

LP 28 - ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX DIÉLECTRIQUES.

12 janvier 2017

"Mais si les week-ends de trois jours en mai c'est bien... Ca permet de réviser les écrits!"

Karen Monneret & Paul Haddad

PROBLÈME D'ESPACE-TEMPS,

Niveau : L2

Commentaires du jury

- *Jusqu'en 2013*, le titre était : Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique. Modélisation microscopique.
- **2009, 2010** : Les conventions adoptées doivent être précisées avant toute discussion sur la partie imaginaire du vecteur d'onde.
- **2006** : Il y a souvent confusion entre absorption et atténuation.
- **2001** : Dans un diélectrique, l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permittivité ϵ_r dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations. Les aspects quantiques de l'interaction entre l'onde électromagnétique et la matière peuvent être évoqués.
- **1999** : Le modèle de l'électron élastiquement lié n'est pas toujours bien compris. Il est trop souvent assimilé au rayon vecteur noyau-électron, le lien entre le terme de rappel et la force électrostatique n'est pas fait et l'origine du terme de frottement fluide n'est pas interprétée.
- **1998** : Cette leçon mérite une discussion physique des phénomènes de dispersion et d'absorption, supportée par des modèles de milieux matériels. Il est parfaitement inutile et contreproductif de s'enfermer dans de longs calculs formels sur les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction.
- **1997** : Il est parfois utile de distinguer les raies de résonance des autres raies optiques.

Bibliographie

- *Ondes MP*, **HPrépa** → pour les ordres de grandeur et la discussion physique
- *Cap Prépa PC*, **Renvoizé** → pour les ordres de grandeur et les définitions
- *Electromagnétisme*, **Mauras** → pour les équations de Maxwell

Prérequis

- Ondes électromagnétiques dans le vide
- Rayonnement dipolaire
- Phénomène de dispersion
- Mécanique du point
- Echelle mésoscopique
- Dispersion dans un prisme
- Principe de l'effet de serre

Table des matières

1	Polarisation d'un milieu matériel.	3
1.1	Les mécanismes de polarisation.	3
1.2	Vecteur polarisation.	4
2	Modèle de l'électron élastiquement lié.	5
2.1	Hypothèses et équations.	5
2.2	Réponse du système.	6

3	Propagation d'une OEM dans un diélectrique.	7
3.1	Équation de Maxwell.	7
3.2	Relation de dispersion.	8
3.3	Absorption et Dispersion.	8

Introduction

cf. Cap Prépa

Dans une précédente leçon, nous avons étudié les OEM dans le vide et établi les équations de Maxwell. Qu'en est-il dans un milieu ?

Tout d'abord, les sources du champ EM sont des charges électriques ou des courants électriques, cad des charges en mouvement.

Dans un milieu matériel, on distingue deux types de charges électriques :

- les charges libres : particules chargées susceptibles de se déplacer dans tout le volume du matériau ($\equiv$ électron de valence) ; ce sont elles qui conduisent le courant ; notation ρ_l, j_l .
- les charges liées : particules chargées qui ne peuvent subir que de petits déplacements autour de leur position d'équilibre ($\equiv$ électron de coeur) ; fixées au matériau ; notation ρ_p, j_p

Sous l'action d'un champ EM, les charges liées oscillent à la fréquence de l'onde et on va pouvoir déplacer les charges, cad séparer les charges - des charges + : on parle de milieu diélectrique ;

milieu diélectrique : milieu susceptible d'être polarisé, cad de posséder un moment dipolaire électrique permanent - localement-, ou d'en acquérir un sous l'effet d'un champ électrique extérieur.

Un diélectrique est parfait s'il ne possède pas de charges libres : $j_l = 0$ et $\rho_l = 0$. On parle d'isolant électrique. On se placera dans ce cas pendant toute la leçon.

Exemples de diélectriques : le verre, le bois, de nombreux plastiques.

Objectifs : Quels sont les mécanismes de polarisation ? Que se passe-t-il microscopiquement ? Que deviennent les équations de Maxwell ? Qu'observe-t-on macroscopiquement ?

1 Polarisation d'un milieu matériel.

1.1 Les mécanismes de polarisation.

cf. HPrépa et Cap Prépa

Il existe différents types de polarisation : électronique, dipolaire et ionique (cf. transparent à la fin du poly).

Lorsqu'un milieu polarisable est placé dans un champ extérieur $\vec{E}$, il apparaît un moment dipolaire atomique $\vec{p}$: c'est la réponse du milieu au champ $\vec{E}$. Les moments dipolaires sont eux-mêmes des sources d'un champ $\vec{E}_p$. Le champ au voisinage est donc modifié et à reconsidérer : $\vec{E}_l = \vec{E}_p + \vec{E}$, appelé champ local.

polarisation électronique.

Milieu dont les molécules, atomes, n'ont pas de moments dipolaires électriques permanents (H₂, O₂). On les plonge dans un champ $\vec{E}$ qui déforme les atomes ou les molécules $\rightarrow$ déformation du nuage électronique $\rightarrow$ séparation des barycentres positif et négatif ;

La réponse est alors $\vec{p} = \alpha_e \epsilon \vec{E}_l$ avec $\alpha_e > 0$ et $\tau_{rep} \approx 10^{-15} s$. A l'échelle mésoscopique, le moment dipolaire est la somme des moments de chaque particule.

polarisation d'orientation.

Milieu contenant des atomes ou des molécules ayant un moment dipolaire électrique permanent (H₂O, HCl).

A l'échelle mésoscopique sans champ $\vec{E}$, les moments dipolaires sont orientés de façon aléatoire donc en moyenne, le moment dipolaire total est nul.

Avec un champ $\vec{E}_l$, chaque dipôle est soumis à un couple $\vec{p} \otimes \vec{E}_l$ et tend à s'aligner avec $\vec{E}$ (en compétition avec l'agitation thermique).

Le moment dipolaire moyen est de la forme : $\langle \vec{p} \rangle = \alpha_{or} \epsilon_0 \vec{E}_l$ avec $\alpha_{or} > 0$ et $\tau_{rep} \approx 10^{-5} s$.

polarisation ionique.

Pour un cristal ionique possédant des anions et des cations, initialement neutre, ordonné et sans moment dipolaire.

Avec $\vec{E}$, les ions se déplacent légèrement et la régularité du cristal est rompue.

A l'échelle macroscopique, ces phénomènes sont décrits par un nouveau vecteur : le vecteur polarisation.

1.2 Vecteur polarisation.

L'apparition de moments dipolaires au sein d'un milieu isolant sous l'action d'un champ $\vec{E}$ caractérise le phénomène de polarisation induite.

On caractérise le milieu en tout point M par son moment dipolaire volumique tel que :

$$d\vec{p} = \vec{P} d\tau$$

avec $d\vec{p}$ le moment dipolaire que possède le milieu, $\vec{P}$ le vecteur polarisation et $d\tau$, le volume mésoscopique (de l'ordre du centième de μm^3).

Par analyse dimensionnelle, on a que $\vec{P}$ a pour unité des $C.m^{-2}$: c'est une densité surfacique de charges. Cette grandeur est intensive.

Si $d\tau$ comporte N dipôles microscopiques $\vec{p}_i$, on a alors :

$$d\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{d\tau} \sum_i \vec{p}_i$$

Ce vecteur est macroscopique dans le sens où il est défini comme une valeur moyenne sur le volume mésoscopique des moments microscopiques p_{micro} .

A ce vecteur polarisation peut être défini un vecteur densité de courant et une densité volumique de charges.

vecteur densité de courant.

Soit un volume $d\tau$ contenant N particules q_i situés en A_{i0} .

Pour $\vec{E} = \vec{0} \leftrightarrow$ le milieu est neutre $\sum q_i = 0$. Le moment dipolaire est $d\vec{p}_0 = \sum q_i O\vec{A}_{i0}$.

Pour $\vec{E}$ différent de $\vec{0}$, les charges se déplacent en A_i : $dp(\vec{M}, t) = P(\vec{M}, t) * d\tau = \sum_i q_i O\vec{A}_i(t)$ et chaque particule est animée d'une vitesse $v_i = \frac{dO\vec{A}_i}{dt}$. On en déduit un vecteur densité de courant $\vec{j}_p = \frac{\sum_i q_i \vec{v}_i(t)}{d\tau}$.

On obtient alors que $\vec{j}_p(M, t) = \frac{\partial P(\vec{M}, t)}{\partial dt}$.

densité volumique de charges.

La neutralité locale du milieu n'est à priori plus vérifiée lorsque les charges liées sont déplacées. $\rightarrow$ on peut donc associer une densité volumique de charge à ce vecteur densité de courant par l'équation locale la conservation de la charge :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_p &= 0 \\ \rho_p(M) + \text{div}(\vec{P}(M)) &= f(M) = 0 \\ \rho_p(M, t) &= -\text{div}(\vec{P}(M, t))\end{aligned}$$

Ainsi dans un milieu matériel, nous pouvons utiliser les équations de Maxwell en tenant compte de ces nouvelles caractéristiques $\vec{j}_p$ et ρ_p (cf. III). Avant cela, on va étudier un modèle classique permettant d'étudier microscopiquement la réponse du milieu au champ $\vec{E}$.

2 Modèle de l'électron élastiquement lié.

Étude de l'interaction du champ EM avec les charges liées du milieu à l'échelle micro pour connaître sa réponse macroscopique.

2.1 Hypothèses et équations.

cf. Cap prépa et Hprépa

cf. Transparent à la fin du poly.

- Seule la polarisation électronique est prise en compte (pas de moment dipolaire).
- isolant : pas de charges libres.
- chaque atome d'un volume méso est modélisé par un ion positif fixe et un électron de valence (-e, m) faiblement lié. ($\rightarrow$ milieu linéaire)
- atomes identiques ($\rightarrow$ milieu homogène)
- référentiel : celui de l'électron.
- aucune interaction entre les électrons de chaque atome ou molécule.
- milieu peu dense : négliger l'influence des champs créés par les atomes voisins. Le champ, ainsi vu par l'électron, est $\vec{E}$.

Bilan des forces :

- une force de rappel élastique de l'électron à son noyau - cette force est fictive - loi phénoménologique - elle modélise l'interaction noyau électron - $\vec{f} = -k * \vec{r}$
- une force dissipative modélisant le rayonnement dipolaire de l'électron avec un temps de relaxation τ - $\vec{f}_D = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$
- la force de Lorentz $\vec{f}_L = -e(\vec{E} + \vec{v} \otimes \vec{B})$. La contribution magnétique est négligeable. De plus, l'amplitude du champ de l'onde est supposée uniforme car $\lambda \gg l$, l étant la dimension du système (≈ 0.1 nm)

PFD :

$$m\vec{a} = -k\vec{r} - \frac{m\vec{v}}{\tau} - e\vec{E}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

avec $\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la pulsation propre et $Q = \omega_0\tau$ le facteur de qualité.

Les atomes sont identiques (milieu homogène), le champ est uniforme sur le domaine mésoscopique. Alors le moment dipolaire est $\vec{P} = n\vec{p}$ et on a :

$$\ddot{\vec{P}} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\vec{P}} + \omega_0^2\vec{P} = \frac{q^2n}{m}\vec{E}$$

P vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants non homogène ; voyons les solutions.

2.2 Réponse du système.

cf. Mauras et HPrépa

On suppose le régime sinusoïdal établi ; L'équation étant linéaire, on peut utiliser la notation complexe. On suppose qu'on envoie une onde plane de champ électrique : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}r)}$ et $\vec{P} = \vec{P}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}r)}$, k à priori complexe.

$$\vec{P} \frac{ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{\tau}} \vec{E}$$

Par les hypothèses d'un milieu linéaire, homogène, isotrope, on obtient une relation linéaire entre $\vec{P}$ et $\vec{E}$; on y définit la susceptibilité diélectrique $\underline{\chi}_e = \chi_1 - i\chi_2$ qui est la réponse du milieu à l'application d'un champ $\vec{E}$. On remarque qu'elle est complexe et dépend de la pulsation : $\vec{P} = \epsilon_0 \underline{\chi}_e(\omega) \vec{E}$.

En étudiant la puissance dissipée par unité de volume $P = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = N \langle \frac{m}{\tau} \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle$, on remarque que celle ci est égale à $P = \frac{\vec{E}_0^2 \omega \chi_2}{2}$. χ_2 est responsable de la dissipation.

Voyons les représentations de la partie imaginaire et réelle de la susceptibilité en fonction de la fréquence. On remarque qu'à la fréquence de résonance, χ_1 s'annule alors que χ_2 y est maximale. De plus la largeur de ce pic est donnée par $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$, d'autant plus petit que le facteur de qualité est élevé. Dans cette zone d'absorption (χ_2 maximale), χ_1 subit de forte variation. Quand la pulsation est faible/nulle, l'absorption est nulle (négligeable) et $\chi_1 = \chi_0 = \frac{e^2 n}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$ la susceptibilité diélectrique statique. A haute fréquence, les deux parties de la susceptibilité tendent vers 0.

Dans un milieu, plusieurs polarisations peuvent être prises en compte. Etant dans des domaines de fréquences différents, le vecteur polarisation total est la somme de chaque contribution.

Quelques ODG :

- polarisation électronique - $f_e \approx 10^{14} - 10^{15}$ Hz - domaine du visible-UV
- polarisation atomique ou ionique - $f_i \approx 10^{12} - 10^{14}$ Hz - domaine IR
- le facteur de qualité associé est élevé : 10^4 en moyenne. Les zones sont bien distinctes pour les absorptions électronique et ionique.
- polarisation d'orientation - domaine IR lointain

Quelques valeurs de susceptibilité :

- $\chi_e(\text{air}) = 5.7.10^{-3}$ - polarisation ionique
- $\chi_e(\text{eau}) = 82.6$ - polarisation d'orientation
- $\chi_e(\text{BaTiO}_3) = 1760$ - polarisation ionique

Voyons maintenant la propagation des ondes dans ces milieux.

3 Propagation d'une OEM dans un diélectrique.

3.1 Équation de Maxwell.

cf. Mauras

Tout est détaillé sur le transparent (cf. fin du poly).

$$\text{Maxwell Gauss } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l}{\epsilon_0} + \frac{\rho_p}{\epsilon_0}$$

$$\text{Maxwell Faraday } \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell flux } \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell Ampère } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_l + \mu_0 \vec{j}_p + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le milieu est isolant : $\rho_l = 0$ et $\vec{j}_l = 0$.

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t}$$

Nouveau champ : vecteur excitation $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, unité $C.m^{-2}$.

On voit que l'on dispose de 6 équations et que l'on dispose de 9 inconnues $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{P})$. Il nous faut une relation supplémentaire décrivant le milieu : $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$.

Remarque : C'est ce que nous avons supposé dans le modèle de l'électron élastiquement lié. On a supposé un milieu LHI de tel sorte que $\vec{P} = \epsilon_0 \underline{\chi_e} \vec{E}$.

On a alors :

$$\text{div}(\epsilon_0(1 + \underline{\chi_e}) \vec{E}) = 0 \rightarrow \text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'où l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

On définit la permittivité relative du milieu complexe $\underline{\epsilon_r} = 1 + \underline{\chi_e}$.

3.2 Relation de dispersion.

cf. Hprépa

On prend le champ électrique d'une onde plane $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i(\omega * t - kr))$.

On obtient la relation :

$$\underline{k}^2 = (1 + \underline{\chi}(\omega)) \frac{\omega^2}{c^2}$$

Cette relation est à priori non linéaire en raison de la dépendance de χ en ω . La propagation est alors dispersive. On pose par définition : $\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$ avec $\underline{n} = \underline{\epsilon}_r$ l'indice du milieu. Cet indice est en général complexe et fonction de ω . Cette relation de dispersion implique donc des phénomènes de dispersion et d'absorption.

On pose :

$$\underline{\epsilon}_r = \epsilon_1 - j\epsilon_2$$

$$\underline{n} = n_1 - jn_2$$

$$\underline{k} = k_1 - jk_2$$

$\vec{E}$ étant une OPPH se propageant selon les x croissants, on peut le réécrire tel que :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 * e^{-k_2 x} \cos(\omega t - k_1 x)$$

Commentaires :

- k_1 donne la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n_1}$. n_1 caractérise la dispersion du milieu s'il dépend de ω . n_1 est l'indice de réfraction que nous voyons en optique.
- $e^{-k_2 x}$ diminue l'amplitude quand x augmente. n_2 caractérise l'absorption de l'onde par le milieu : c'est l'indice d'extinction.

On peut tracer n_1 et n_2 en fonction de ω ; ces courbes ressemblent fortement à celle de $\chi_1(\omega)$ et $\chi_2(\omega)$. On observe des zones de transparences assez larges avec faible dispersion séparées par des fenêtres étroites où dispersion et absorption sont importantes.

voyons ces deux phénomènes.

3.3 Absorption et Dispersion.

cf. Hprépa

zone de transparence :

domaine de pulsation où l'absorption est faible. Dans cette zone, ω n'est pas proche de ω_0 . n_1 varie peu avec la fréquence donc la dispersion est faible. Par conséquent : $\underline{\epsilon}_r \approx \epsilon_1 \gg \epsilon_2 \rightarrow \underline{n} \approx n_1 \gg n_2$.

Pour un seul type de charges liées : $\underline{\epsilon}_r = \epsilon_r = 1 + \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ avec $\epsilon_r > 0$ et $Q = \infty$ (le terme d'amortissement est négligé).

- Dans un domaine de fréquence où n est réel, il n'y a pas d'atténuation.
- milieu transparent de l'onde
- dispersion faible

Exemples : verre, eau et atmosphère transparents à la lumière visible.

Exercice : Formule de Cauchy pour l'indice du verre :

Dans le domaine visible, on a pour le verre : $n^2 = \epsilon_r = 1 + \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Or ω_0 est dans l'UV lointain donc $\omega \ll \omega_0$. on peut faire un DL et on obtient : $n^2 = (1 + \chi_0) + \chi_0 \left(\frac{2\pi c}{\omega_0^2} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2} + \chi_0 \left(\frac{2\pi c}{\omega_0^2} \right)^4 \frac{1}{\lambda^4}$.

→ Explication de la dispersion de la lumière avec un prisme.

zone d'absorption.

zone où ω proche de ω_0 . Les parties imaginaires deviennent non négligeables ; L'amplitude de l'OEM décroît lors de la propagation : le milieu absorbe les OEM qui le traversent.

Exemples :

- verre absorbe le rayonnement UV $\lambda < 320nm$ → lunettes solaires
- ozone/ O_2 absorbent dans l'UV → protection
- eau/ CO_2 absorbent dans l'IR $\lambda > 1400nm$ → principe de l'effet de serre atmosphérique ; rayons solaires absorbés par le sol ; ce dernier s'échauffe et émet un rayonnement IR ; Ce rayonnement IR est absorbé par l'eau et le CO_2 et ainsi échauffe l'atmosphère.

BILAN : l'onde est absorbée et la dispersion est très importante.

Conclusion

Étude des diélectriques et de la propagation. Mise en évidence des phénomènes de transparence et d'absorption.

Application : réflexion et transmission afin de retrouver les lois de Descartes.

Ouverture : d'autres types de charges : les charges libres. prochaine leçon !

Phénomènes de polarisation

Polarisation électronique ou atomique

matériau isolant, initialement neutre constitué de molécules n'ayant pas de moment dipolaire (H_2, O_2)

En appliquant un champ $\vec{E}$, on a séparation des barycentres des charges positives et des charges négatives.

=> déformation des atomes ou des molécules

microscopiquement: $\vec{p}_{micro}$ induit

mésoscopiquement: $d\vec{p} = \sum \vec{p}_{micro}$

Polarisation d'orientation.

matériau isolant, initialement neutre, constitué d'atomes ou de molécules ayant un moment dipolaire (H_2O, HCl)

Sans champ $\vec{E}$: mouvement aléatoire en raison de l'agitation thermique $d\vec{p} = \vec{0}$

Avec champ $\vec{E}$: couple $\vec{T} = \vec{p}_{micro} \times \vec{E}$ => alignement des moments avec $\vec{E}$

Polarisation ionique.

matériau isolant, initialement neutre constitué de cations, d'anions répartis de façon ordonnée (cristal ionique)

Sans $\vec{E}$: pas de moment dipolaire permanent

Avec $\vec{E}$: la régularité est rompue. => moment dipolaire induit

FIGURE 1 – Les différents mécanismes de polarisation.

Modèle de l'électron élastiquement lié

Hypothèses:

- diélectrique parfait = isolant $\sigma_L = 0$ $\vec{f}_L = \vec{0}$
- les atomes du volume mésoscopique dV sont identiques
→ milieu homogène
- L'atome = ion positif fixe (noyau + électron de cœur) + un électron de valence faiblement lié.
→ milieu linéaire
- Les électrons sont indépendants les uns des autres dans chaque atome.
- Milieu peu dense = pas d'interaction entre les dipôles.
→ Le champ local $\vec{E}_L$ peut être assimilé à $\vec{E}$.
- Seule la polarisation électronique est présente

Système : électron de valence ($q = -e$; m ; $\vec{v}$)

Référentiel : celui de l'électron R galiléen

Bilan des forces:

- interaction ion - électron = force de rappel d'un OH
$$\vec{f}_R = -k\vec{r}$$
- phénomène dissipatif d'énergie de l'électron = force de frottement
$$\vec{f}_f = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$
- Force de Lorentz créée par le champ EM
$$\vec{f}_L = -e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

FIGURE 2 – Hypothèses du modèle de l'électron élastiquement lié.

Equation de Maxwell dans
un milieu diélectrique

- $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_L}{\epsilon_0} + \frac{\rho_P}{\epsilon_0}$
- $\text{div } \vec{B} = 0$
- $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_L + \vec{j}_P) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\begin{cases} \rho_L = 0 \\ \vec{j}_L = \vec{0} \end{cases} \text{ isolant}$

$\begin{cases} \rho_P = -\text{div } \vec{P} \\ \vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{div } (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \end{cases}$

$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi_e(\omega)) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$

FIGURE 3 – Equations de Maxwell.