Propagation des ondes guidées

19 octobre 2017

de chers condisciples & Pierre Comelli

Laissez-les : ce sont des aveugles qui conduisent des aveugles ; si un aveugle conduit un aveugle, ils tomberont tous deux dans une fosse.
Matthieu 15 :14

Niveau : L2

Commentaires du jury

2014 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.
2012-2013 : Les notions de modes et de fréquences de coupures doivent être exposées. On peut envisager d'autres ondes que les ondes électromagnétiques ou optiques.
2010 : Il faut insister sur les conditions aux limites introduites par le dispositif de guidage.

Bibliographie

- ✍ *Ondes, H-prepa*, **Brebec** complet sur les ondes ⟶
- ✍ *Optique physique - Propagation de la lumière*, **Taillet** ⟶ Fibre optique, calculs complets mais avec des erreurs
- ✍ *BUP 692* ⟶ Considérations historiques et pratiques sur les fibres optiques
- ✍ *vibrations et Ondes*, **Becherrawy** ⟶ Calculs laids mais texte clair sur les guides d'ondes
- ✍ *La Physique en applications*, **Carpentier** ⟶ non-utilisé, l'étude du soubassophone introduit l'influence de la forme géométrique du guide
- ✍ *BUP 742*, ⟶ non-utilisé, expérience sur la propagation d'une onde acoustique, mettant en évidence la vitesse de groupe

Prérequis

- ➢ Optique géométrique
- ➢ Electromagnétisme dans le vide
- ➢ Conducteur parfait

Expériences

- ☕ Haut-parleur et guide en PVC
- ☕ Fontaine de Colladon

Table des matières

Introduction

Définition générale d'une onde : propagation d'une modification locale et temporaire d'un paramètre physique du milieu, sans déplacement de matière, mais avec transport d'information. Exemple hola. Ce transport permet donc l'échange d'informations, exemple de la voix (ondes acoustiques) ou des télécommunications. Cette propagation peut être libre, mais si l'on veut être certain certain qu'ne information partant d'un point A arrive à sa destination B, on peut utiliser un guide d'ondes.

2 min – **Expérience qualitative : intérêt d'un guide d'onde** : On utilise un haut-parleur pour envoyer un signal (ultrasons) en direction d'un capteur relié à un oscillo, et on constate que le signal est trop atténué par sa propagation en ondes sphériques, l'oscillo ne reçoit quasiment aucun signal. Alors on utilise un tube en PVC pour guider les ondes acoustiques entre le haut-parleur et le micro et là l'oscillo affiche quelque chose : le guide d'onde a bien fonctionné.

On va maintenant étudier l'influence qu'a le guide d'onde sur les ondes propagées, en premier via l'exemple des ondes électromagnétiques.

1 Guides d'ondes électromagnétiques

1.1 Guide à 2 plans parallèles

Brebec

On a un guide composé de deux plaques semi-infinies On d'un conducteur parfait (ainsi on n'a pas d'ondes évanescentes qui sortent du guide, l'épaisseur de peau étant nulle) séparées par du vide (on évite ainsi les phénomènes de disersion qui apparaissent dans les milieux matériels).

étudie la propagation d'une OEM dans ce guide, selon la direction $\overrightarrow{x}$. On verra que dans le vide, l'équation de propagation des ondes est l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \tag{1}$$

À l'équation de propagation, qui provient du milieu de propagation uniquement (ici, le vide), viennent s'ajouter des conditions aux limites. Ici, on a deux plaques infinies dans un matériau parfaitement conducteur (conductivité infinie, donc avec la loi d'Ohm, champs nuls à l'intérieur). On a continuité des composantes tangentielles du champ électrique, et de la composante normale du champ magnétique, mais on peut avoir des charges et des courants surfaciques, d'où avec les relations de passage :

$$\begin{cases} \overrightarrow{B}(z=0,a)\cdot\overrightarrow{e_z} = 0 \\ \overrightarrow{E}(z=0,a)\times\overrightarrow{e_z} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Pour établir l'équation de propagation, on se sert des équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\overrightarrow{E} = -\partial_t\overrightarrow{B} \\ \mathrm{rot}\,\overrightarrow{B} = 1/c^2\cdot\partial_t\overrightarrow{E} \end{cases} \tag{3}$$

L'invariance du système par translation selon $\overrightarrow{y}$ nous indique que toutes les dérivées selon y seront nulles, si bien que Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère deviennent :

$$\begin{pmatrix} \partial_z E_y \\ -\partial_z E_x + \partial_x E_z \\ -\partial_x E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t B_x \\ \partial_t B_y \\ \partial_t B_z \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ -\partial_z B_x + \partial_x B_z \\ \partial_x B_y \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \partial_t E_x \\ \partial_t E_y \\ \partial_t E_z \end{pmatrix} \tag{5}$$

et on voit apparaître les deux modes transverses, le TE (E_y, B_x, B_z) et le TM (B_y, E_x, E_z), qui sont découplés. La propagation des ondes décrite ici étant linéaire, on pourra écrire toute onde se propageant dans le guide comme CL d'une onde TE et d'une onde TM.

On va donc désormais étudier...

Onde TE monochromatique, a priori non plane, se propageant selon x.

$$\overrightarrow{E} = E(z)e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{e_y} \tag{6}$$

L'équation de d'Alembert devient alors :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2)E = 0 \tag{7}$$

Ainsi, pour $\omega^2/c^2 - k^2 = K^2 > 0$, on aura les solutions

$$E(z) = A\cos(Kz) + E_0 \sin(Kz) \tag{8}$$

Les CL nous donnent $E(0) = 0 = A$ et $E(a) = 0 \Rightarrow Ka = p\pi, p \in \mathbb{N}^*$. On a alors la solution indexée par $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\overrightarrow{E_p} = E_0 \sin(p\frac{\pi}{a}z)\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y} \tag{9}$$

On voit que le terme en sin décrit une onde non-plane, et que le mode TE est quantifié en un ensemble discret de modes p : c'est là que se manifeste l'influence du guide d'onde.

De plus, la propagation est contrainte par la condition $\omega > \omega_{cp}$, où on note $\boxed{\omega_{cp} = p\frac{\pi}{a}c}$. Pour $\omega < \omega_{cp}$, le nombre d'onde k est imaginaire, il n'y a pas de propagation (onde évanescente). *Le guide d'onde est donc un filtre passe-haut de pulsation de coupure* ω_{cp}, bien que l'on soit dans le vide (!).

Ordre de grandeur

Pour $a = 5$mm, on a $\omega_{c1} = 30$ GHz

.

Ainsi, à ω fixée, tous les modes ne sont pas accessibles. Schéma :

Champ magnétique associé : formule dégueu trouvable facilement avec MF. On constate que $\overrightarrow{B}$ est selon $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_z}$, comme il se doit pour un mode transverse électrique.

Etude énergétique : on calcule le vecteur de Poynting et on trouve $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle = A\overrightarrow{e_x}$: l'énergie se propage effectivement selon la direction imposée par le guide.

Vitesse de phase :

$$v_{\phi,p} = \omega/k = c/\sqrt{1 - \omega_{cp}^2/\omega^2} \tag{10}$$

Vitesse de groupe :

$$v_{g,p} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\sqrt{1 - \omega_{cp}^2/\omega^2} \tag{11}$$

et on constate à nouveau que $v_\phi > c > v_g$.

GRAPHIQUE

Pour un mode p fixé, on vot que v_ϕ et v_g varient avec la pulsation : il y a donc une *dispersion intramodale*. D'autre part, à une pulsation fixée, les vitesses varient avec p : il y a aussi *dispersion intermodale*. On choisira donc de préférence un guide monomode, en choisissant

$$\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2}$$

.

Mode TM

On pourrait faire les mêmes calculs avec $\overrightarrow{B}$ selon y

.

Possibilité d'existence d'un champ TEM (onde plane) :

Toutefois, ce guide n'est que théorique. En pratique, il faudra le fermer de tous les côtés, notamment pour éviter le rayonnement.

1.2 Guides réels

Guide rectangulaire :

Deux fois deux plaques $\Rightarrow$ deux fois deux CL pour les ondes propagatives.

À nouveau, le guide va obliger les ondes à se propager selon x, la relation de dispersion sera alors :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - (p\frac{\pi}{a})^2 - (q\frac{\pi}{b})^2 \tag{12}$$

Le guide est toujours filtre passe-haut, mais cette fois les modes sont quantifiés par deux indices p, q. On va donc décrire des modes TE$_{pq}$. On retrouve des contraintes sur la fréquence si on veut un guide monomode :

$$\omega_{c01} < \omega < \omega c11 \Leftrightarrow (\frac{\pi}{a})^2 < (\frac{\omega}{c})^2 < (\frac{\pi}{b})^2 + (\frac{\pi}{a})^2 \tag{13}$$

Exemple : guide hyperfréquence : $a = 11.4$mm, $b = 22.8$mm

La condition de guidage monomodal devient 6.58 GHz $< f <$ 14.71 GHz

.

Le défaut du guide rectangulaire est qu'il ne peut pas transmettre d'onde TEM (onde plane : impossible).
Câble coaxial : il fait partie des guides non simplement connexes, et peut donc transporter des ondes TEM. Les calculs suivent le même raisonnement, mais sont un peu plus techniques à cause des coordonnées cylindriques.

Typiquement $a = 2$ mm, $b = 8$ mm ;
Fréquences de coupure :
$f_{c,TE} = 25$ GHz
$f_{c,TM} = 9.5$ GHz

Remarque : le mode TEM existe pour des fréquences inférieures à f_c. De toute manière, on n'utilise pas de câble coaxial à des fréquences supérieures à quelques MHz, car le signal commence alors à être fortement atténué. Le câble coaxial est donc monomode.

Ces guides à OEM ont une atténuation importante ; elle varie en fonction de la fréquence et des dimensions, mais en moyenne elle est de 10 dB/100m. D'où l'intérêt d'utiliser une fibre optique, où le signal porte beaucoup plus loin dans pertes.

2 Fibre optique

2.1 Présentation

On a longtemps voulu utiliser la lumière comme support d'information, surtout depuis la création du laser à la fin des années 50 (Alfred Kastler, prix Nobel).
Faisabilité de la fibre : 1966, Kao et Hackam montrent que l'atténuation en propagation, dans une fibre optique, est due à des impuretés et non au matériau pur, constitué de silice.
Avantages : faible atténuation du signal (de l'ordre de 0.2 dB/km), on peut atteindre de très hautes fréquences (500 THz, domaine optique) et transporter une grande quantité d'information, bien que la vitesse de propagation ne soit pas très différente de celle qu'on a dans un câble coaxial. Encore moult avantages : insensible aux signaux EM parasites de basse fréquence, ne rayonne pas, plus légère et plus souple qu'un guide métallique.

Principe de fonctionnement : une fibre optique utilise les variations d'indice du milieu de propagation pour guider la lumière selon la direction souhaitée. On peut montrer cela via une approche géométrique dans le cas, simple, d'une fibre à échelon d'indice.

La loi de Snell-Descartes pour la réfraction nous donne la condition de réflexion totale à l'intérieur de la gaine, avec $n_1 > n_2$:

$$n_1 \sin(\pi/2 - \theta) > n_2 \Rightarrow \boxed{\cos(\theta) > n_2/n_1} \tag{14}$$

On obtient ainsi une première contrainte sur les ondes guidées (NB : on utilise l'approche géométrique mais on n'oublie pas qu'on parle d'ondes !).

Ordres de grandeur

Fibre optique : $n_1 = 1.515$, $n_2 = 1.475$, d'où $\theta = 13°$;
Eau : $n_1 = 1.33$, $n_2 = 1.00$ d'où $\theta = 40°$

Autre limitation : on souhaite aussi que le rayon incident puisse rentrer et se propager dans la fibre optique, d'où, toujours avec Snell-Descartes, l'angle d'incidence maximal (= angle d'acceptance) :

$$n \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta = \sqrt{n_1^2(1-\cos^2\theta)} \Leftrightarrow \boxed{n\sin(\theta_0) = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \tag{15}$$

Ordres de grandeur

Air/fibre : $\theta_0 \approx 20°$; Air/eau : $\theta_0 \approx 60°$

Guidage optique par un jet d'eau (fontaine lumineuse de Colladon, 1841)
On remplit un vase de Mariotte d'eau (suffisamment pour avoir un bon débit) et on ouvre le robinet qui crée un filet d'eau. On envoie un laser à la sortie du vase : il est guidé par le jet d'eau. Le laser est confiné dans le jet d'eau par réflexion totale à l'interface entre l'eau et l'air qui ont des indices optiques différents. La lumière suit ainsi un chemin courbe, et non pas tout droit comme d'habitude. Le mieux, si on réussit à trouver le bon rythme pour cette expérience, serait de montrer que lorsque le débit passe sous une valeur critique, le laser s'échappe en partie du guide et va éclairer le mur en face.

Et la quantification, elle est toujours là ? Oui oui.

2.2 Quantification

Cette fois il faut reprendre une approche au moins à moi- On tié ondulatoire, avec des différences de marche. Ainsi, le guidage fait se superposer toutes les ondes réfléchies sur les parois de la fibre, et le but est d'obtenir des interférences constructives. On n'oublie pas de dessiner les surfaces d'onde orthogonales au rayon. Différence de marche au bout de deux réflexions successives :

$$\delta = 2an_1 \sin\theta \tag{16}$$

a donc un déphasage :

$$\delta\phi = 2\pi\delta/\lambda' = 2\pi\frac{2n_1 a\sin\theta}{n_1\lambda} \tag{17}$$

où on a noté $\lambda' = n_1\lambda$ la longueur d'onde dans le coeur de la fibre optique. On veut que ce déphasage soit un nombre entier de longueurs d'onde, soit :

$$\delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta = 2\pi p, p \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \boxed{\sin\theta_p = \frac{p\lambda}{2a}} \tag{18}$$

On obtient, à nouveau, une quantification causée par la dimension finie du guide. De plus, on voit encore apparaître une fréquence de coupure :

$$\lambda \leq \frac{2a}{p} \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq c\frac{p\pi}{a} = \omega_p} \tag{19}$$

Problème : on a encore de la dispersion intermodale. Ainsi, différents modes, correspondant à différents angles d'incidence, parcourront des chemins optiques plus ou moins longs, d'où des vitesses de groupe selon x différentes et une dispersion dans la direction de propagation.

Solution : limiter le nombre de modes que l'on propage. En effet, pour avoir réflexion totale il faut vérifier

$$\frac{n_2}{n_1} < \cos(\theta_p) = \sqrt{1 - \frac{p^2\lambda^2}{4a^2}} \Leftrightarrow \boxed{p < \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}\frac{2a}{\lambda}} \tag{20}$$

On peut donc limiter le nombre de modes en jouant sur le rayon de la fibre ou les indices des matériaux utilisés. Attention toutefois à ne pas en abuser, car en faisant cela on limite l'intensité du signal.

Ordre de grandeur

$\lambda = 550$ nm, $n_1 = 1.505$, $n_2 = 1.500 \Rightarrow a < 10\mu$m pour obtenir une fibre monomode

Finalement, plutôt que des fibres à saut d'indice on peut utiliser des fibres à gradient d'indice. Le coeur a toujours un indice supérieur à celui de la gaine, mais qui décroît continûment lorsqu'on s'éloigne de l'axe de la fibre. Par ailleurs, on peut montrer que les deux rayons ci-contre parcourent le même chemin optique, car les plus longs trajets vers l'extérieur sont compensés par un indice plus petit dans cette zone. On évite donc la dispersion intermodale.

Conclusion

- Influence du guide d'onde sur les informations qu'il est possible de transmettre (conditions aux limites à vérifier).
- Ici, on a surtout regardé le matériau qui constitue le vide (métal parfait *vs* vide, indice n1 *vs* indice n2).
- On n'a pas parlé de la dispersion causée par le milieu de propagation (ex : prisme).
- On pourrait aussi étudier des géométries plus tordues, comme par exemple le pavillon de certains instruments de musique (NB : on peut trouver le moyen de faire une troisième partie passionnante dessus, à condition d'aller très vite sur le reste, projet qui a été abandonné ici).

Fin de l'encre, début du Grand Blanc :