

Equations d'Euler-LAGRANGE

EL1

1.) Euler-Lagrange à 1 dimension :

soit f une fonction des temps t , de la position x et de la vitesse v ($v = \frac{dx}{dt}$).

si $\int_{t_1}^{t_2} f(t, x, v) dt$ est stationnaire
minimale ou maximale

$$\text{alors } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Démonstration : cf démonstration Euler-Lagrange 3D
page (EL5) avec x au lieu de $\vec{x}$.

2.) Euler-Lagrange à 3 dimensions.

Soit f une fonction du temps t , de la position $\vec{x}$ et du module de la vitesse v
($v = \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\|$)

si $\int_{t_1}^{t_2} f(t, \vec{x}, v) dt$ est stationnaire
minimale ou maximale

$$\text{alors } \vec{\text{grad}}_{\vec{x}}(f) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\vec{v}}{v} \right) = 0$$

avec $\vec{\text{grad}}_{\vec{x}}(f)$ tel que $f(t, \vec{x} + d\vec{x}, v) - f(t, \vec{x}, v) = \vec{\text{grad}}_{\vec{x}}(f) \cdot d\vec{x}$

démonstration: cf page (EL5)

(EL2)

3.) Euler-Lagrange à 3 dimensions bis

Soit f une fonction du temps t , de la position $\vec{r}$ et de la vitesse $\vec{v}$ ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$).

si $\int_{t_1}^{t_2} f(t, \vec{r}, \vec{v}) dt$ est stationnaire
minimale ou maximale

$$\text{alors } \vec{\text{grad}}_{\vec{r}}(f) - \frac{d}{dt}(\vec{\text{grad}}_{\vec{v}}(f)) = 0$$

avec $\vec{\text{grad}}_{\vec{v}}(f)$ tel que

$$f(t, \vec{r}, \vec{v} + d\vec{v}) - f(t, \vec{r}, \vec{v}) = \vec{\text{grad}}_{\vec{v}}(f) \cdot d\vec{v}$$

démonstration: cf page (EL8)

(1D)

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, x, v) dt \quad \text{stationnaire} \quad \text{Verif Euler Lagrange (1D)} \quad \text{méca classique. (EL3)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dv} \right) - \frac{dL}{dx} = 0$$

$$\text{si } L(t, x, v) = E_c - E_p = \frac{1}{2} m v^2 - E_p(x)$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, v) dt \quad \text{stationnaire}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{d(\frac{1}{2} m v^2 - E_p(x))}{dv} \right) - \frac{d(\frac{1}{2} m v^2 - E_p(x))}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (mv) + \frac{dE_p(x)}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (mv) = - \frac{dE_p(x)}{dx} = F.$$

(11)

cas relativiste:

$$E_c = (\gamma - 1) m c^2$$

$$\frac{dE_c}{dv} = \frac{d[(\gamma - 1) m c^2]}{dv} = m c^2 \frac{d(\gamma)}{dv}$$

$$= m c^2 \frac{d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{dv}$$

$$= m c^2 \times \frac{d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{d\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)} \times \frac{d\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)}{dv}$$

$$= m c^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \frac{1}{c^2} \times (-2v)$$

$$= +\gamma^3 m v$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma^3 m v) = - \frac{dE_c}{dt} = F$$

pas bon!

(en RFD relativiste, c'est

$$\frac{d}{dt} (\gamma m v) = F$$

$$\Rightarrow \gamma^3 m \frac{dv}{dt} = F$$

DEMONSTRATION Euler-LAGRANGE 3D

(3D): $f(t, \vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m v^2 - \bar{E}_p(\vec{r})$

$$v = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

$$J = \int_{t_0}^{t_2} f(t, \vec{r}, \vec{v}) dt$$

(ELS)

$$\vec{r}_\varepsilon(t) = \vec{r}(t) + \varepsilon \vec{p}(t) \Rightarrow \vec{v}_\varepsilon = \vec{v} + \varepsilon \frac{d\vec{h}}{dt}$$

$$J(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_2} f(t; \vec{r}_\varepsilon(t); \vec{v}_\varepsilon) dt$$

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(\varepsilon=0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(\varepsilon) - J(0)}{\varepsilon}$$

$$\frac{J(\varepsilon) - J(0)}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_2} \frac{1}{\varepsilon} \left(\vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \varepsilon \vec{h}(t) + \frac{df}{dv} (m, \vec{r}, v) \times dv \right)$$

or $dv = \left\| \varepsilon \frac{d\vec{h}}{dt} \right\| \times \vec{T}$ avec $\vec{T} = \frac{\vec{v}}{v}$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_2} \frac{1}{\varepsilon} \left(\vec{\nabla} f \cdot \varepsilon \vec{h}(t) + \frac{df}{dv} \times \varepsilon \frac{d\vec{h}}{dt} \times \vec{T} \right)$$

$$= \int_{t_0}^{t_2} \vec{\nabla} f \cdot \vec{h}(t) + \frac{df}{dv} \frac{d\vec{h}}{dt} \cdot \vec{T}$$

3D-2

E6

donc

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\varepsilon}(\varepsilon=0) &= \int_{t_0}^{t_1} \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{h}(t) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{h}}{dt} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \vec{T} \right) dt \\ &= \text{---} + \underbrace{\left[\vec{h}(t) \frac{df}{d\vec{v}} \cdot \vec{T} \right]}_{\substack{0 \text{ car} \\ \vec{h}(t_0) = \vec{h}(t_1) = \vec{0}}} \bigg|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} h(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{T} \right) dt \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\vec{\text{grad}} f - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{T} \right) \right] h(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}}(f) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\vec{v}}{r} \right) = 0$$

Appliqué à $f = \frac{1}{2} m v^2 = E_p(r)$

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}}(E_p(r)) - \frac{d}{dt} \left(m \vec{v} \times \frac{\vec{v}}{r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} - \frac{d(m\vec{v})}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \text{ça marche !}$$

$$(30 \text{ km}) \quad \mathcal{L}(t, \vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} - U_p(\vec{r})$$

(EL2)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \vec{r}, \vec{v}) dt$$

$$\vec{r}_\varepsilon = \vec{r} + \varepsilon \vec{h}(t) \Rightarrow \vec{v}_\varepsilon = \vec{v} + \varepsilon \frac{d\vec{h}}{dt}$$

$$J(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t; \vec{r}_\varepsilon, \vec{v}_\varepsilon) dt$$

$$\frac{J(\varepsilon) - J(0)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathcal{L}(t, \vec{r}_\varepsilon, \vec{v}_\varepsilon) - \mathcal{L}(t, \vec{r}, \vec{v}) \right) dt$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \left(q_{ad}^{\vec{r}} f \times \varepsilon \vec{h}(t) + q_{ad}^{\vec{v}} f \times \varepsilon \frac{d\vec{h}}{dt} \right) dt$$

$\uparrow$
 no dipa e mecnica

$$= \int_{t_0}^{t_1} q_{ad}^{\vec{r}}(f) \cdot \vec{h}(t) + \int_{t_0}^{t_1} q_{ad}^{\vec{v}}(f) \cdot \frac{d\vec{h}}{dt} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} q_{ad}^{\vec{r}}(f) \cdot \vec{h}(t) + \underbrace{\left[h(t) \cdot q_{ad}^{\vec{v}}(f) \right]_{t_0}^{t_1}}_0 - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(q_{ad}^{\vec{v}}(f) \right) \cdot h(t) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[q_{ad}^{\vec{r}}(f) - \frac{d}{dt} \left(q_{ad}^{\vec{v}}(f) \right) \right] \cdot \vec{h}(t) dt = 0$$

$$\Rightarrow q_{ad}^{\vec{r}}(f) - \frac{d}{dt} \left(q_{ad}^{\vec{v}}(f) \right) = 0$$

Varif (3D his)

$$f(t, \vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - E_p(r, y, z) \quad (EL9)$$

$$\Rightarrow \frac{d(-E_p(r))}{dn} = \frac{d}{dt} (2m v_x) = 0$$

$$\Rightarrow F_x - m \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow F_x = m \frac{dv_x}{dt} \rightarrow \text{idem pour } y \text{ et } z!$$

comp (3D) et (3D his):

$$\vec{g} = \frac{df}{d\vec{r}} = \frac{df}{dr} \times \frac{\vec{r}}{r} \quad ?$$

$$d(vr) = v dr + r dv$$

$$d(v^2) = 2v dv$$

$$\downarrow$$

$$df = \vec{g} \cdot d\vec{r} = \frac{df}{dr} \times \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{df}{dr} \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot d\vec{r} = \frac{df}{dr} \times \frac{1}{r} (\vec{r} \cdot d\vec{r})$$

$$= \frac{df}{dr} \times \frac{1}{r} d\left(\frac{1}{2} r^2\right)$$

$$= \frac{df}{dr} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{2} d(r^2)$$

$$= \frac{df}{dr} \times \frac{1}{r} \times \frac{1}{2} \times 2r \cdot dr$$

$$= df \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{df}{dr} \times \frac{\vec{r}}{r} = \vec{g} = \vec{g}_{\text{rad}}(f)}$$