LP28:Ondes électromagnétiques dans un diélectrique

21 février 2018

Lalieu Jonathan & Boquet Thomas

Prérequis

- ➢ Electromagnétisme dans le vide
- ➢ Ondes

Experience

-

Rapport du jury

Les différents titres ont été :

Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques(2013)

Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique Modélisation microscopique

2017 : Cette leçon ne doit pas se limiter à un cours sur les milieux diélectriques; cela n'en est pas l'objet

2009-2010 : Les conventions adoptées doivent être précisées avant toute discussion sur la partie imaginaire du vecteur d'onde.

2006 : Il y a souvent confusion entre absorption et atténuation

2001 : Dans un diélectrique l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permitivité ϵ_r dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations.Les aspects quantiques de l'intéraction entre l'onde électromagnétique et la matière peuvent être évoqués.

1998 : Il est parfaitement inutile et contreproductif de s'enfermer dans un long calculs formels sur les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction.

Bibliographie

✍ *Electromagnétisme 4* , **Bertin Faroux Renault** ⟶ Cours approfondie (chap 1-> 4); présentent des modèles microscopiques

✍ *Ondes electromagnétique dans les milieux diélectriques ou Milieux diélectriques*, **Garing** ⟶ Effet keer optique , effet pockle , coefficient de fresnel

✍ *Electromagnétisme*, **Mauras** ⟶ Base du cours

✍ *Dictionnaire de physique*, **Tailler** ⟶ Pour les définitions

Table des matières

1 Électromagnétisme dans la matière : cas du diélectrique **2**

1.1 Polarisation du milieu . . . 2

1.2 Équations de maxwell dans la matière (cas des diélectriques) . . . 2

1.3 Cas du diélectrique linéaire homogène isotrope (DLHI) . . . 3

2 Propagation d'ondes électromagnétiques dans les diélectriques **4**

2.1 Équation de propagation . . . 4

2.2 Relation de dispersion . . . 4

3 Un modèle microscopique : le modèle de l'électron élastiquement lié **5**

3.1 Description du modèle . . . 5

3.2 Expression de la susceptibilité électrique . . . 5

Introduction

Dans les leçons précédentes nous avons vu comment se propager les ondes électromagnétiques dans le vide. Aujourd'hui nous allons nous intéresser au cas d'un milieu particulier : les diélectriques.
Diélectrique : matériau dans lequel l'application d'un champ mélectrique provoque l'apparition d'un moment dipolaire volumique $\vec{\mathbf{P}}$.

1 Électromagnétisme dans la matière : cas du diélectrique

1.1 Polarisation du milieu

cf BFR4
cf transparent

Complement

Dans les deux ouvrages il y a une étude pour le cas d'un moment dipolaire déjà existant.

On peut donc définir un vecteur polarisation :

$$\vec{\mathbf{p_i}} = q.r_i(\vec{\mathbf{E}}(t))$$

Complément

On pourrait aussi faire apparaître la relation avec la polarisabilité : $\vec{\mathbf{p}} = \epsilon_0.\alpha\vec{\mathbf{E}}$ et faire un parallèle avec la chimie mais dans une autre leçon ici c'est superflu.

On définit donc le vecteur polarisation $\vec{\mathbf{P}}$ par :

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{1}{V}\sum_i p_i$$

Le barycentre des charges vont évolué dans le temps on peu donc définir un courant de polarisation :

$$\boxed{\vec{\mathbf{j}}_p = \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}}{\partial t}}$$

Par conservation de la charge on peut définir une densité volumique de charge tel que :

$$\boxed{\rho_p = -div(\vec{\mathbf{P}})}$$

Complément

Dans le BFR les expréssions de ρ_p et $\vec{\mathbf{j}}_p$ sont démontrées à partir du potentiel créé par une distribution de moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$.

1.2 Équations de maxwell dans la matière (cas des diélectriques)

On part des équations de maxwell dans la matière :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0(\vec{\mathbf{j}} + \epsilon\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}) \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Seules les équations faisant intervenir les sources sont modifiées par rapport au vide , donc celle de Maxwell Gauss et de Maxwell Ampère :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\rho_p}{\epsilon_0} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0(\vec{\mathbf{j}}_p + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}) \end{cases}$$

Remarque

Dans le cas général, il faut tenir aussi compte de la réponse à un champs $\vec{\mathbf{B}}$ et donc parler de l'aimantation

Dans un diélectrique on a ρ_{libre}=0 et $\vec{\mathbf{j}}_{libre} = 0$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}) \end{cases}$$

avec $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} \vec{\mathbf{P}}$
On obtient donc :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{0}} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}) \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = 0 \end{cases}$$

De plus dans le cas des diélectriques on a une équation constitutive :

$$\boxed{\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \bar{\chi_e} \vec{\mathbf{E}}}$$

avec $\bar{\chi_e}$ la susceptibilité électrique (un tenseur d'ordre 2)

1.3 Cas du diélectrique linéaire homogène isotrope (DLHI)

cf BFR4+ Mauras chap 7
Si on se place dans le cas du régime statique ou lentement variable on a :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Néanmoins on peut se ramener par une rotation de l'espace au cas suivant :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Complément

Le retard à la polarisation peut intervenir dans le cas de moment dipolaire déjà présent en champs nul. Le temps caractéristique du régime transitoire est de 10^{-9}s (cf Garing Milieux diélectrique exo 1.11)

Revenons sur la signification des différents termes de DLHI :

- linéaire : on suppose que les χ_{ii} ne dépendent pas de $\vec{\mathbf{E}}$. Cela est vrai si on suppose que le champs créer par la distribution de polarisation est négligeable devant le champs excitateur
- homogène : on suppose que la relation est la même dans toute le volume du diélectrique
- isotrope : il n'y pas de dépendance en fonction de l'orientation de l'espace => $\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33} = \chi_e$

On a donc :

$$\vec{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}} = \epsilon \underbrace{(1+\chi_e)}_{\epsilon_r} \vec{\mathbf{E}}$$

avec ϵ_r la permittivité relative du milieu.
<u>ODG :</u>

1. $\chi_e(gaz) \approx 10^{-3}$
2. $\chi_e(liquide) \approx 10$
3. $\chi_e(solide) \approx 1$

2 Propagation d'ondes électromagnétiques dans les diélectriques

cf BFR 4

2.1 Équation de propagation

Suivons la même méthode que dans le vide pour démontrer l'équation de propagation dans le diélectrique avec les formules d'analyses vectoriels classiques.
On obtient :

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

On peut poser $n^2 = \epsilon_r$ pour faire apparaître l'indice du milieu.
On peut noter plusieurs choses :

1. On retrouve la même forme d'équation que dans le vide mais avec une célérité différentes et qui dépend de l'indice du milieu donc de la susceptibilité du milieu
2. ϵ_r dépend à priori de la fréquence, donc la célérité ne sera pas la même pour des ondes de fréquences différentes.
3. ϵ_r est a priori complexe, la partie complexe étant associé à des phénomènes d'absorption.

2.2 Relation de dispersion

On a une équation linéaire on peut décomposer les solutions sur l'ensemble des ondes planes.

Soit $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E_0}} e^{i.\omega.t - \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{r}}}$.

On réinjecte dans l'équation des ondes et on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r}$$

Si on écrit k sous forme complexe,$\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{k}}' - i\vec{\mathbf{k}}''$:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega t - [\vec{\mathbf{k}}' - i\vec{\mathbf{k}}''].\vec{\mathbf{r}})} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{-\vec{\mathbf{k}}''.\vec{\mathbf{r}}} e^{i(\omega t - \vec{\mathbf{k}}''.\vec{\mathbf{r}}}$$

On voit que la partie imaginaire de k va être lié à l'absorption de l'onde par le milieu alors que la partie réel va être lié à la propagagtion de l'onde.
On définit donc les vitesses de phases et de groupe comme :

$$\begin{cases} v_\psi = \dfrac{\omega}{k'} \\ v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'} \end{cases}$$

On voit que :

1. v_{psi} : dépend de la pulsation $\Rightarrow$ milieu dispersif
2. $v_g v_{psi} \Rightarrow$ étalement du paquet d'onde

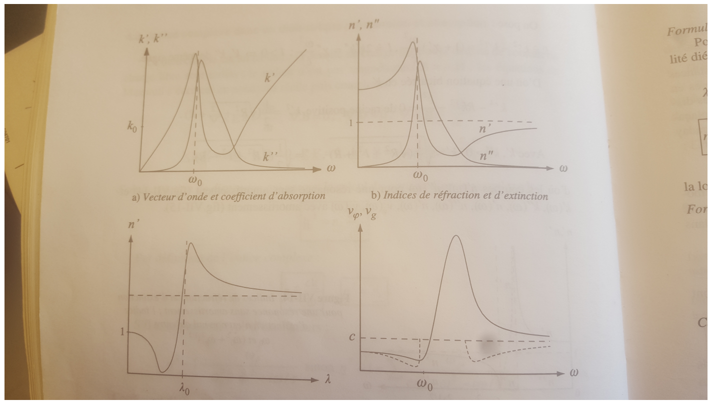

Figure 1 – Vitesse de phase et de groupe en fonction de la pulsation

Essayons de développer un modèle microscopique pour rendre compte de l'évolution de la susceptibilité et donc retrouver la dépendance des vitesses de phase et de groupe.

3 Un modèle microscopique : le modèle de l'électron élastiquement lié

3.1 Description du modèle

Dans ce modèle on prend un volume mésoscopique. Dans ce volume on a un noyau et un électron.
On a les hypothèses suivantes :

1. Noyau fixe
2. 1 électron de valence
3. electron non relativiste => uniquement la partie électrique de la force de lorentz
4. électron faiblement lié au noyau => Force de rappel élastique $\vec{\mathbf{F}}_{elas} = -\gamma\vec{\mathbf{r}}$
5. Force de frottement fluide u à la perte d'énergie par rayonnement de l'électron => $\vec{\mathbf{F}}_{frot} = -\beta\frac{\partial r}{\partial t}$. Cette force traduit le retard entre l'excitation et la réponse du système
6. On suppose un milieu faiblement dense et on néglige les intéraction entre moment dipolaire. Cela se traduit par le fait qu'on suppose que le champs dans la force de Lorentz est le champs excitateur et non le champs local

3.2 Expression de la susceptibilité électrique

cf Mauras
On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le reférentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$m\frac{\partial^2\vec{\mathbf{r}}}{\partial t^2} = -e\vec{\mathbf{E}} - \beta\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial t} - \gamma\vec{\mathbf{r}}$$

Si on l'exprime en fonction de P en multipliant par -n.e :

$$\frac{\partial^2\vec{\mathbf{P}}}{\partial t^2} + \frac{\beta}{m}\frac{\partial\vec{\mathbf{P}}}{\partial t} + \frac{\gamma}{m}\vec{\mathbf{P}} = \frac{ne^2}{m}\vec{\mathbf{E}}$$

Dans cette équation on peut poser plusieurs grandeur caractéristique :

- $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma}{m}}$ la pulsation propre qui est la pulsation d'oscilation du à la force de rappel

- $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$ la pulsation plasme qui est la pulsation caractéristique lorsqu'on étudie le plasme
- $\tau = \dfrac{m}{\beta}$ temps caractéristique de réponse du système à l'excitation

<u>ODG :</u> $\omega_0 = 10^{14}$Hz ; $\tau = 10^{-10}$; $\omega_p =$

On suppose un régime sinusoïdal permanent établi d'où :

1. $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega.t - \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{r}})}$
2. $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}_0 e^{i(\omega.t - \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{r}})}$

On en déduit la polarisation :

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}\vec{\mathbf{E}}$$

On en déduit la forme de la susceptibilité :

$$\begin{cases} \chi'_e = \dfrac{\omega_p^2 \quad (\omega_0 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \\ \\ \chi''_e = \dfrac{\omega_p^2 \quad \omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \end{cases}$$

Si maintenant on exprime k grâce à la relation de dispersion :

$$k^2 = (k' - k'')^2 = (1 + \chi'_e - i\chi''_e)\frac{\omega^2}{c^2}$$

On obtient :

$$\begin{cases} k' = \sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{[(1+\chi'_e)\dfrac{w^2}{c^2}]^2 + [\chi''_e\dfrac{\omega^2}{c^2}]^2} + (1+\chi'_e)\dfrac{\omega_2}{c^2})} \\ k'' = \sqrt{\dfrac{1}{2}(\sqrt{[(1+\chi'_e)\dfrac{w^2}{c^2}]^2 + [\chi''_e\dfrac{\omega^2}{c^2}]^2} - (1+\chi'_e)\dfrac{\omega_2}{c^2})} \end{cases}$$

ù