dans l’espace des fréquences. On peut écrire un développement limité de k à l’ordre 1 :

$$k(\omega) \sim k_0 + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \tag{12}$$

En réinjectant cette expression dans l’expression de l’enveloppe on a :

$$G(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \omega_0)(t - \frac{\partial k}{\partial \omega}|_{\omega_0} x)} A(\omega) d\omega \tag{13}$$

$$G(x, t) = G(x = 0, t - \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} x) \tag{14}$$

On se rend ici compte qu’on a une vitesse de déplacement de l’enveloppe :

$$v_g(x, t) = \frac{1}{\left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} \tag{15}$$



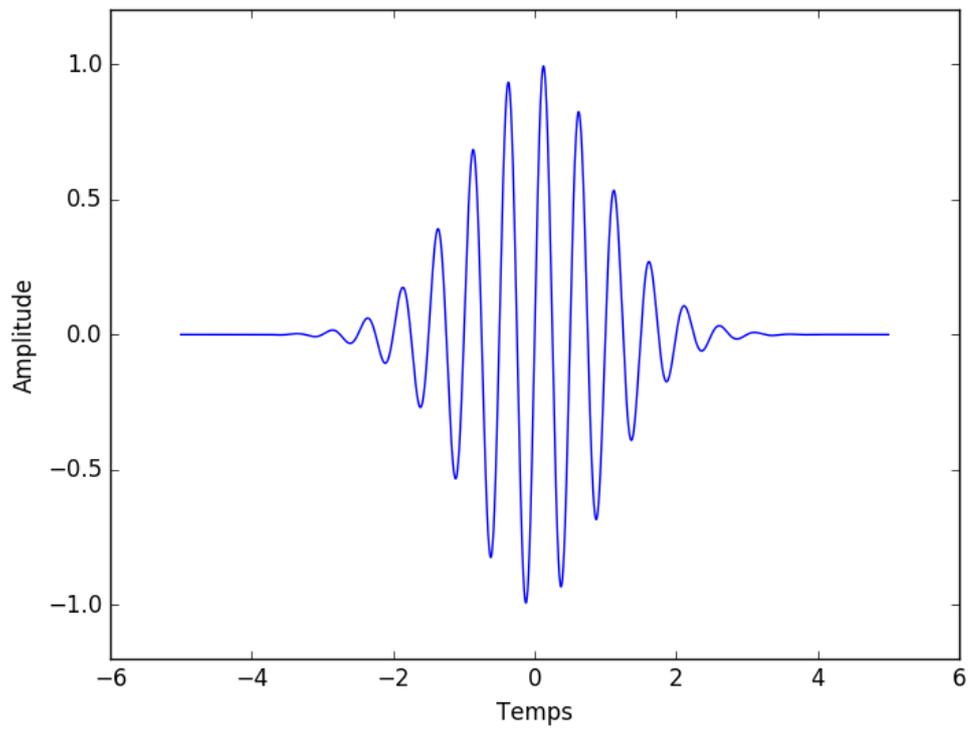


FIGURE 2 – Exemple de paquet d'onde PxG

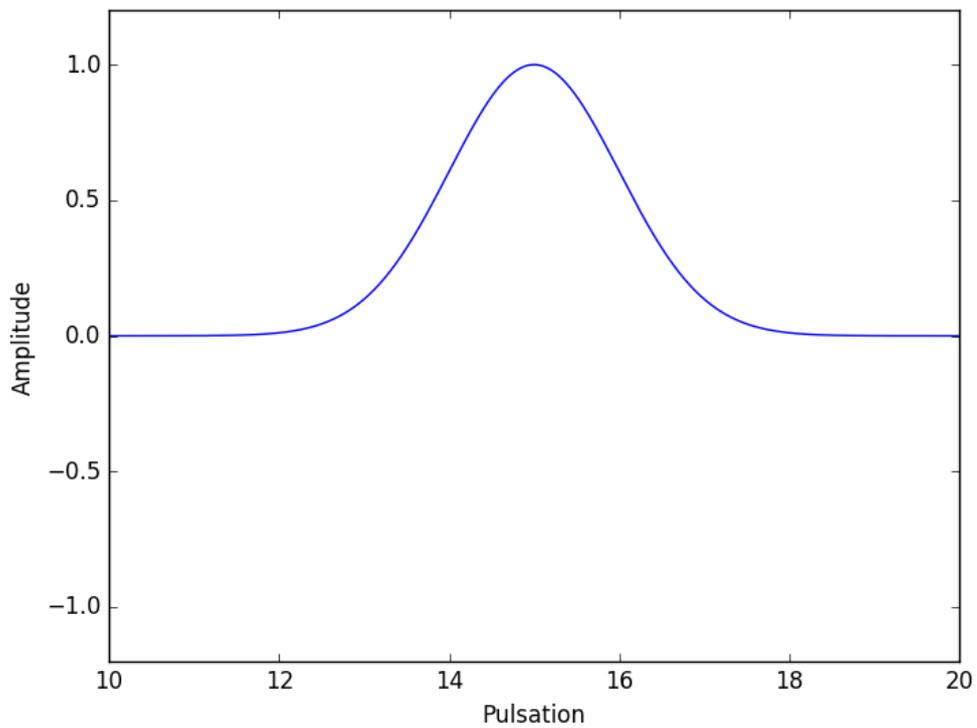


FIGURE 3 – Transformé de Fourier du paquet d'onde

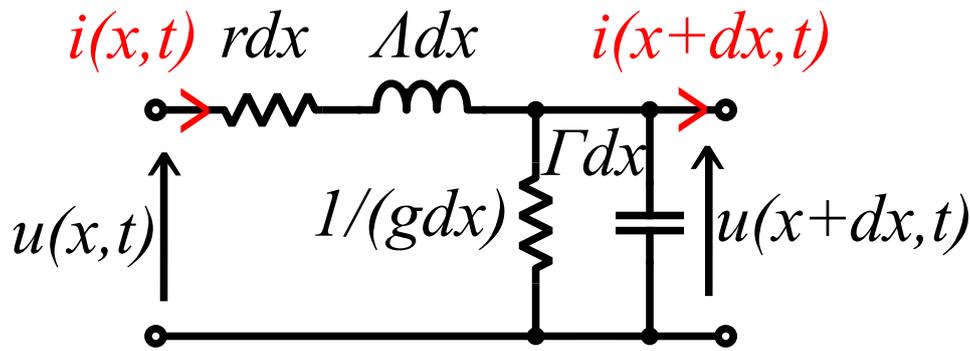


FIGURE 4 – Schéma électronique équivalent d’une section de longueur dx du câble coaxial dans le modèle de la constante répartie

Simulation de la dispersion de paquet d’onde dans un milieu faiblement dispersif

Montrer le glissement de phase puis l’étalement du paquet d’onde.

On appelle cette vitesse la vitesse de groupe. C’est la vitesse du centre de l’enveloppe du paquet d’onde. On remarque qu’elle peut être différente de la vitesse de phase, on observe alors un phénomène de glissement de phase, l’enveloppe n’évolue pas dans l’espace à la même vitesse que la phase.

Si on effectue maintenant le développement limité de k à l’ordre 2 on a :

$$k(\omega) \sim k_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \right) = k_0 + (\omega - \omega_0) \alpha(\omega) \tag{16}$$

A nouveau en injectant dans l’expression de l’enveloppe on obtient

$$G(x, t) = G(x = 0, t - \alpha(\omega)x) \tag{17}$$

Ainsi la vitesse de l’enveloppe ainsi définie est

$$v = \frac{1}{\alpha(\omega)} \tag{18}$$

On remarque qu’elle dépend de la pulsation si on inclut l’ordre 2². Ainsi il apparait que les différentes fréquence de l’enveloppe ne se déplacent pas à la même vitesse, elle va donc s’étaler et s’aplatir.

Intéressons nous maintenant à un cas concret de dispersion, à savoir la dispersion d’onde électrocinétique dans un câble coaxial. Au cours du XXème siècle la transmission de données sous forme de signaux analogique utilisait massivement les câbles coaxiaux.

2 Dispersion dans le câble coaxial

2.1 Equation de propagation

On peut représenter une section de longueur dx du câble coaxial comme dans la figure 4

Ce qui aboutit à la mise en équation suivante :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -gu - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ri - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \tag{20}$$

2. Ou tout autre ordre supérieur.

On peut découpler les variables $i(x, t)$ et $u(x, t)$ en écrivant l'égalité suivante :

$$\partial_x(20) = -r(19) - \Lambda \partial_t(19) \quad (21)$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'équation de propagation dans le câble coaxial, l'équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r\Gamma + g\Lambda) \frac{\partial u}{\partial t} + rgu \quad (22)$$

Calculons maintenant la relation de dispersion en injectant dans l'équation une OPPM, $u(x, t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)}$ on obtient donc :

$$k^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 + j\omega(r\Gamma + g\Lambda) - rg \quad (23)$$

$$k^2 = \Gamma \Lambda \omega^2 \left(1 + j \frac{g}{\omega \Gamma}\right) \left(1 + j \frac{r}{\omega \Lambda}\right) \quad (24)$$

Simulation de la dispersion de paquet d'onde dans un câble coaxial

Montrer la déformation du paquet d'onde (très similaire à l'"expérience" précédente)

2.2 Condition de Heaviside

La formule de la vitesse de phase de la première partie n'était pas tout à fait exacte³ puisque c'est en réalité :

$$v_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} \quad (25)$$

Cette nuance n'est pas si étonnante puisque la partie imaginaire de k ne participe pas à la phase de l'onde mais à son amplitude.

On remarque ainsi que si $\frac{r}{\Lambda} = \frac{g}{\Gamma}$ on a :

$$k = \pm \omega \sqrt{\Gamma \Lambda} \left(1 + j \frac{g}{\omega \Gamma}\right) \quad (26)$$

Dès lors il est immédiat que la vitesse de phase est :

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}} \quad (27)$$

et est donc indépendante de la pulsation de l'onde se propageant. Sous cette condition le milieu est non dispersif. Par contre k est complexe alors l'onde s'atténuera lors de sa propagation. Cette condition est la condition de Heaviside.

Le câble coaxial ayant été largement utilisé au XXème siècle pour transmettre des signaux analogiques. Pour un signal analogique aussi bien la phase que la "forme" du signal est essentiel à l'information. D'où la nécessité de minimiser la dispersion quitte à s'accommoder d'un effet d'atténuation.

Avec l'avènement de l'informatique on a progressivement remplacé les signaux analogiques par des signaux binaires, notamment en utilisant la fibre optique pour transmettre ces signaux sous forme d'onde électromagnétiques.

3. Notez l'euphémisme, en vrai elle est fautive quasiment tout le temps.



3 Dispersion dans un diélectrique

3.1 Equation de propagation

Les équations régissant les ondes électromagnétiques dans le milieu que nous considérons (ici c'est le verre) sont les équations de Maxwell en particulier ici Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère :

$$MF \quad \frac{1}{\epsilon_0 c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} \quad (28)$$

$$MA \quad \frac{4\pi \vec{j}}{c} = \text{rot} \vec{H} \quad (29)$$

Calculons la relation de propagation dans un diélectrique isotrope :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{4\pi}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (30)$$

Dans un diélectrique la densité volumique de charge est nulle ce qui d'après l'équation de Maxwell-Gauss nous donne $\text{div} \vec{E} = 0$, de plus on peut écrire \vec{j} sous la forme :

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (31)$$

Où ϵ_r est la permittivité relative du milieu, et est un scalaire car on le diélectrique considéré est isotrope.

L'équation de propagation devient alors :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (32)$$

Considérons maintenant la propagation d'une OPPM dans le diélectrique, $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$, on en déduit la relation de dispersion suivante :

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\epsilon_r} = \frac{c^2}{n^2} \quad (33)$$

Pour caractériser le milieu on va maintenant chercher l'expression de $n(\omega)$

3.2 Modèle de l'électron élastiquement lié

Pour connaître l'expression de $n(\omega)$ on va utiliser l'équation de \vec{j} en l'écrivant sous la forme de la somme du courant de polarisation et du courant de déplacement.

$$\vec{j} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_P + \vec{j}_D \quad (34)$$

Le courant de déplacement est simplement donné par :

$$\boxed{\vec{j}_D = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (35)$$

Le courant de polarisation est donné par :

$$\vec{j}_P = \sum_{l \in \{e^-\}} \frac{q_l}{V} \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial t} \quad (36)$$

Plaçons nous maintenant dans un volume $V \ll \lambda^3$ où λ est la longueur d'onde de \vec{E} Ainsi tous les électrons dans ce volume sont soumis à un champ électrique de même intensité et de même direction. De plus, les électrons sont

réunis dans des groupes, où tous les électrons d'un groupe ont les mêmes propriétés⁴, réécrivons alors le courant de polarisation :

$$\vec{j}_P = \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} -e N_{l'} \frac{\partial \vec{r}_{l'}}{\partial t} \quad (37)$$

Où $N_{l'}$ est la densité volumique d'électron du groupe l' . Utilisons une Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD) pour trouver le vecteur déplacement d'un électron du groupe l' , $\vec{r}_{l'}$

Le modèle de l'électron élastiquement lié nous donne le PFD suivant :

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -K \vec{r} - \nu \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} - e \vec{E} \quad (38)$$

$-K \vec{r}$ est une force de rappel élastique, $-\nu \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ une force de frottement proportionnel à la vitesse de l'électron et $-e \vec{E}$ est la force de Lorentz pour des électrons non-relativistes.

Les électrons étant soumis à une excitation de pulsation ω selon l'axe \vec{e}_y , on s'attend à avoir le vecteur \vec{r} sous la forme :

$$\vec{r} = r_0 e^{i\omega t} \vec{e}_y \quad (39)$$

Ainsi en injectant cette expression dans le PFD on obtient :

$$\vec{r} = \frac{-e}{K + i\omega\nu - m\omega^2} \vec{E} \quad (40)$$

On a alors l'expression du courant de polarisation qui devient :

$$\vec{j}_P = \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{N_{l'} e^2}{K_{l'} + i\omega\nu_{l'} - m\omega^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (41)$$

Finalement on a :

$$\vec{j} = \left(\frac{\epsilon_0}{4\pi} + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{N_{l'} e^2}{K_{l'} + i\omega\nu_{l'} - m\omega^2} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (42)$$

En identifiant on a enfin la valeur de n^2 :

$$n^2 = 1 + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{4\pi N_{l'} e^2}{\epsilon_0 (K_{l'} + i\omega\nu_{l'} - m\omega^2)} \quad (43)$$

3.3 Equation de Sellmeier et équation de Cauchy

Simplifions l'équation de n^2 en introduisant les relations suivantes :

$$D_{l'} = \frac{4\pi N_{l'} e^2}{\epsilon_0 K_{l'}} \quad (44)$$

$$\Gamma_{l'} = \frac{\nu_{l'}}{\omega_{0,l'} m} \quad (45)$$

$$m = \frac{K_{l'}}{\omega_{0,l'}^2} \quad (46)$$

Où $\omega_{0,l'}$ est la pseudo-pulsation de l'oscillateur harmonique amorti formé par un électron du groupe l' . $D_{l'}$ est un coefficient représentant la contribution du groupe d'électron l' à l'indice du milieu, et $\Gamma_{l'}$ est le facteur rendant compte de l'importance des phénomènes dissipatifs dans le l'oscillateur. Ainsi on a :

4. Les plus perspicaces d'entre vous se seront sans aucun doute rendu compte que je veux pas parler de couches électronique et que je ne veux même pas les mentionner, je laisserai au jury le soin d'aborder ce point si ça les intéresse, d'où ma formulation très naïve des données du problème

$$n^2 = 1 + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{D_{l'}}{1 + i\Gamma_{l'} \frac{\omega}{\omega_{0,l'}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0,l'}^2}} \quad (47)$$

Remarquons que lorsque $\omega = \omega_{0,l'}$ on a un pic de la partie imaginaire de $n(\omega)$, on en déduit que les $\omega_{0,l'}$ correspondent aux bandes d'absorption de notre diélectrique. Nous pouvons néanmoins encore simplifier l'expression de n^2 sachant que $\Gamma \sim 10^{-2}$. On peut se placer aisément dans des cas où $|\Gamma| \ll \left| \frac{\omega_{0,l'}}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_{0,l'}} \right|$. Dans ces cas (loin des bandes d'absorptions donc)⁵, on a l'équation de Sellmeier :

$$n^2 = 1 + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{D_{l'}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0,l'}^2}} \quad (48)$$

Pour obtenir l'équation de Cauchy on fait une hypothèse de plus à savoir que les bandes d'absorption du verre (le diélectrique qui nous intéresse ici) sont toutes dans l'ultraviolet et que nous étudions l'indice n dans la partie visible du spectre électromagnétique.⁶ On peut donc écrire que $\frac{\omega^2}{\omega_{0,l'}^2} \ll 1$ et faire un développement pour obtenir la formule suivante :

$$n^2 \sim 1 + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} D_{l'} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{0,l'}^2} \right) \quad (49)$$

$$n^2 \sim 1 + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} D_{l'} + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{D_{l'}}{\omega_{0,l'}^2} \omega^2 \quad (50)$$

Si on pose $A = 1 + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} D_{l'}$ et $B = \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{D_{l'}}{\omega_{0,l'}^2}$ on aboutit à la formule de Cauchy :

$$n^2 = A + B\omega^2 \quad (51)$$

Dispersion de la lumière blanche par un prisme

Réaliser une image à l'infini (avec un achromat) d'un diaphragme éclairé par une lampe Quartz-Iode mettre un prisme sur le chemin du rayon sortant pour projeter la figure de dispersion sur un mur, maintenant discuter de la largeur de la bande rouge et de la bande violette

Simulation de la dispersion de paquet d'onde dans le verre

Parler de la différence avec la propagation le câble coaxial, par exemple le paquet d'onde qui ne se déforme pas de manière symétrique.

Bonus 1 : Différence entre les signaux analogiques et les signaux binaire⁷

Il est légitime de se demander si utiliser un diélectrique pour propager un rayon lumineux est bien sage compte tenu de ce que nous venons de décrire. La dispersion étant importante dans les diélectriques il pourrait sembler que transmettre l'information est proscrit. Mais il faut se souvenir que pour les ondes électromagnétiques du domaine optique ($\omega \sim 10^{14}$) on ne peut pas observer la phase, ainsi les phénomènes de glissement de phases ne sont pas problématiques et de plus.

Si le signal envoyé prend la forme de trois paquet d'onde comme présenté dans la figure 5, mais ce que le détecteur mesure est en réalité ce qu'on voit dans la figure 6. On comprend ainsi aisément que tant que l'étalement du paquet d'onde n'est pas trop important et que les pulses originaux sont différentiable la dispersion n'est pas un problème.

5. Un autre argument est simplement de dire qu'on se place dans une zone de transparence donc cela implique n réel et donc que son carré doit être réel et positif.

6. J'avoue c'est un peu fumeux cette histoire, le verre a évidemment des bandes d'absorption hors des UV mais elles sont "lointaines" et n'ont pas d'influence dans le domaine du visible qu'on étudie ici. ATTENTION : le Bruhat dit juste que les bandes d'absorption du verre sont dans l'UV il faut avoir conscience que bien que correcte cette assertion est incomplète et qu'il existe d'autres bandes d'absorption.

Il faut donc bien retenir que dans la formule de Sellmeier seules les bandes d'absorption "proches" de la zone de transparence étudiée ont de l'importance.

7. Je conseille vivement de faire cette partie malgré l'appellation de "bonus", elle apporte une mise en perspective importante des raisons pour lesquelles la dispersion n'est pas si grave dans la fibre optique mais beaucoup plus dans le câble coaxial

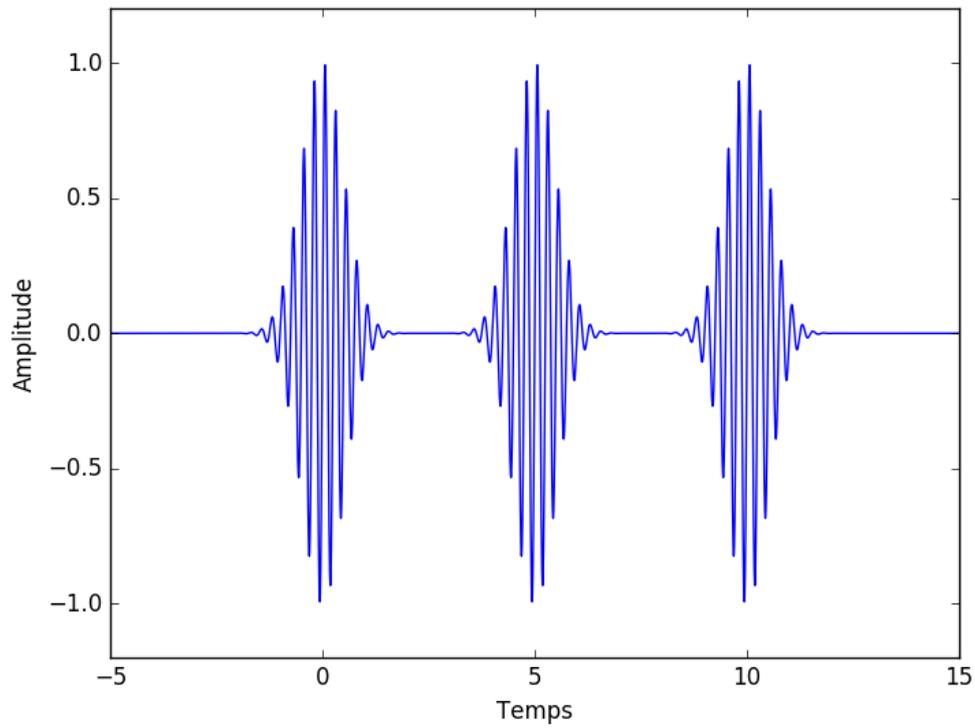


FIGURE 5 – Amplitude signal envoyé

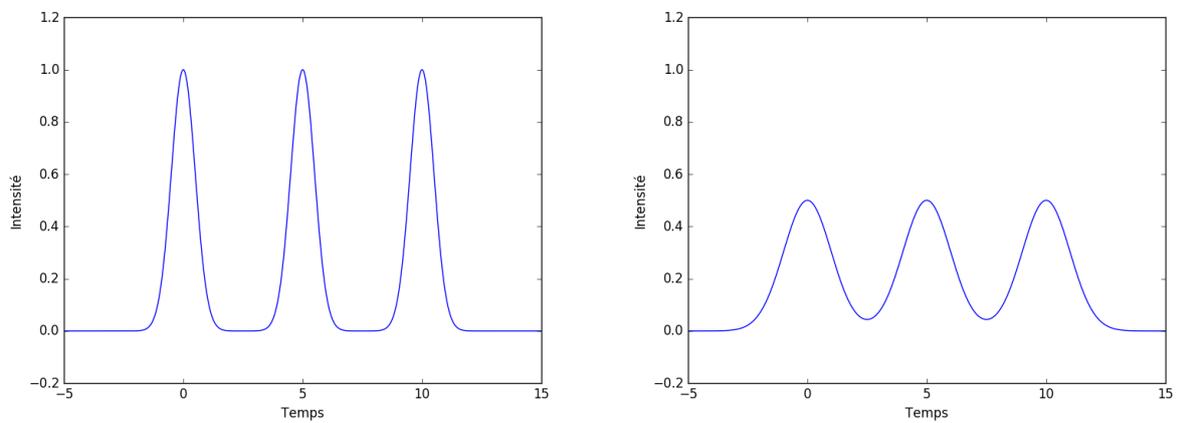


FIGURE 6 – Intensité du signal envoyé avant et après dispersion.

Simulation de la dispersion de paquet d'onde dans le verre en observant leur intensité

Montrer les effets de la dispersion lorsqu'on observe uniquement l'intensité. En particulier mise en évidence de la compatibilité entre signal binaire et un milieu dispersif

Bonus 2 : Dispersion anormale ⁸

On remarque si on prend les équation de Sellmeier et de Cauchy que l'indice optique $n(\omega)$ est croissant pour les ω croissant. C'est ce qu'on appelle de la dispersion normale. Néanmoins dans la loi de Sellmeier pour $\omega \sim \omega_0$ on a l'indice optique qui diverge, ce qui n'est évidemment pas physique. C'est car nous avons ignoré les effets dissipatifs pour pouvoir écrire l'équation de Sellmeier et maintenant que la condition $|\Gamma| \ll \left| \frac{\omega_{0,l'}}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_{0,l'}} \right|$ n'est plus vérifiée nous ne pouvons plus le faire. Ainsi repartons de l'équation de n^2 :

$$n^2 = 1 + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{D_{l'}}{1 + i\Gamma_{l'} \frac{\omega}{\omega_{0,l'}} - \frac{\omega^2}{\omega_{0,l'}^2}} \quad (52)$$

Et déduisons en la première formule de Kettler-Helmholtz à savoir ⁹ :

$$Re(n^2) = 1 + \sum_{l' \in \{G(e^-)\}} \frac{\frac{D_{l'}}{\omega^2} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_{0,l'}^2} \right)}{\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega_{0,l'}^2} \right)^2 + \frac{\Gamma^2}{\omega^2 \omega_{0,l'}^2}} \quad (53)$$

On peut donc observer courbes de respectives de la formule de Sellmeier et de Kettler-Helmholtz dans la figure 7. On remarque que plutôt que de diverger en $\omega \sim \omega_{0,l'}$ la partie réel de n^2 décroît brusquement alors que ω croît. C'est ce qu'on appelle de la dispersion anormale.

Dans les zones de dispersions anormales il est possible de trouver des phénomènes qui ne semblent pas physique comme des vitesse de groupe dépassant la célérité de la lumière dans le vide ou des vitesses de phases négatives. Ce ne sont évidemment pas des lois fondamentale de la physique qui sont violé mais bien les interprétations qu'on a des vitesses de phase ou des vitesses de groupe qui ne sont plus valide. Notons que ces zones sont comme précisé lors du calcul de la formule de Sellmeier des zones de forte absorption, donc les phénomènes de dispersion y sont très compliqué à observé à cause des faibles distances de propagation des ondes à ces fréquences dans le milieu.

Conclusion

Nous avons pu mettre en évidence qu'il existait des phénomènes de dispersion lors de la propagation d'ondes dans certains milieux. Nous avons aussi vu que selon la nature du signal ce n'est pas forcément important de se débarrasser de tout phénomène dispersif alors que dans certain cas c'est impératif (binaire vs analogique). J'ai néanmoins présenté ici la dispersion comme un phénomène uniquement contraignant mais il peut aussi être utiliser pour, par exemple, caractériser une le spectre d'une source lumineuse. ¹⁰

8. Je déconseille de faire cette partie si on peut l'éviter car au niveau des interprétations physiques c'est assez complexes, cf. le cours d'onde, après si vous maîtrisez comme des oufs malades, je dis pourquoi pas. Là c'est surtout une un filet de sécurité si on va trop vite

9. Pour l'obtenir on multiplie simplement le numérateur par le complexe conjugué et on garde la partie entière

10. Expérience possible : Remplacé rapidement lors de la conclusion la QI par une lampe LED pour montrer les spectres différents qu'on peut observer grâce au prisme

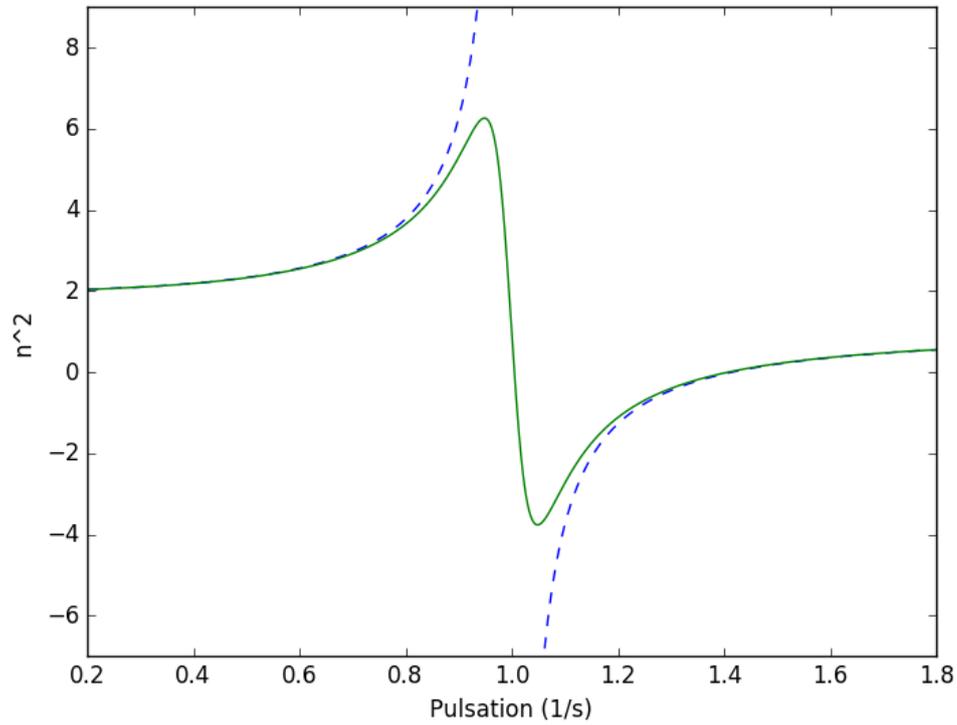


FIGURE 7 – En pointillé le tracé de la formule de Sellmeier et en ligne pleine le tracé de la formule de Kettler-Helmholtz

Questions, commentaires, opinions, et surtout ne nous le cachons pas, prise de notes pendant les questions :) ¹¹

11. Merci Guillaume pour l'aide et pour ta leçon de l'an dernier :D