LP29 : Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

25 mars 2018

Léo Mangeolle & Lauren Rose

Bon, Monsieur Karamazov vous conduisez, moi je passe derrière. Vous Simon, vous prenez la place du mort.
Odile Deray

Niveau : L2

Commentaires du jury

2017 : Les analogies et différences observées entre les différents milieux étudiés méritent d'être clairement soulignées. Il est intéressant d'évoquer les aspects énergétiques.
2015 : Cette leçon ne doit pas se réduire à la présentation exclusive du modèle de Drude. Les métaux ne sont pas les seuls milieux conducteurs.
2014 : Cette leçon ne doit pas être confondue avec la leçon [Mécanismes de la conduction électrique dans les solides].
Jusqu'en 2013, le titre était : Effet de peau. Comportement d'une onde électromagnétique à la surface d'un conducteur.
2010 : Il faut s'interroger sur la dépendance en fréquence de la conductivité. L'étude peut également être menée en haute fréquence.

Bibliographie

✍ *OEM dans le vide et les conducteurs*, **Garing** ⟶ exercices 3.7 et 3.8 pour les métaux, 4.3 pour l'ionosphère ; plein d'odg et de choses intéressantes
✍ *Cap prépa (tous)*, **Renvoizé** ⟶ la base
✍ *Électromagnétisme*, **Mauras** ⟶ il parle beaucoup de puissance transmise, de coefficients de réflexion etc (on a choisi de ne pas en parler ici mais ce livre est super quand même)
✍ *Électromagnétisme 1*, **Feynman** ⟶ interprétation inductive avec les mains (pas utilisé)
✍ *Tout-en-un PC*, **Sanz** ⟶ quelques calculs de II.2 et III.2, pour compléter Renvoizé
✍ *Physique des solides*, **Ashcroft** ⟶ modèle de Drude et odg (pas utilisé)

Prérequis

- Force de Lorentz
- Libre parcours moyen
- Équations de Maxwell
- Notion de dispersion

Table des matières

Introduction

La LP28 parlait des OEM dans les milieux diélectriques, dont M. Taillet vous donnera la définition. Mais les diélectriques c'est pas tout, il y a aussi les conducteurs, encore une fois, Taillet à la rescousse : milieu qui permet des transfert de charges. On va donc maintenant décrire les OEM dans les milieux conducteurs. [*Cette intro est un peu cheap donc si vous voulez faire un truc plus vendeur avec les télécommunications ou autre, lâchez-vous.*]

Commençons par décrire un peu le milieu de propagation par excellence : le métal.

1 Cadre général pour les métaux

1.1 Loi d'Ohm locale en régime variable

On considère un métal comme un réseau d'atomes dans lequel se déplacent des électrons. On fait les hypothèses suivantes :

- les électrons de conduction sont fournis par chaque atome et délocalisés à l'échelle du métal ;
- les ions positifs du réseau sont fixes, seuls les électrons bougent ;
- cations et électrons n'interagissent pas à longue portée, on modélise l'influence du réseau de cations sur les électrons par une force de frottement fluide résultant des collisions des électrons (assimilés à des petites billes ponctuelles) sur le réseau

Ces hypothèses constituent le modèle de Drude. On va maintenant appliquer le pfd, mais attention, pas aux électrons. En effet, ceux-ci (par agitation thermique) sont très rapides par rapport à la vitesse « réelle » de déplacement des charges dans un métal : un odg qu'on ne fera pas, le programme de la LP47 « Mécanismes de la conduction électrique dans les solides » le confirme. L'idée est donc de faire une moyenne sur un grand nombre d'électrons, modélisés par une « particule de fluide ».

Les collisions sur le réseau agissent, en moyenne, comme une force de frottement fluide, de temps typique τ. On peut le montrer un peu plus proprement mais c'est encore hors sujet.

Une autre précaution à prendre : bien préciser qu'on considère qu'il n'y a pas de champ $\overrightarrow{B}$ statique extérieur, et que le seul champ magnétique présent est celui qui accompagne naturellement le champ électrique $\overrightarrow{E}$ dans sa propagation. Alors,

$$\frac{|\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}|}{\overrightarrow{E}} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

dans le cas d'ondes planes, donc on peut négliger le terme magnétique de la force de Lorentz à condition que les électrons soient non relativistes ; on vérifiera a posteriori que c'est largement le cas.

Dernière précaution importante : il faut supposer qu'à l'échelle de la particule de fluide qu'on regarde, le champ $\overrightarrow{E}$ est uniforme. Cela revient à dire que la longueur typique sur laquelle on peut moyenner statistiquement les électrons (i.e. le libre parcours moyen) est petite devant la longueur d'onde. Renvoizé explique ça très bien.

Pour les odg, puiser un peu partout, notamment dans le Ashcroft ; attention, si vous voulez donner un odg de libre parcours moyen il faudra faire le calcul à partir de la vitesse de Fermi car Ashcroft ne le donne pas ; ici on ne l'a pas fait. Renvoizé ?

Toutes ces précautions étant prises, on écrit maintenant le pfd pour un électron « moyen » (ou, si on préfère, pour une particule de fluide d'électrons). La vitesse considérée est alors la vitesse moyenne des électrons au sein d'un volume mésoscopique correspondant à la particule de fluide équivalente, *i.e.* la vitesse de la particule de fluide :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\overrightarrow{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

On regarde une équation linéaire en régime variable (périodique), il est donc naturel (mais à justifier !) de passer en complexe. Cela se fait naturellement en considérant la vitesse et le champ $\overrightarrow{E}$ comme des OPPH de la forme $\underline{\overrightarrow{X}} = \underline{\overrightarrow{X_0}}(\overrightarrow{OM})e^{i\omega t}$, $\underline{\overrightarrow{X}}$ valant $\underline{\vec{v}}$ ou $\underline{\overrightarrow{E}}$. L'équation devient :

$$(1 + i\omega\tau)\underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m}\underline{\overrightarrow{E}}$$

La densité de courant (dans une hypothèse d'électroneutralité qu'on discutera plus tard) vaut alors :

$$\underline{\vec{j}} \overset{\text{déf}}{=} -ne\underline{\vec{v}} = \frac{ne^2\tau/m}{1 + i\omega\tau}\underline{\overrightarrow{E}}$$

avec n la densité de porteurs de charge. On obtient donc la loi d'Ohm locale en régime variable :

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau} \text{ et } \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Ordres de grandeur

On a pour le Cuivre : $n \approx 10^{29}$. On peut en déduire un odg de la vitesse de déplacement des porteurs de charge, très inférieure à la vitesse d'agitation thermique.
Donner aussi quelques odg de σ_0 en n'oubliant pas l'unité ($\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$).

Le conducteur se comporte comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure $1/\tau$. D'un point de vue énergétique, la puissance dissipée par effet Joule vaut :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} Re(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^*) = \frac{1}{2} Re(\underline{\sigma}) |\underline{\vec{E}}|^2.$$

Elle est donc nulle à haute fréquence (puisque σ devient imaginaire pur) : le métal devient transparent.

Voilà ce que nous dit le modèle de Drude. Maintenant il faut faire attention à certaines limites.

1.2 L'électroneutralité

L'électroneutralité globale est toujours vraie, on parle ici de l'EN locale, i.e. : on perturbe un peu la densité de charge, au bout de combien de temps celle-ci redevient-elle uniforme (comme on l'a supposé ci-dessus en écrivant n la densité uniforme de porteurs) ?
On écrit la conservation de la charge $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0$ dans laquelle on a la loi d'Ohm locale $\underline{\vec{j}} = \dfrac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$ et la boucle est bouclée par Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}E = \rho/\epsilon_0$. Un peu de calcul en complexes et on obtient :

$$(-\omega^2\tau + i\omega + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0})\underline{\rho} = 0.$$

En effectuant une TF inverse pour repasser en notation réelle, on reconnaît un oscillateur amorti de pulsation propre $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\epsilon_0}}$ (la pulsation plasma, vous pouvez utiliser ce nom comme teaser) et surtout (!) $\dfrac{\omega_p}{Q} = \dfrac{1}{\tau}$. Une application numérique donne assez facilement $Q \simeq 100$, on a donc affaire à un oscillateur pseudo-harmonique. Ici, une petite illustration Python peut mettre en évidence l'interprétation de τ comme temps de relaxation typique de la densité des porteurs de charge.

Bilan :

On définit la pulsation typique de l'électroneutralité : $\omega_{EN} = \frac{1}{\tau}$.
A.N. : $\omega_{EN} \approx 10^{14}$ rad/s pour les métaux.

1.3 l'ARQS

Pour l'instant on n'a encore fait aucune approximation, ça viendra plus tard. L'idée est de se débarrasser du terme de courant de déplacement dans Maxwell-Ampère, autrement dit :

$$|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}| \ll |\sigma_0 \vec{E}|.$$

Ce qui se traduit sur la fréquence comme : $\omega\epsilon_0 \ll |\dfrac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}|$. Bigre. Le nombre complexe de droite complique bien les choses. Mais pas de panique, S. Paulin (*in* Renvoizé) explique ça très bien : on commence par supposer que $\omega \gg 1/\tau$ (il faut bien qu'il soit d'un côté ou de l'autre de $1/\tau$, autant faire une hypothèse forte). Dans ce cas, on trouve la condition :

$$\omega^2 \ll \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \tau} \overset{\text{ça alors!}}{=} \omega_p^2.$$

On vérifie que les odg vérifient bien notre intuition : pour les métaux, $\omega_p \approx 10^{16}$ rad/s. C'est cohérent avec $\omega_p \gg 1/\tau$.

Remarque

On aurait aussi pu partir de l'hypothèse inverse ($\omega \ll 1/\tau$) et vérifier que les odg ne collent pas (mais comme ça n'a pas grand intérêt, on ne le fait pas).

Bilan : Pour les métaux, on trouve donc :

- $\omega < \omega_{EN} \approx 10^{14}$ rad/s : EN & ARQS
- $\omega_{EN} < \omega < \omega_p$: ARQS mais pas EN
- $\omega > \omega_p \approx 10^{16}$ rad/s : ni l'un ni l'autre

[*Au tableau, faire un schéma avec une flèche et des domaines (et des couleurs). Il est conseillé aussi de faire un transparent sous forme de tableau qui sera complété au fur et à mesure de la leçon par les propriétés des ondes dans chaque domaine de fréquence.*]

OK, on a vu les mécanismes et des conditions un peu abstraites, très bien. Maintenant que se passe-t-il lorsque j'envoie une onde sur/dans un métal ? On va distinguer les cas suivant les domaines de fréquences considérés.

2 Comportement à basse fréquence

2.1 Mise en équations

La loi d'Ohm locale s'écrit, dans le domaine des BF : $\vec{j}(t) = \sigma_0 \overrightarrow{E}(t)$, directement en temporel car la conductivité ne dépend plus de la fréquence. Les équations de Maxwell sont, sous ces hypothèses :

- MG : $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = 0$ (EN)
- MT : $\mathrm{div}\overrightarrow{B} = 0$
- MF : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$
- MA : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \vec{j}$ (ARQS)

On calcule le $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$(MF), comme d'habitude, et on trouve :

$$\Delta \overrightarrow{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}.$$

$\Rightarrow$ On reconnaît une équation de diffusion (déjà rencontrée en LP18).

2.2 Résolution : effet de peau

On se place dans le cas d'une OPPH transverse qui se déplace vers les z croissants et qui rencontre une interface vide/métal en $z = 0$. En notation complexe, on a :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z,t) = \underline{E}(z) e^{i\omega t} \overrightarrow{u_x}.$$

L'équation de diffusion devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \underline{E}}{\mathrm{d}z^2} = i\omega\mu_0\sigma_0 \underline{E}(z),$$

dont les solutions sont de la forme (en se rappelant que $i^{1/2} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$) :

$$\underline{E}(z) = A \exp\left[(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0\omega}{2}} z\right] + B \exp\left[-(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0\omega}{2}} z\right].$$

La non-divergence en $z \to +\infty$ et le raccordement en $z=0$, $\underline{\vec{E}}(z=0,t) = E_0 e^{i\omega t}\vec{u_x}$ imposent $A=0$ et $B=E_0$ d'où la solution (en repassant en notation réelle) :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-z/\delta}\cos(\omega t - z/\delta)\vec{u_x},$$

avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}$ l'épaisseur de peau.

On peut ici, donner une explication physique sur l'interprétation inductive, par exemple, en citant par exemple Mauras et Feynman. On montre aussi une animation Python (stylée, en toute modestie) avec l'onde qui se propage en s'atténuant dans le métal (avec des couleurs) !

2.3 Applications

1$^{\text{ère}}$ **application** : Cas du courant dans un fil de cuivre de diamètre $a = 0.5$ mm :

- $f = 50\,\text{Hz} \Rightarrow \delta = 9.8\,\text{mm} \gg a \Rightarrow$ effet de peau pas visible ;
- $f = 100\,\text{kHz} \Rightarrow \delta = 0.2$ mm : on est à la limite d'uniformité ;
- $f = 100\,\text{MHz} \Rightarrow \delta = 6.6\,\mu\text{m} \Rightarrow$ le courant circule sur une très faible épaisseur du fil.

Dans ce dernier cas, la résistance du fil est modifiée :

$$R = \frac{L}{\sigma_0 S'}$$

où S', la section effectivement traversée par le courant, est réduite : $S' \approx 2\pi a\delta \ll \pi a^2 = S$. Conclusion : $R' \gg R$. L'effet de peau augmente la résistance d'un fil à haute fréquence, l'effet Joule est donc davantage accentué. On remarque que cette résistance est inversement proportionnelle à δ, donc proportionnelle à $\sqrt{\omega}$; cette dépendance en la fréquence caractérise les pertes cuivre.

Idée (non testée) : montrer ça vite fait avec une bobine ?

2^{e} **application** : Épaisseur des parois d'un micro-ondes. Dans un micro-ondes, les ondes ont une fréquence de l'ordre de $f \simeq 10^5$ Hz, d'où $\delta \approx 10\,\mu$m. En pratique, les parois sont donc largement assez épaisses pour qu'on n'ait rien à craindre. Il est à noter que la paroi de la porte du micro-onde possède une grille métallique qui fait office d'isolant. Le plexiglas de la vitre seul ne suffit pas à atténuer les ondes EM.

*Donc là on vient de voir la limite haute fréquence du traitement basse fréquence, utile par exemple en électrocinétique ou pour des ondes radio... Mais il se passe quoi à **vraiment** haute fréquence ?*

3 Comportement à haute fréquence

On se place cette fois à $\omega > \frac{1}{\tau}$ donc on perd l'hypothèse d'électroneutralité, et on va voir ce qu'on fait de l'ARQS. A priori, on a donc : $\text{div}\vec{E} \neq 0$, et ça devient très compliqué. Ici, on va cependant se simplifier artificiellement la vie en regardant une OPPH **transverse**, donc de divergence nulle. D'autre part, la conductivité est cette fois complexe : $\underline{\sigma}(\omega) = \dfrac{-ine^2}{m\omega}$. Elle met alors tension et intensité en quadrature. Comme on l'a vu en première partie, cela implique une réflexion totale de l'énergie : on va vérifier cela après avoir trouvé l'équation et ses solutions.

3.1 Mise en équations

- MG : $\text{div}\vec{E} = 0$ (astuce de l'onde transverse)
- MT : $\text{div}\vec{B} = 0$
- MF : $\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

- MA : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ (dans le doute, pas d'ARQS)

Ensuite, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$(MF) fait apparaître notre amie la pulsation plasma, et on trouve l'équation de Klein-Gordon :

$$\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\overrightarrow{E}.$$

Notez que pour arriver là, il faudra à un moment gérer le caractère complexe de la conductivité, alors que tout le reste se fait en notation réelle. Le plus simple est peut-être de revenir à la loi d'Ohm locale et de l'écrire en notation réelle :

$$\underline{\vec{j}} = \frac{-ine^2}{m\omega}\underline{\overrightarrow{E}} \Leftrightarrow \overrightarrow{E}(t) = \frac{m}{ne^2}\partial_t\vec{j}(t)$$

L'intérêt d'avoir écrit KG en réel est que maintenant, sans trop d'argumentation sur pourquoi on ne l'a pas fait plus tôt, on fait une TF en temps mais aussi en espace, et on cherche les solutions de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z,t) = \tilde{E}(k)e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_x},$$

ce qui nous donne directement la relation de dispersion bien connue :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2},$$

et on peut tracer vite fait $\mathrm{Re}(k)$ en fonction de ω pour introduire la discussion.

Cela se fait aussi avec le tableau des fréquences fait précédemment. On se place à $\omega > 1/\tau$, mais qu'en est-il du rapport entre ω et ω_p ?

3.2 Discussion

On distingue donc deux cas :

- $\omega > \omega_p$: cas de propagation avec dispersion : $k^2 > 0$, donc k est réel. La longueur d'onde s'allonge lorsqu'on passe du vide au métal. L'intégralité de l'énergie est transmise.
- $\omega < \omega_p$: alors $k^2 < 0$ et donc k est imaginaire pur donc il n'y a pas de propagation. L'onde s'atténue comme une exponentielle décroissante **stationnaire** (et pas comme un sinus amorti !). On parle éventuellement d'onde évanescente, si on ne fait pas partie des intégristes qui considèrent que cette appellation est réservée à une atténuation dans la direction transverse à la direction de propagation (au pire, M. Taillet est certainement assez vague sur le sujet pour que ça puisse servir de justification). À l'extérieur, une onde stationnaire s'établit. Ici aussi on peut citer Feynman et Mauras sur l'interprétation inductive.

Ces deux cas gagnent à s'illustrer avec de jolies animations Python pleines de couleurs qui feront pétiller les yeux du jury.

Application :

Observation par des rayons X : $f \approx 10^{18} - 10^{20}$ Hz, donc $\omega > \omega_p$ des métaux : on peut donc voir à travers les métaux.

3.3 Le cas des plasmas

Ici il faut faire attention à ne pas se lancer dans une grosse modélisation à trois minutes de la fin. Mais la connaître c'est bien, parce qu'ici la stratégie va consister à balancer des résultats sur lesquels le jury pourra poser des questions plus tard. Et puis si vous avez plein de temps à la fin, vous pourrez toujours meubler avec une modélisation complète du plasma... mais c'est à éviter quand même.

« On peut montrer que », dans un plasma, pour des raisons totalement différentes de tout ce qu'on a fait jusqu'ici avec les métaux, on a aussi une loi d'Ohm locale avec une conductivité complexe $\underline{\sigma} = \dfrac{-ine^2}{m\omega}$ toute pareille à celle qu'on a utilisée dans cette partie.

On retrouve donc KG et la discussion qui a suivi, avec une pulsation plasma bien inférieure à celle des métaux. En effet, les porteurs de charge sont beaucoup plus dilués dans le cas du plasma. Pour l'ionosphère, $n \approx 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$, soit une pulsation plasma : $\omega_p \approx 10^7$ rad/s.

Application aux télécoms :

Les radios grandes ondes ($f = 200$ kHz, par exemple RTL) peuvent se réfléchir sur l'ionosphère et donc parcourir de grandes distances, alors que les ondes courtes ($f = 10$ MHz, comme Radio France) ne peuvent pas car elles traversent l'ionosphère.

Conclusion

Nous avons donc traité le cas de la propagation des OEM dans les métaux en détail, et survolé le cas des plasmas. Cela nous a permis de rendre compte de l'effet de peau, un phénomène important de la physique et de l'application que nous pouvons en faire dans la vie de tous les jours ou en TP. Nous ne nous sommes pas penchés sur la réflexion et la transmission en détail de l'énergie à la surface d'un milieu conducteur, cela pourrait être fait dans une leçon suivante.

Questions, commentaires, remarques, opinions...