LP 31 - Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat.

3 octobre 2017

Lucas Reneuve & Kenny Rapina

Les trajets les plus courts sont toujours les meilleurs
Lucas Reneuve

Niveau : L3

Commentaires du jury

2014 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion. Les analogies avec d'autres principes variationnels sont appréciées.
2010 : Le caractère variationnel du principe de Fermat doit clairement ressortir. Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le théorème de Malus.
2005 : La notion de rayon lumineux reste imprécise. L'expression mathématique du principe de Fermat mettant en avant l'expression de l'infiniment petit du premier ordre mis en jeu est souvent ignorée. Par ailleurs, l'interprétation du stigmatisme est une application intéressante du principe de Fermat.

Bibliographie

- ✍ *Optique géométrique*, **BFR** ⟶ Le chapitre 2 est court et synthétise l'idée de la leçon.
- ✍ *Optique physique, propagation de la lumière*, **Richard Taillet** ⟶ Pour la partie introductive
- ✍ *Optique, Fondements et applications*, **Jean-Philippe Pérez** ⟶ Pour la base de la leçon

Prérequis

- ➢ Lois principales de l'optique géométrique
- ➢ Euler-Lagrange
- ➢ Optique ondulatoire
- ➢ Ondes électromagnétiques

Expériences

- Mirage inférieur avec un mélange eau-éthanol

Table des matières

Introduction

L'optique est le domaine de la physique qui décrit les phénomènes relatifs à la lumière. L'optique est apparue dès l'Antiquité, avec l'optique géométrique. Au XVIe siècle, les lois de la réfraction et de la réflexion font leur apparition sous le nom de lois de Snell-Descartes et structurent ainsi les bases de l'optique géométrique.

En 1665, Grimaldi découvre la diffraction de la lumière, et remet en question l'optique géométrique, ce qui pousse Huygens, Fresnel et d'autres à proposer un siècle plus tard une théorie ondulatoire de la lumière.

Au XIXe siècle, Maxwell propose que la lumière soit une onde électromagnétique, ce que Hertz prouvera quelques années après.

Enfin, au XXe siècle, certains se sont intéressés au caractère quantique de la lumière ce qui créa une nouvelle branche de l'optique : l'optique quantique.

Dans cette leçon, nous nous intéressons à l'optique géométrique et nous verrons qu'un principe variationnel, le principe de Fermat, permet de retrouver les résultats majeurs de l'optique géométrique.

1 Principe de Fermat

1.1 Rayon lumineux

Avant d'énoncé le principe de Fermat, il est nécessaire d'indiquer le contexte d'étude.

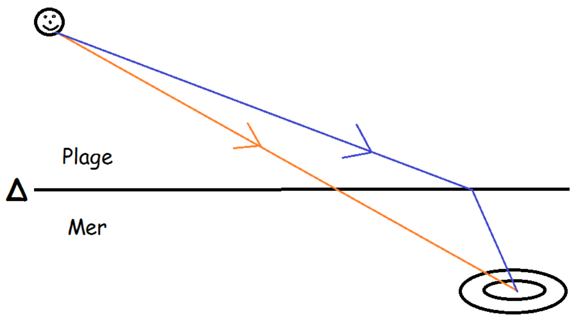
La lumière est une onde électromagnétique, mais nous allons adopter une approche de l'optique plus classique : celle de l'optique géométrique.

On considère que la lumière traverse la matière sous forme de rayons lumineux, c'est à dire de faisceaux de lumière de très faible rayon. Nous exclurons tout phénomène de diffraction en supposant que $\lambda << D$ ou λ désigne la longueur d'onde qui caractérise la lumière et D la taille des diaphragmes et des obstacles que peut rencontrer les rayons lumineux. On négligera également tout phénomène de polarisation et d'interférences.

1.2 Chemin optique

Si la lumière se propage sous forme de rayons lumineux, on peut se demander le chemin que prend ces rayons pour aller d'un point à un autre.

Pour sentir ce qui se passe, nous pouvons faire une analogie entre la lumière et un nageur.



Le nageur se situe sur la plage. Il doit se rendre le plus rapidement possible à la bouée qui se trouve dans la mer. La délimitation plage/mer est représenté par la droite Δ. Aussi bon nageur soit-il, le nageur est plus rapide en courant qu'en nageant. On devine aisément que le chemin le plus rapide n'est pas la ligne droite vers la bouée. Le nageur doit faire un compromis entre le trajet sur la plage et le trajet en mer afin de minimiser la durée.

Il en est de même avec la lumière. Le principe du moindre temps, énoncé par Fermat, stipule que pour aller d'un point A à un point B, la lumière emprunte le chemin qui minimise sa durée de parcours. Ainsi, comme le nageur, la lumière n'a pas forcément la même vitesse suivant le milieu qu'elle traverse.

On rappelle qu'un milieu est caractérisé par son indice, $n = c/v$, avec c la vitesse de la lumière dans le vide et v la vitesse de la lumière dans le milieu. On définit alors le chemin optique le long d'une courbe allant de A à B par :

$$(AB) = \int_A^B n\,\mathrm{d}s \tag{1}$$

avec s l'abscisse curviligne le long de la courbe. Il s'agit d'un potentiel chemin pour la lumière. Cependant, il existe une infinité de courbes reliant A à B. Pour connaitre le réel chemin de la lumière, on utilise le principe variationnel de Fermat.

1.3 Énoncé du principe de Fermat

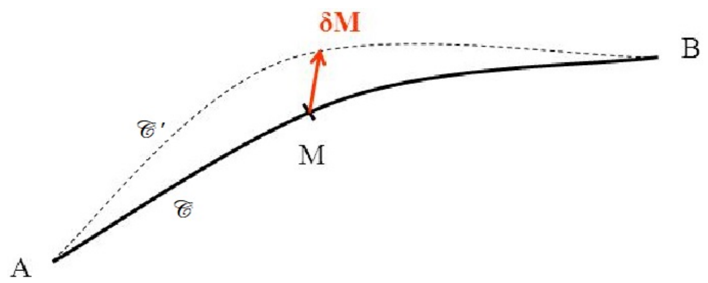
Le principe de Fermat s'énonce ainsi :

« Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet suivi par la lumière est stationnaire.»

La notion la plus importante et sans doute la plus floue de cet énoncé est celle de chemin stationnaire.

Soient A et B deux points atteints par la lumière et une trajectoire C reliant les deux points (cette trajectoire n'est pas, à priori une trajectoire réellement suivi par la lumière).

Considérons une trajectoire C', obtenue en déformant C par un déplacement élementaire δM, en chaque point M de C en dehors de A et B (δA et δB sont nuls). On nomme L le chemin optique le long de C et L' le chemin optique le long de C'.



Le chemin optique le long de C est dit stationnaire, si la quantité δL= L' - L est infiniment petite par rapport à la valeur supérieure de $||\delta M||$

2 Lois de l'optique géométrique

2.1 Milieu isotrope et homogène

Supposons un milieu isotrope et homogène. Dans ce cas, n est constant dans tout le milieu. Donc :

$$(AB) = \int_A^B n\,\mathrm{d}s = n \int_A^B \mathrm{d}s = n\ AB \tag{2}$$

Or le principe de Fermat indique que le chemin emprunté par la lumière est stationnaire, donc

$$AB = \overline{AB} \tag{3}$$

Où $\overline{AB}$ désigne le segment AB. De ce calcul de chemin optique, on en déduit que dans un milieu isotrope et homogène, la lumière se propage en ligne droite.

2.2 Retour inverse de la lumière

Considérons que la lumière va d'un point A à un point B selon une certaine courbe. Calculons le chemin optique de B à A le long de cette courbe :

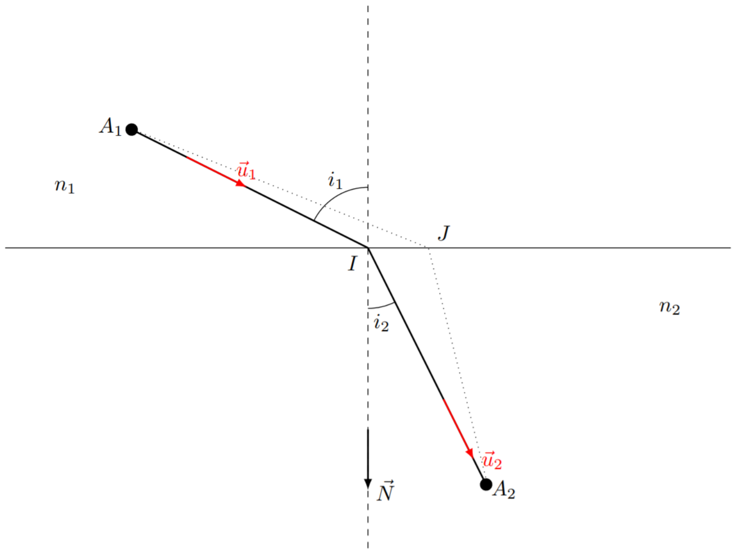
$$(BA) = \int_B^A n\,\mathrm{d}s = \int_A^B n\ -\mathrm{d}s = \int_A^B n\,\mathrm{d}s' = (AB) \tag{4}$$

(AB) étant stationnaire, (BA) l'est aussi. On en déduit alors le principe de retour inverse de la lumière :
«Le trajet suivi par la lumière ne dépend pas de son sens de parcours»

2.3 Lois de Snell-Descartes

Lois de la réfraction

A l'aide du principe de Fermat, il est également possible de retrouver les lois de Snell-Descartes.



Supposons deux milieux d'indice différent n1 et n2. La lumière va d'un point A à un point B (porté par deux vecteurs unitaires u1 et u2) et passe par une dioptre en un point I. Selon le principe de Fermat, ce chemin optique est stationnaire. Donc si l'on déforme le chemin emprunté par un nouveau chemin A > J > B, on a :

$$\delta L = L' - L = (AJ) + (JB) - (AI) - (IB) = n_1 \vec{IJ}.\vec{u_1} - n_2 \vec{IJ}.\vec{u_2} = \vec{IJ}(n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}) = 0 \tag{5}$$

Donc $n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}$ est colinéaire à $\vec{N}$, un vecteur normal à la séparation des milieux. Nous avons donc :

$$n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2} = \alpha\vec{N} \tag{6}$$

Nous obtenons alors la première loi de la réfraction de Snell-Descartes :

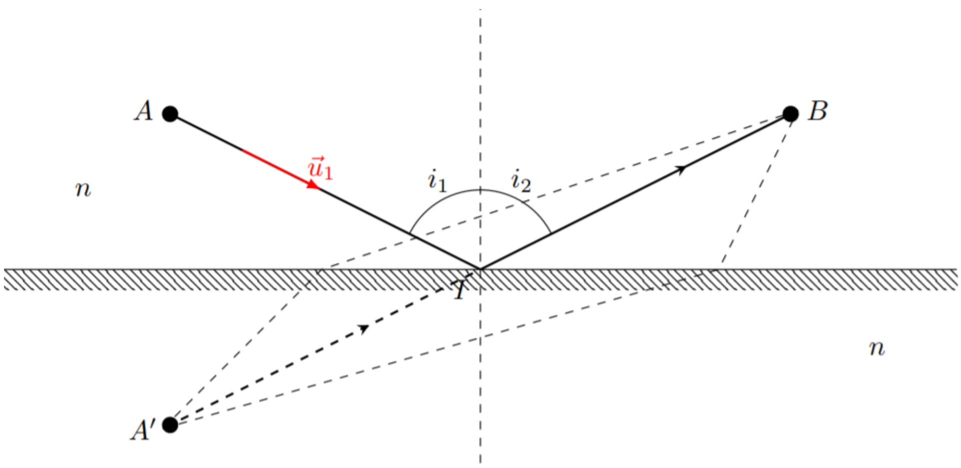
« Le rayon incident et la normale à la dioptre forme un plan d'incidence. Le rayon réfléchi se trouve également dans ce plan.»

En réalisant un produit vectoriel par $\vec{N}$ à l'équation précédente, on obtient la deuxième loi de la réfraction :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{7}$$

Loi de la réflexion

Pour retrouver la loi de la réflexion, on suppose un milieu d'indice n et un rayon allant de A à B et étant réfléchi sur un miroir en un point K quelconque. Le chemin optique s'écrit $(AB) = nAK + nKB$. En considérant A', le symétrique de A par rapport au miroir, on obtient que AK=A'K. Ainsi $(AB) = nA'K + nKB$. Cela nous indique qu'un rayon imaginaire en provenance de A' se propage fictivement dans un milieu d'indice n.



Cherchons désormais,à l'aide du principe de Fermat, le chemin optique emprunté par la lumière de A à B qui touche le miroir au point I : nous avons vu que dans un milieu isotrope et homogène, la lumière se propage en ligne droite. Donc, en notant I le point aligné avec A' et B :

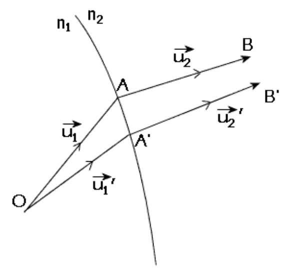
$$(AB) = (A'B) = nA'B = n[A'I + IB] = n[AI + IB] \tag{8}$$

On peut alors faire intervenir les angles orientés i_1 et i_2. Par symétrie et par propriété des angles alternés, nous trouvons la deuxième loi de Snell-Descartes :

$$i_1 = -i_2 \tag{9}$$

2.4 Théorème de Malus

Le théorème de Malus se démontre également à l'aide du principe de Fermat.



Considérons un rayon lumineux, issu de O qui atteint une surface dioptrique en A, il passe ensuite par un point B situé sur une surface d'onde Σ. Le chemin optique s'écrit alors $L = n_1OA + n_2AB$

Un second rayon issu de O, voisin du premier, atteint la surface dioptrique en A' et passe par un point B' situé lui aussi sur la surface d'onde Σ. Calculons la différence de chemin optique :

$$\Delta L = \Delta(n_1\vec{u_1}.\vec{OA} + n_2\vec{u_2}\vec{AB}) = n_1\vec{u_1}\vec{AA'} + n_2\vec{u_2}(\vec{BB'} - \vec{AA'}) \tag{10}$$

On reconnait la deuxième loi de la réfraction, sous sa forme vectorielle avec $n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2} = \alpha\vec{N}$ or $\vec{AA'}$ est orthogonal à $\vec{N}$.

Il nous reste donc :

$$\Delta L = n_2\vec{u_2}.\vec{BB'} = 0 \tag{11}$$

d'après le principe de Fermat. $\vec{u_2}$ est donc orthogonal à $\vec{BB'}$, et par conséquent à Σ. Ce résultat ce généralise avec plusieurs surfaces dioptriques, et on peut en retirer le théorème de Malus :

«Dans les milieux isotropes, les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'onde.»

3 Étude des milieux non-homogènes

Jusqu'à présent, nous avons traité des milieux simples qui sont des milieux homogènes. Voyons ce qu'il se passe avec un milieu inhomogène.

☕

Expérience de mirage inférieur

✍ Optique de Sylvain Houard, page 47-48 ⏲ Temps nécéssaire à l'expérience : 10 minutes

remplir une cuve avec de l'eau, jusqu'à une hauteur de 7-8 cm. Ajouter à la surface 2 cm d'éthanol. Les deux couches vont diffuser et créer un gradient d'indice (n(eau)=1,33 et n(alcool)=1.36). Avec un laser, viser en incidence normale la parois de la cuve

L'indice de l'éthanol est d'environ 1,36 et celui de l'eau est de 1,33. Cette différence d'indice va créer un gradient d'indice lors de la diffusion de l'éthanol dans l'eau.

On constate que le rayon lumineux ne se propage pas en ligne droite dans la cuve, mais qu'il est courbé !

3.1 Équation des rayons lumineux

Le principe de Fermat est un principe variationnel. Il peut donc être résolu à l'aide d'Euler-Lagrange.

Pour cela définissons notre problème.

Nous avons une action qui est notre chemin optique :

$$(AB) = \int_A^B n \,\mathrm{d}s \tag{12}$$

avec ds l'abscisse curviligne. Cette action peut se réécrire en fonction d'un paramètre t, qui parcourt un segment [a,b]. Ce paramètre peut-être le temps, ou non. Le chemin optique peut se réécrire :

$$(AB) = \int_a^b n(\vec{r}(t))\,||\dot{\vec{r}}(t)||\,\mathrm{d}t = \int_a^b n(\vec{r}(t))\,\sqrt{\dot{\vec{r}}(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

avec $\vec{r}$ le vecteur position qui va parcourir la courbe.

Les coordonnées généralisées sont x,y et z, les trois coordonnées de $\vec{r}$. Les vitesses généralisées sont donc les $\dot{x}$,$\dot{y}$ et $\dot{z}$ avec $\dot{x} = dx/dt$ etc.

Le lagrangien de notre action est donc :

$$\mathcal{L} = n(x,y,z)\,\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{14}$$

Résolvons l'équation d'Euler-Lagrange, selon x. (les calculs sont les mêmes pour y et z) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n(x,y,z)\ \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\right) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ \frac{\partial n(x,y,z)}{\partial x} \tag{16}$$

Vu que nous obtenons la même chose selon y et z, nous pouvons réécrire cette équation sous forme vectorielle :

$$\frac{1}{||\dot{\vec{r}}(t)||}\ \frac{d}{dt}\ \left(\frac{n(\vec{r}(t)}{||\dot{\vec{r}}(t)||}\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{\nabla} n(\vec{r}(t)) \tag{17}$$

avec $ds = ||\dot{\vec{r}}(t)||dt$, nous aboutissons finalement à l'équation des rayons lumineux :

$$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{\nabla} n \tag{18}$$

Cette équation décrit la marche d'un rayon lumineux en fonction de la variation de l'indice du milieu dans lequel il se propage.

3.2 Mirages

Voyons en quoi cette équation est utile pour connaitre le trajet des rayons lumineux grâce à l'étude d'un phénomène surprenant : celui des mirages.

Un mirage optique se produit lorsque l'indice du milieu varie de façon continu. Dans la vie courante, les mirages sont essentiellement dus à la variation de température de l'air en fonction de l'altitude, ce qui provoque une variation de l'indice.

Considérons un milieu dans lequel l'indice s'exprime :

$$n^2(z) = az + b \tag{19}$$

On considère un rayon lumineux qui se propage dans ce milieu dans le plan xOz.

L'équation des rayons lumineux s'exprime :

$$\vec{\nabla} n = \frac{d}{ds}\left(n(z)\frac{d\vec{r}}{ds}\right) \tag{20}$$

On a :

$$\frac{\partial(n^2)}{\partial z} = 2n\frac{\partial n}{dz} = a \tag{21}$$

D'où

$$\vec{\nabla} n = \left(0, 0, \frac{a}{2n}\right) \tag{22}$$

On peut aussi paramétrer le vecteur unitaire $\frac{d\vec{r}}{ds}$ avec un angle θ défini par rapport à la verticale :

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = (sin\theta, 0, cos\theta) \tag{23}$$

Selon x, l'équation des rayons lumineux donne :

$$\frac{d}{ds}(n(z)sin\theta) = 0 \tag{24}$$

Ce qui nous indique que la quantité $n(z)\ sin\theta$ est constante le long de la trajectoire. Selon z, l'équation donne :

$$\frac{d}{ds}(n(z)cos\theta) = \frac{a}{2\ n(z)} \tag{25}$$

Or $cos\theta = \frac{sin\theta}{tan\theta} = \frac{sin\theta}{\frac{dx}{dz}} = sin\theta\frac{dz}{dx}$
Ainsi :

$$\frac{d}{ds}(n(z)\ cos\theta) = \frac{d}{ds}(n(z)\ sin\theta\frac{dz}{dx}) = n(z)\ sin\theta\frac{d}{ds}(\frac{dz}{dx}) = n(z)\ sin\theta\frac{d}{dx}(\frac{dz}{dx})\frac{dx}{ds} = n(z)\ sin^2\theta\frac{d^2z}{dx^2} \tag{26}$$

Ce qui aboutit à :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{a}{2n^2(z)sin^2\theta} = \frac{aK}{2} \tag{27}$$

avec K une constante positive.

Cette équation est caractéristique d'une parabole, le rayon lumineux se courbe donc dans le milieu, vers le haut si a est positif (mirage inférieur ou mirage chaud) et vers le bas si a est négatif (mirage supérieur ou mirage froid).

Conclusion

Nous venons de montrer que bons nombres de résultats de l'optique géométrique se redémontre à l'aide du principe de Fermat, qui est un principe variationnel. Ce principe permet notamment d'arriver à l'équation des rayons lumineux sans passer par l'équation eikonale.

Questions, commentaires, opinions ?

(une alternative au mélange eau-éthanol est l'eau salé. la fibre optique peut également être abordé dans la partie 3. le calcul des mirages est celui tiré de notre cours, je n'ai pas trouvé d'étude dans les bouquins)