# LP27 – Propagation guidée des ondes

6 octobre 2016

Christopher Madec & Christopher Madec

*"Chacun de nous est un petit émetteur-récepteur qui s'ignore. Si nos ondes se heurtent violemment, naît le ressentiment."*
Michelle Guérin

## Niveau : L2

## Commentaires du jury

**2014** : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.
**2012-2013** : Les notions de modes et de fréquences de coupures doivent être exposées. On peut envisager d'autres ondes que les ondes électromagnétiques ou optiques.
**2010** : Il faut insister sur les conditions aux limites introduites par le dispositif de guidage.

## Bibliographie


✍ *Ondes, H-prepa*, **Brebec** ⟶ A lire ! Surtout le chapitre dispersion, absorption, paquets d'onde et vitesse de groupe (le reste aussi)

✍ *Optique physique - Propagation de la lumière*, **Taillet** ⟶ Fibre optique, détaillé et complet. Attention aux erreurs de calcul

✍ *BUP 692* ⟶ Considérations historiques et pratiques sru les fibres optiques

✍ *OEM dans le vide et milieux conducteurs*, **Garing** ⟶ Calcul (quasi)-complet de la structure des ondes dans le cable coaxial (fonctions de Bessel youpi), toujours bien à avoir en tête.

✍ *Physique Tout-en-un MP-MP**, **Sanz** ⟶ Guide d'onde rectangulaire très bien fait !

✍ *Cours de Paco Maurer en 8 heures*, **Maurer** ⟶ Très bien, par contre un peu difficile à suivre par moments.


## Prérequis

➢ Optique géométrique et ondulatoire

➢ Electromagnétisme et ondes EM dans le vide

➢ Bases de l'électrocinétique

## Expériences

☕ Guidage optique par un jet d'eau

## Table des matières


**1 Guidage d'onde entre 2 plaques conductrices** **3**
1.1 Présentation et mise en équation . . . 3
1.2 Base des modes de propagation . . . 4
1.3 Mode TE . . . 4
1.3.1 Champ électrique . . . 4
1.3.2 Modes, pulsation de coupure et relation de dispersion . . . 4
1.3.3 Vitesse de phase et de groupe des différents modes et types de dispersion . . . 5
1.3.4 Aspect énergétique . . . 5
1.4 Cas réel : mode TEM et guide d'onde rectangulaire . . . 5

**2 Le cable coaxial** **6**
2.1 Présentation et mode TEM . . . 6
2.2 Modèle électrocinétique et propagation . . . 6
2.3 Cas réel : adaptation d'impédance et pertes dans le cable . . . 7

**3 Fibre optique** **8**
3.1 Présentation et approche géométrique . . . . . . . . 8
3.2 Approche ondulatoire . . . . . . . . 8
3.3 Fibres à gradient d'indice . . . . . . . . 9
3.4 Utilisations . . . . . . . . 10

# Introduction

Nous avons étudié précédemment le caractère propagatif des ondes dans différents domaines de la physique. Cette propriété fondamentale est utilisée aujourd'hui pour le transport de l'information, notamment dans le domaine des télécommunications (transmission d'information par des moyens electroniques et informatiques). Ce transport se fait majoritairement grâce aux ondes électromagnétiques car leur vitesse de propagation est rapide (en comparaison avec des ondes acoustiques par exemple).

Nous avons aussi étudié un cas particulier de propagation : la propagation libre. Utilisée dans le cas des antennes par exemple, le transport de l'information se fait alors principalement sur des courtes distances à cause de l'étalement dans l'espace de l'amplitude (donc de l'énergie) de l'onde : il y a atténuation. C'est le cas par exemple de l'onde sonore créée lorsque l'on parle, qui est assimilable à une onde sphérique : même dans un milieu sans absorption, l'énergie de l'onde varie en $1/\mathrm{r}^2$. De plus, différents phénomènes (dispersion, réfraction, interférences, diffusion,...) influent sur la propagation. Une question se pose alors : comment propager un signal sur de longues distances, tout en minimisant les phénomènes nuisant à cette propagation ?

Une des solutions actuelles réside dans la propagation guidée : il s'agit de faire passer une onde d'un point A (émétteur) à un point B (récepteur) en suivant un chemin guidé, avec le moins de pertes possibles, par ce que l'on va appeler un guide d'onde. Nous alons alors nous intéresser à des quelques types de guides, à leurs propriétés et leurs domaines d'applications dans le domaine des télécommunications. On s'intéressera principalement aux ondes électromagnétiques, même si le propos se généralise à d'autres types d'ondes.

# 1 Guidage d'onde entre 2 plaques conductrices

## 1.1 Présentation et mise en équation

✍ *Physique Tout-en-un MP-MP* p555*, **Sanz**, *OEM dans le vide et milieux conducteurs*, **Garing**

Nous allons étudier une onde électromagnétique (EM) qui se propage dans le vide, mais qui est confinée entre deux plans conducteurs infinis supposés parfaits, situés en $x = 0$ et $x = a$. La direction de propagation se fait selon l'axe $\overrightarrow{e_z}$. Cette propagation est régie par l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

Des conditions limites apparaissent à cause de la présence des plaques. Dans un conducteur parfait, le champ électromagnétique est nul [1], donc à la surface des conducteurs, les composantes tangentielles du champ électrique et la composante normale du champ magnétiques sont nulles, ce que l'on peut résumer ici par :

$$\begin{cases} \mathrm{E}_y(x=0,y,z) = \mathrm{E}_y(x=a,y,z) = 0 \\ \mathrm{E}_z(x=0,y,z) = \mathrm{E}_z(x=a,y,z) = 0 \\ \mathrm{B}_x(x=0,y,z) = \mathrm{B}_x(x=a,y,z) = 0 \end{cases}$$

Nous allons restreindre notre domaine d'étude aux ondes non planes monochromatiques progressives selon les $z$ croissants que l'on écrivera sous une forme générale :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \overrightarrow{\mathrm{E}_0}(x,y,z)\exp[i(\omega t - k_z z)] \tag{2}$$

Symétries et invariances : invariance par translation selon $y$ et $z$ de l'amplitude. [2]. On injecte donc ce champ dans l'équation de d'Alembert, pour obtenir finalement que :

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{E}_0}(x)}{\mathrm{d}x^2} - (\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2)\overrightarrow{\mathrm{E}_0} = \overrightarrow{0} \tag{3}$$

1. $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$, $\gamma$ tend vers $\infty$ pour un conducteur parfait et $|\overrightarrow{j}|$ borné $\Rightarrow |\overrightarrow{E}| = 0$, puis avec Maxwell-Faraday, $\overrightarrow{B}$ est nul (pour des ondes)

2. On suppose le régime permanent établi, ou l'on peut alors considérer l'invariance par translation selon $z$ (il faut bien injecter l'onde à un endroit ($z = 0$ par exemple), créant un régime transitoire, que l'on suppose terminé) mais ici les plaques étant considérées comme infinies, on peut simplifier en disant qu'il y a tout de suite invariance selon $z$

## 1.2 Base des modes de propagation

On peut montrer (en écrivant l'équation de Maxwell-Faraday) que les grandeurs $\mathrm{E}_y$, $\mathrm{B}_x$ et $\mathrm{B}_z$ sont couplées, ainsi que $\mathrm{E}_x$, $\mathrm{E}_z$ et $\mathrm{B}_y$ (et qu'un couplage est indépendant de l'autre). le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ (resp. $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est alors déterminé par la connaissance seule de $\mathrm{E}_y$ (resp. $\mathrm{B}_y$). On peut donc étudier séparément ce qu'on appele les groupes TE (où $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ est tranverse à la direction de propagation, mais *a priori* pas $\overrightarrow{\mathrm{B}}$) et TM. Les modes TE et TM forment une base de solution de la propagation des ondes dans le guide d'onde uniaxe. On obtient l'ensemble des solutions par combinaison linéaire des deux. Nous allons donc étudier le mode TE par la suite. [3]

## 1.3 Mode TE

### 1.3.1 Champ électrique

D'après le paragraphe précédent, le champ électrique de l'onde aura, pour un mode TE, la forme suivante (en combinant avec l'équation 2) :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0(x)\exp[i(\omega t - k_z z)]\overrightarrow{e_y} \tag{4}$$

L'équation de propagation (3) devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}_0(x)}{\mathrm{d}x^2} - (\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2)\mathrm{E}_0 = 0 \tag{5}$$

Les conditions limites se réecrivent $\mathrm{E}_0(0) = \mathrm{E}_0(a) = 0$. Il faut discuter du signe de $\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$ :

- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 < 0$ : solution qui est combinaison linéaire d'exponentielles réelles qui doit s'annuler deux fois $\Rightarrow$ champ nul
- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = 0$ : solution qui est combinaison linéaire de 1 et $x$ qui doit s'annuler deux fois $\Rightarrow$ champ nul
- $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 > 0$ : solution qui est combinaison linéaire d'exponentielles complexes et $x$ qui doit s'annuler deux fois $\Rightarrow$ champ nul. Enfin pas tout à fait ..

Intéressons-nous donc au troisième cas : $\mathrm{E}_0(x) = \alpha_1\exp(iKx) + \alpha_2\exp(-iKx)$. Les conditions limites imposent donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_0(0) &= 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \mathrm{E}_0(a) &= 0 = 2i\alpha_1\sin(Kx) \Rightarrow K = \frac{p\pi}{a},\ p \in \mathbb{N}^* \end{aligned} \tag{6}$$

Donc, en conclusion :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_{0n}\sin(\frac{p\pi x}{a})\cos(\omega t - k_z z)\overrightarrow{e_y},\ p \in \mathbb{N}^* \qquad (7)}$$

### 1.3.2 Modes, pulsation de coupure et relation de dispersion

Stoppons un peu les calculs pour l'instant et intéressons-nous à la forme du champ. Les condtitions aux limites ont modifié la structure de l'onde électromagnétique qui se propage dans le vide : la propagation guidée d'une onde par les deux plans impose une quantification des solutions [4]. On a alors une famille discrète de solutions, appelées *modes.* A un entier $p$ non nul correspond alors un mode $\mathrm{TE}_p$ tel que $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - (\frac{p\pi}{a})^2$. A chaque mode correspond une pulsation de coupure : en effet, on a propagation du mode que si $k_z > 0$ soit $\omega > \frac{p\pi c}{a} = \omega_{c,p}$. La condition en terme de longueur d'onde ou fréquence est donc

$$\boxed{f > f_{c,p} = \frac{pc}{2a} \text{ ou } \lambda < \lambda_{c,p} = \frac{2a}{p}} \tag{8}$$

Le guide d'onde est alors un passe-haut ! Si la pulsation d'une onde incidente ne dépasse pas la valeur de la plus petite pulsation de coupure (ici $\omega_{c,1}$), alors il n'y a pas de propagation dans le guide (onde évanescente).

**Remarque**

> Une petite application numérique : $a = 3$ cm, $p = 1$ on trouve 5 GHz, ce qui correspond à une longueur d'onde de 6 cm (on parle d'ondes centimétriques).

Vu que la relation entre $\omega$ et $k_z$ est non linéaire, le guide d'onde est dispersif selon la direction $z$.

3. On fait plutôt le mode TE car le mode TM requiert de repasser par $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ pour trouver les conditions limites, ce qui allonge un peu les calculs, mais c'est loin d'être difficile (les calculs sont les mêmes)
4. C'est dire de l'importance des conditions limites, c'est le vide MAIS on a restriction de l'onde propagée

### 1.3.3 Vitesse de phase et de groupe des différents modes et types de dispersion

La vitesse de phase de l'onde est donnée par la relation $v_\varphi = \frac{\omega}{Re(k_z)}$. $k_z$ étant réel, $Re(k_z) = k_z$. Ici :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\omega_{c,p}}{\omega})^2}} \tag{9}$$

La vitesse de groupe s'obtient en différenciant la relation avec la vitesse de phase :

$$k_z \mathrm{d}k_z = \frac{1}{c^2}\omega \mathrm{d}\omega \Rightarrow \boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} = c^2/v_\varphi = c\sqrt{1 - (\frac{\omega_{c,p}}{\omega})^2}}(= \frac{ck_z}{\sqrt{k_z^2 + (\frac{p\pi}{a})^2}}) \tag{10}$$

On peut montrer (je le ferai si j'ai le temps au tableau mais j'en doute fortement) que la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie. Traçons la courbe $\omega(k_z)$ pour différentes valeurs de p.

On remarque que pour une valeur $\omega_0$ fixée, $k_z$ donc la vitesse de groupe dépend du numéro du mode. C'est ce qu'on nomme la dispersion intermodale, qui est due aux conditions limites imposées à l'onde. Si l'on envoie un signal se propageant sur deux modes, chacun des modes arrivera au bout du guide à un temps différent ce qui rend difficile la transmission de signaux sur plusieurs modes à la fois (dispersion du paquet d'onde).

### 1.3.4 Aspect énergétique

On montre que le champ $\overrightarrow{B}$ est de la forme suivante [5] :

$$\overrightarrow{B} = \frac{-E_{0p}k_z}{\omega}\left[\sin(\frac{p\pi x}{a})\cos(\omega t - k_z z)\overrightarrow{e_x} + \frac{p\pi}{k_z a}\cos(\frac{p\pi x}{a})\sin(\omega t - k_z z)\overrightarrow{e_z}\right] \tag{11}$$

Le vecteur de Poynting vaut donc :

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}}{\mu_0} \Rightarrow \boxed{< \overrightarrow{\Pi} >_t = \frac{E_{0p}k_z}{2\mu_0\omega}\sin^2(\frac{p\pi x}{a})\overrightarrow{e_z}} \tag{12}$$

L'énergie se propage donc bien selon l'axe de propagation de l'onde $\overrightarrow{e_z}$, sans atténuation.

## 1.4 Cas réel : mode TEM et guide d'onde rectangulaire

L'idéal serait d'avoir une relation de dispersion du type $k_z = \frac{\omega}{c}$, ou il n'y a aucune dispersion, et ou la propagation se fait à la vitesse $c$. Cette condition est vérifiée parce qu'on appelle mode TEM : c'est un mode particulier du mode TM dont le champ est sous la forme :

$$\overrightarrow{E} = E_0\exp[i(\omega t - k_z z)]\overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{B} = B_0\exp[i(\omega t - k_z z)]\overrightarrow{e_x} \tag{13}$$

Ce mode est très intéressant car il y a possibilité de transmission d'information sans déformation et sans dispersion lors de son transport entre l'émétteur et le récepteur, et seul le mode TEM peut satisfaire ces conditions. On parle alors de guide monomode, car seul le mode $p = 0$ y est représenté.

Qu'en est-il en pratique ? Les guides d'onde présentés précedemment sont très peu utilisés : il n'est pas possible d'avoir un espace "infini". Les guides dont la géométrie est la plus proche sont les guides d'onde rectangulaires creux :

5. avec Maxwell-Faraday

il faut rajouter deux plaques conductrices en $y = 0$ et $y = b$. La propagation guidée y est toujours possible, mais les modes TEM dans cette géométrie ne sont plus possibles. [6]. On les utilise dans les micro-ondes et dans des équipements radar.

*En revanche, si on fait varier le potentiel au sein du guide d'onde en y insérant un autre conducteur par exemple [a], on pourra avoir le mode TEM qui se propage : c'est le cas du cable coaxial*

*a.* ce qui revient à supprimer la connéxité du guide

# 2 Le cable coaxial

✍ *Ondes, H-prepa*, **Brebec**, *OEM dans le vide et milieux conducteurs*, **Garing**

## 2.1 Présentation et mode TEM

Un cable coaxial est constitué d'une âme conductrice, souvent en cuivre, entourée d'un diélectrique isolant (polyéthylène) de permittivité relative $\epsilon_r$. Une enveloppe métallique enveloppe en aluminium enveloppe le diélectrique, le tout étant protégé par une gaine en PVC [7] pour protéger le cable du milieu environnant. L'intérêt du cable coaxial par rapport à un cable électrique simple est qu'il a moins de pertes à haute fréquences, qu'il guide mieux l'énergie et que les champs extérieurs ont quasiment aucune influence sur son comportement. Ces cables permettent la propagation du mode TEM comme expliqué précédemment, ce que nous allons étudier. Plein de calculs moches et horribles sont possibles pour obtenir d'autres trucs plus horribles. Ce qu'il faut retenir : Les calculs sont à peu près les mêmes que pour le guide d'onde rectangulaire, mais l'étude en coordonnées cylindriques complique les calculs. On retiendra qu'il y a encore quantification des modes et présence de fréquences de coupure basses pour les modes TE et TM (on prend $a = 2$ mm et $b = 8mm$) :

- $f_{c,TE} = \frac{c}{\pi(b-a)} = 25$ GHz
- $f_{c,TM} = \frac{c}{\pi(b+a)} = 9,5$ GHz

Le mode TEM existera en dessous de la fréquence de coupure la plus basse ! En pratique, les fréquences maximales d'utilisation des cables coaxiaux en TP sont de quelques MHz, on peut donc bien utiliser le cable coaxial comme un guide monomode.

Je vais présenter une approche filaire du guide d'onde (pour ne pas faire la même chose), qui s'apparente plus à ce que l'on utilise en électronique.

## 2.2 Modèle électrocinétique et propagation

On suppose la ligne sans perte en se plaçant dans le cadre d'ondes TEM, ce qui revient à se placer à basse fréquence donc dans l'ARQS. On peut alors montrer que le cable se modélise par une inductance $\Lambda$ et une capacité linéique $\Gamma$ (modèle des constantes reparties) de valeur :

$$\Gamma = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(\frac{b}{a})},\ \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(\frac{b}{a}) \tag{14}$$

Prenons un boût de cable coaxial selon $x$ compris entre $x$ et $x + \mathrm{d}x$, qui se modélise donc par une inductance dans l'âme et une capacité entre l'âme et le blindage. Le schéma électrique est donc :

blabla calcul mailles noeuds, ohlala tiens donc on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \Gamma\Lambda\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0} \tag{15}$$

6. Mathématiquement, les champs verifient l'équation de Laplace, qui possède une solution non nulle si le guide d'onde est non simplement connexe

7. Polychlorure de vinyle, moi perso je m'en souvenais plus

La célérité de l'onde est de $c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$.

**Ordre de grandeur**

On trouve $c \approx 2.10^8$ m.s$^{-1}$ ($\epsilon_r(\mathrm{PE}) = 2,25$).

.

## 2.3 Cas réel : adaptation d'impédance et pertes dans le cable

Dans la pratique, la transmission d'information se fait entre en émetteur et un récepteur. On peut modéliser le récepteur par une impédance de sortie notée $Z$. On peut montrer que l'impédance caractéristique du cable est $Z_c = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$. En branchant alors la sortie du cable à $Z$, il y a des conditions aux limites particulières, et possibilité d'existence d'une onde réfléchie et transmise. Le coefficient de réflexion $\rho$ vaut :

$$\rho = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} \tag{16}$$

Il y a plusieurs cas possibles (impédance de sortie nulle - court-circuit - donc $\rho = -1$, impédance de sortie infinie - circuit ouvert - donc $\rho = 1$), mais celui qui nous intéresse est lorsque $Z = Z_c$. Dans ce cas, le coefficient de réfléxion est nul, et toute l'énergie transportée dans le cable sera transmise à $Z$. C'est ce que l'on cherche à faire en pratique ! Par exemple, l'adaptation d'impédance pour une TV nécéssite d'utiliser un cable coaxial d'impédance caractéristique de 75 Ω, alors que pour des connexions d'antennes c'est 50 Ω.

Un autre problème pratique de la propagation guidée concerne les pertes dans les cables. Ceux-ci sont dus principalement à l'effet Joule dans les conducteurs et aux pertes de charge dans l'isolant. Le schéma équivalent est alors le suivant :

On obtient (toujours par lois des mailles et des noeuds), l'équation suivante, appelée équation des télégraphistes [8] :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \Gamma\Lambda\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = rgU + (r\Gamma + \Lambda g)\frac{\partial U}{\partial t} \tag{17}$$

Sans grandement entrer dans les détails, en vérifiant la condition de Heaviside $r\Gamma = g\Lambda$, on peut avoir une propagation sans absorption (mais atténuation) [9]. Cette atténuation est la deuxième caractéristique électrique (avec l'impédance caractéristique) importante du cable coaxial.

**Ordre de grandeur de l'atténuation**

On définit l'atténuation en décibels par unité de distance avec la formule $A = \frac{20}{L(\mathrm{km})}\log(\frac{\Phi_s}{\Phi_e})$, avec $\Phi_i$ l'amplitude du signal à l'entrée ou la sortie. Cette valeur est d'environ 5 dB/km pour les cables coaxiaux. Cela représente un rapport $\Phi_s = 1,77\Phi_e$ ! !

En conclusion, le cable coaxial est un guide d'onde permettant une transmission de l'information correcte pour des fréquences inférieures au GHz et que pour des distances inférieures à une centaine de mètres.

*Il est donc nécessaire de réamplifier le signal si on veut le transmettre correctement l'information sur de longues distances ! On va essayer de trouver une manière de propager plus loin en étudiant maintenant la fibre optique.*

8. Pour la petite histoire, l'étude de cette équation a permis de comprendre la propagation et la déformation des impulsions du langage Morse le long des fils télégraphiques afin d'améliorer la réception de ces impulsions sur de grandes distances. Dire que maintenant on propage des impulsions de 0 et de 1 ...
9. les cables coaxiaux vérifient facilement cette condition !

# 3 Fibre optique

*Optique Physique*, **Taillet**, *BUP 692*

## 3.1 Présentation et approche géométrique

**Guidage optique par un jet d'eau**
On remplit un vase de Mariotte d'eau (suffisamment pour avoir un bon débit) et on ouvre le robinet qui crée un filet d'eau. On envoie un laser à la sortie du vase : il est guidé par le jet d'eau. Le laser est confiné dans le jet d'eau par réflexion totale à l'interface entre l'eau et l'air qui ont des indices optiques différents.

En 1960, l'invention du laser donne la possibilité de transmettre un signal sur de longues distances sans trop de pertes. En 1966, KAO et HOCKAM prouvent que les atténuations dans les fibres optiques étaient plus dues aux impuretés qu'aux défauts de fabrication. Dès lors, on passe de pertes de 20 dB/km en 1970 à 0,2 dB/km en 1979 ! C'est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles on utilise du verre en silice, possédant une grande pureté (et en plus c'est un très bon isolant électrique) [10].

On modélise une fibre optique dans sa forme la plus simple par un coeur cylindrique, formé d'un matériau transparent d'indice $n_1$, de diamètre $a$, entouré d'une gaine (transparente aussi) d'indice $n_2$, avec $n_1 > n_2$ si on veut pouvoir guider des rayons lumineux, ces derniers devant se réfléchir totalement dans la fibre. Par réflexions successives, l'onde va être maintenue dans la fibre et être guidée le long de l'axe $z$ (voir schéma ci-dessous).

La condition de réflexion sur l'angle $\theta$ s'écrit :

$$\cos(\theta) > \frac{n_2}{n_1} \tag{18}$$

Là encore, ce sont les conditions limites qui permettent le guidage du rayon lumineux, et donc de l'onde. Cependant l'approche géométrique ne permet pas d'expliquer tout le comportement de la propagation guidée. On va adopter une approche ondulatoire par la suite.

## 3.2 Approche ondulatoire

Quand la condition $\cos(\theta) > \frac{n_2}{n_1}$ est vérifiée, la fibre contient une superposition d'ondes réflechies qui peuvent interférer entre elles. On peut alors avoir une atténuation importante si les interférences sont destructives. Les ondes qui se propagent alors sans atténuation sont celles pour lesquelles les interférences sont constructives (les ondes réfléchies sont en phase).

Considérons une onde incidente émise par une source $S_0$. Après une première réflexion, tout se passe comme si l'onde réflechie venait d'une source $S_1$, symétrique de $S_0$ par rapport à la première interface. Après deux réflexions, l'onde réflechie semble venir d'une autre source $S_2$ cette fois-ci, symétrique de $S_1$ par rapport à la deuxième interface. L'onde résultante est alors une superposition de deux ondes issues de $S_0$ et $S_2$. Ces sources étant espacées de $2a$, la différence de phase est donnée alors par la relation

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_1 a\sin(\theta) \tag{19}$$

avec $\lambda$ la longueur d'onde de l'onde incidente. La condition d'interférences constructives s'écrit donc :

$$\boxed{\sin(\theta_p) = \frac{p\lambda}{2an_1}, p \in \mathbb{N}} \tag{20}$$

10. Pour information, les impuretés sont souvent des ions $Fe^{2+}$, $Cu^{2+}$ ou $HO^-$

Schéma :

Donc seuls certains angles d'incidence $\theta_p$ peuvent se propager dans la fibre, on parle alors de *modes de la fibre*. Le vecteur d'onde selon la direction de propagation $k_z$ s'écrit donc :

$$\boxed{k_z^p = n_1\frac{\omega}{c}\cos(\theta_p) = \sqrt{\left(\frac{n_1\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2}} \tag{21}$$

On obtient une relation de dispersion analogue à celle du guide d'onde rectangulaire ! La encore, les signaux se déforment au cours de la propagation dans la fibre. On commence à prendre l'habitude, on va chercher à le propager que le mode le plus faible (zéro ici). On trouve une condition sur $p$, en utilisant les conditions précédentes :

$$\boxed{p < p_{max} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}\frac{2a}{\lambda}} \tag{22}$$

**Ordre de grandeur**

On peut alors obtenir un ordre de grandeur de l'écart entre $n_1$ et $n_2$ pour pouvoir avoir un guide monomode : $(n_1 - n_2)(n_1 + n_2) = \frac{p_{max}^2\lambda^2 n_1^2}{4a^2}$, on prend $n_1 \sim n_2$, $\lambda \sim 1$ µm, $a \sim 10$µm. On a alors $n_1 - n_2 \sim 10^{-2}$. Les indices optiques doivent être très proches.

On a alors un guide monomode avec pas de dispersion ! Enfin pas vraiment, il y a une dispersion chromatique due à la loi de Cauchy (et aussi une dispersion due au milieu) et à la largeur finie du train d'onde qui implique que l'onde n'est pas strictement monochromatique : toutes les longueurs d'onde ne se propagent pas à la même vitesse dans le guide ce qui induit un élargissement de l'impulsion dans la fibre optique [11]. Pour les fibres utilisées, on se place au minimum de dispersion de la silice en envoyant des ondes dont la longueur d'onde est de 1 300 nm.

## 3.3 Fibres à gradient d'indice

Vu que les rayons lumineux ont tendance à se courber vers les indices forts, on impose un gradient d'indice dans la fibre. On aura donc des trajectoires courbées pour les différents modes, mais on peut imposer (en réglant bien les variations d'indice optique) que les rayons incidents aient le même chemin optique. On peut alors propager plusieurs modes sans dispersion intermodale due aux vitesses de propagation différentes, on parle alors de fibre *multimode*.

11. la transmission se fait principalement par envoi de pulses binaires (1 ou 0)

## 3.4 Utilisations

Il y en a plein partout dont le cable sous-marin permettant les télécommunications entre les continents (environ 99 % du trafic intercontinental, données et téléphone, sont transmis sous les océans selon Wikipedia). L'atténuation d'une fibre optique est d'environ 0,2 dB/km. On utilise des répétiteurs (amplificateurs optiques) pour que le signal puisse traverser des milliers de km.

# Conclusion

Bonne nuit

# Questions, commentaires, brouillon pour le DM, signature d'une pétition pour le retour d'Arnaud Le Diffon