

Equation du rayon lumineux
à partir du principe de Fermat et
de l'équation d'Euler - Lagrange

ELF1

1.) Equation d'Euler - LAGRANGE en 3D (appel)

soit f une fonction du temps t , de la position $\vec{r}$ et du module de la vitesse v ($v = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$).

si $J = \int_{t_1}^{t_2} f(t, \vec{r}, v) dt$ est stationnaire

$$\text{alors } \vec{\text{grad}}_{\vec{r}}(f) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\vec{v}}{v} \right) = 0$$

avec $\vec{\text{grad}}_{\vec{r}}(f)$ tel que $f(t, \vec{r} + d\vec{r}, v) - f(t, \vec{r}, v) = \vec{\text{grad}}_{\vec{r}}(f) \cdot d\vec{r}$

2.) Rappel principe de Fermat: "la lumière emprunte

un chemin le plus rapide" soit le chemin tel

que $\Delta t = \frac{1}{c_0} \int_A^B n(\vec{r}) ds$ soit minimale

↑
temps
de parcours
de A à B

↑
indice = $\frac{c_0}{v}$

↑
Vitesse de la lumière ds le vide.

← s = abscisse curviligne

3.) Equation du rayon de lumière :Th de Fermat $\Rightarrow \delta t$ minimal

$$\Rightarrow \frac{1}{c_0} \int_A^B n(\vec{r}) ds \text{ minimale}$$

$$\Rightarrow \int_A^B n(\vec{r}) \times \frac{ds}{dt} \times dt \text{ minimale}$$

$$\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} n(\vec{r}) \times v \times dt \text{ minimale}$$

$$\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} f(t, \vec{r}, v) dt \text{ minimale avec } f(t, \vec{r}, v) = n(\vec{r}) \times v$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{r}} f - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\vec{v}}{v} \right) = 0$$

(équation d'Euler LAGRANGE en 3D)

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_{\vec{r}} (n(\vec{r}) \times v) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (n(\vec{r}) \times v)}{\partial v} \times \frac{\vec{v}}{v} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(n) \times v - \frac{d}{dt} (n \times \vec{T}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(n\vec{T})}{dt} = \vec{\nabla}(n) \times \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d(n\vec{T})}{ds} = \vec{\nabla}(n) \quad \underline{\text{c q f d}}$$