

LP35: Diffraction de Fraunhofer

* Niveau : L3

* Pré-requis : - optique ondulatoire, géométrie.
- transformée de Fourier

* Expériences : - diffraction par une fente, par un trou.
- filtrage optique.

* Biblio : - S'intégrer tout-en-un SAVZ
- optique Huard
- Serfaty.

PLTOS →

Plan : I - Formalisation d'une théorie de la diffraction

- 1) Principe d'Huygens - Fresnel
- 2) Conditions de Fraunhofer
- 3) Diffraction de Fraunhofer.

II - Figures de diffraction.

- 1) Diffraction par une fente
- 2) Propriétés de la figure de diffraction.

III - Applications.

- 1) Filtrage spatial
- 2) Limite de résolution.

Intro

- Mise en évidence au milieu du XVIII^e, lgtps inexpliquée
↳ déviation des rayons lumineux $\neq$ à la direction prévue par l'optique géométrique lorsqu'un faisceau rencontre un obstacle de très petite dimension.

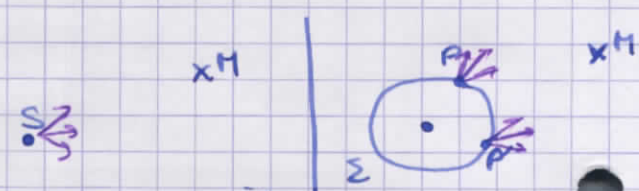
→ exp: diffraction par une fente, par un trou.

- Théorie quantitative proposée par Fresnel en 1818: considère la nature ondulatoire de la lumière. L'onde diffractée est la superposition d'une infinité d'ondes secondaires → interférences.

• Pb: Comment formaliser cette théorie et expliquer les figures de diffraction observées? Applications!

I. Formalisation d'une théorie

1) Principe d'Huygens-Fresnel.

- Postulat intuitif: équivalence:

- Énoncé: Soit une source ponctuelle S de lumière monochromatique et une surface Σ entourant S.
 - * Chaque ds_p autour de P atteinte par l'onde incidente venant de S se comporte comme une source secondaire ponctuelle qui émet une onde sphérique, onde secondaire. $\hat{r}$ phase au pt P, amplitude $\propto \frac{1}{r}$ ds_p, 2^{inc}.
 - * Les sources secondaires sont cohérentes entre elles: elles interfèrent au pt M.

- expression mathématique: onde incidente émise par S, au pt P:

$$a(P) = A(P) e^{i\phi(P)}$$

→ a_p onde sphérique en M $\frac{a_p(M)}{r_{PM}} \cdot e^{i(\phi_0 + k_0 r_{PM})}$

avec $\alpha = G \cdot A(P) dS_P$ et $\psi_0 = \psi(P)$

→ source cohérente, en Π on ajoute les amplitudes:

$$\underline{a}(r) = G \iint_{P \in \Sigma} \frac{\underline{a}(P)}{r_{PI}} e^{ik_0 r_{PI}} dS_P$$

• Application avec un objet diffractant

→ chaque pt de l'objet diffractant se comporte c. une source secondaire.

$\underline{a}(P) \leftrightarrow \underline{a}_{dj}(P)$ l'amplitude transmise par l'objet.

ex: si ouverture

$$\underline{a}_{dj} = \begin{cases} \underline{a}(P) & \text{si } P \in \text{ouverture} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

plus généralement on définit une fonction de transparence de l'objet $\underline{t}(P) = T(P) e^{i\psi(P)}$ tel que $\underline{a}_{dj} = \underline{t}(P) \underline{a}(P)$.

$$\Rightarrow \underline{a}(r) = G \iint_{P \in \Pi} \frac{\underline{t}(P) \underline{a}(P)}{r_{PI}} e^{ik_0 r_{PI}} dS_P$$

Π plan juste après l'objet.

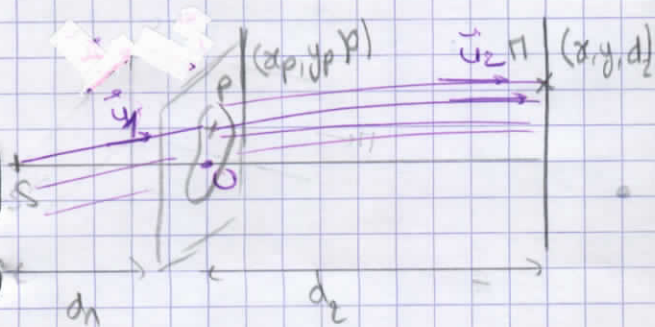
2) Diffraction à l'∞ : Diffraction de Fraunhofer

• expression mathématique un peu compliquée → sans condition + simple

• Conditions de Fraunhofer :

* source S située à l'infini.

* point d'obs. Π situé à l'infini

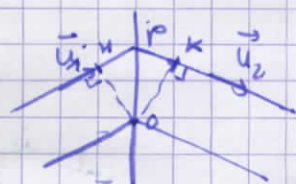


• on considère une onde incidente sphérique $\underline{a}(P) = A_0 e^{ik_0 (SP)}$

• $d_1, d_2 \rightarrow \infty$ de $\frac{1}{SP} \approx \frac{1}{d_1}$ et $\frac{1}{r_{PI}} \approx \frac{1}{d_2}$

$$\underline{a}(r) = \frac{GA_0}{d_2} \iint_{\Pi} \underline{t}(P) e^{ik_0 (SP)} dS_P$$

• calcul de (SPN) : on introduit 0, pt de réf.



$$(SPN) = (HP) + (PK) + (SON)$$

$$HP = \vec{u}_1 \cdot \vec{OP} \quad \text{et} \quad PK = -\vec{OP} \cdot \vec{u}_2$$

$$\text{donc} \quad (SPN) = -(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OP} + (SON)$$

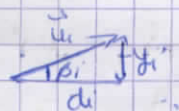
$$\Rightarrow \underline{a(r)} = \frac{GA_0}{d} e^{iK_0(SON)} \iint_{\pi} \underline{\pm(P)} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} [(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OP}]} d\vec{p}$$

Rq: $E = |a(r)|^2$ donc facteur de phase peu important

• expression de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$: $\vec{u}_i = \alpha_i \vec{u}_x + \beta_i \vec{u}_y + \gamma_i \vec{u}_z$

$$\alpha_i = \sin \theta_{xi} \quad \beta_i = \sin \theta_{yi}$$

$$\approx \theta_{xi} \quad \approx \theta_{yi}$$



$$\underline{a(r)} = K \iint_{\pi} \underline{\pm(P)} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} \left[\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\lambda} x_p + \frac{(\beta_2 - \beta_1)}{\lambda} y_p \right]} d\vec{p} \quad \text{avec } \vec{OP} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$$

$$\text{on pose} \quad f_x = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda} \quad \text{et} \quad f_y = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\lambda}$$

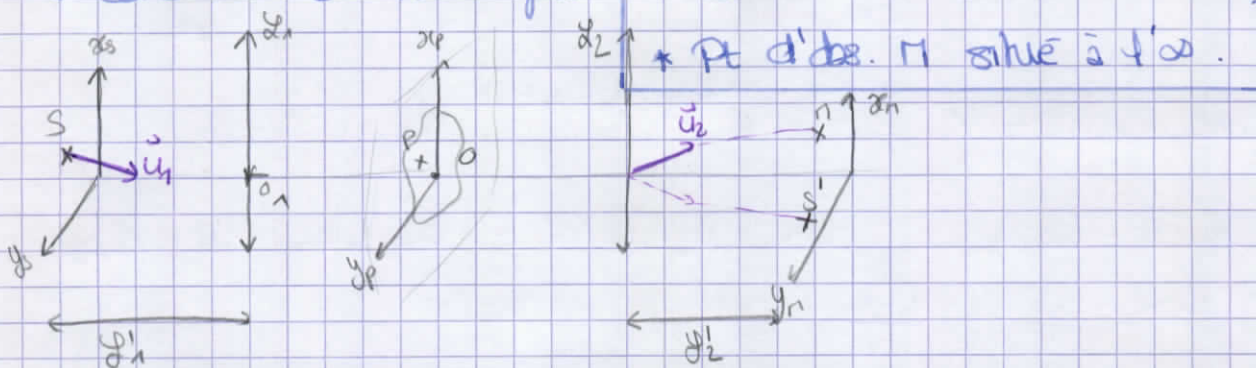
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{a}(f_x, f_y) &= K \iint_{\pi} \underline{\pm(P)} e^{-i2\pi (f_x x_p + f_y y_p)} d\vec{p} \\ &= TF(\underline{\pm(P)}) \end{aligned}}$$

La figure de diffraction est une image de la TF de l'objet. C'est très bien car on a pu voir pourquoi parler des figures de diffraction et leurs propriétés.

2) Conditions de Fraunhofer

- expression mathématique un peu compliquée : sans certaines conditions $\oplus$ simple.

- Conditions de Fraunhofer :



- S à l'infini grâce à z_1 : onde plane incidente $A_0 e^{i k_0 \cdot \vec{r}_1} = \underline{a}(\vec{r}_1)$

- $\vec{u}_1$ vecteur incident sur O $\vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\alpha_1 = \sin \theta_{x_1}$
et $\vec{u}_1 = \frac{\vec{SO}_1}{SO_1} \sim \frac{\vec{SO}_1}{y'_1}$ $\beta_1 = \sin \theta_{y_1}$

$$\Rightarrow \alpha_1 = -\frac{z_1}{y'_1} \quad \text{et} \quad \beta_1 = -\frac{y_1}{y'_1}$$

- sans objet diffractant image en S' (géométrique)

$$\text{et} \quad z_2 = -\frac{y'_2}{y'_1} z_1 = y'_2 \alpha_1$$

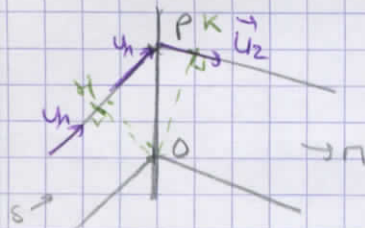
- $\vec{u}_2$ chose avec $\vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ et $\alpha_2 = \sin \theta_{x_2}$, $\beta_2 = \sin \theta_{y_2}$

$$z_1 = y'_2 \alpha_2 \quad y_1 = y'_2 \beta_2$$

3) Diffraction de Fraunhofer

$$\text{Alors} \quad \underline{a}(\vec{r}_1) = G A_0 \iint_{P \in \Pi} \underline{a}(\vec{r}_2) \frac{1}{r_{12}} e^{i k_0 (S P r_1)} dS_P$$

- Approx à l'ordre 0 en amplitude : $r_{12} = r_1 = \text{cte}$.
Avec O un pt de référence.
- ne faut calculer $(S P r_1)$.



$$\begin{aligned}
 (s_{P1}) - (s_{O1}) &= (s_P) - (s_O) + (r_{P1}) - (r_{O1}) \\
 &= \vec{u}_1 \cdot \vec{OP} - \vec{u}_2 \cdot \vec{OP} \\
 &= -(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OP}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \underline{a}(r) = \frac{G A_0}{O1} \iint_P \underline{t}(P) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OP}} - i \frac{2\pi}{\lambda_0} (s_{O1}) \quad \underbrace{\quad}_{\text{cte}} \quad dP$$

$$\text{Donc } \underline{a}(r) = K \iint \underline{t}(P) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OP}} dP$$

$$\text{or } \vec{OP} = (x_P, y_P, 0) \text{ donc } (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OP} = (\alpha_2 - \alpha_1)x_P + (\beta_2 - \beta_1)y_P$$

$$\text{on pose } \gamma_x = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_0} \text{ et } \gamma_y = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\lambda_0}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } \underline{a}(\gamma_x, \gamma_y) &= K \iint_P \underline{t}(P) e^{-i 2\pi (\gamma_x x_P + \gamma_y y_P)} dP \, dP \\
 &= TF(\underline{t}(P)) = \hat{T}(\gamma_x, \gamma_y)
 \end{aligned}$$

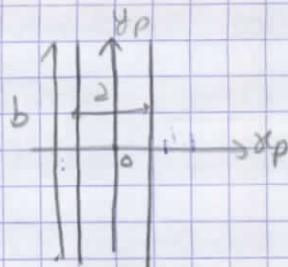
- objet mathématique connue : utiliser les résultats.
- fréquences spatiales : $\gamma_x = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda_0} = \frac{x_1' - x_2'}{\lambda_0 y_2'}$
- L'amplitude lumineuse est une représentation directe de la TF de l'objet diffractant : chaque pt lumineux correspond à une fréquence spatiale ($x_1 \leftrightarrow \gamma_x$), plus les pts sont éloignés de l'image géométrique S' plus les fréquences sont élevées.

II - Figures de diffraction

1) Diffraction par une fente :

- fente très longue de largeur a .

↳ pas de diffraction selon y : indép. de y_p



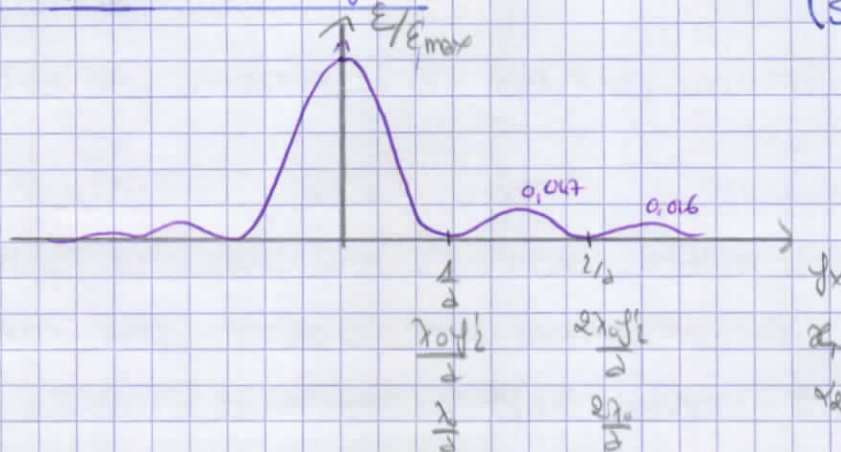
$$\bullet \quad t(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_p| > \frac{a}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{fonction porte}$$

$$\bullet \quad \underline{a}(\eta) = C A_0 \text{e}^{i\phi_0(\eta)} a \text{sinc}(\pi y_x a)$$

$$\text{avec } y_x = \frac{x_n - x_s'}{\lambda y_2'} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow |E(\eta)| \propto (ab)^2 \text{sinc}^2(\pi y_x a)$$

(S' : posit° de l'image géométrique)



- max d'éclairement : $y_x = 0$ ou $\alpha_2 = \alpha_1$ ou $x_n = x_s'$

cad de la direct° de la lumière incidente, sur la posit° géométrique de la source

⇒ le max correspond à la prédiction de l'optique géométrique

- Puis extinction de $x_n = x_s' + n \frac{\lambda y_2'}{2}$ $n \in \mathbb{Z}^*$

→ pt sensibles limitant les étches de diffraction.

→ largeur étche centrale : $\frac{2\lambda y_2'}{a}$ les autres largeurs $\frac{\lambda y_2'}{a}$.
(QDS se ce qu'on observe).

- étalement angulaire : processus diffracté, ouverture angulaire $\frac{2\lambda y_2'}{a}$.

- étalement $\propto$ convé de la source.

2) Propriétés des figures de diffraction.

- issues des propriétés de la TF.

- symétrie: symétrie de la figure de diffraction liée aux symétries de l'objet. (paire $\xrightarrow{TF}$ paire, impair $\xrightarrow{TF}$ impair)

- translation: $TF(t(x+x_0)) = e^{i k x_0} TF(t(x))$

translatⁿ de l'objet ne modifie pas l'éclairement.

- dilatation: $TF(t(\mu x)) = \frac{1}{|\mu|} TF(t(x)) \left(\frac{dx}{d\mu} \right)$

si on contracte l'objet diffractant $\rightarrow$ contraction de la figure de diffraction. éclairement multiplié par μ^2 .

- rotation: Rotation de l'objet $\Rightarrow$ m. Rotation de la figure.

- fréquences spatiales: chaque tâche lumineuse d'une figure de diffraction peut être associée à une fréquence spatiale de l'objet diffractant. Les fréquences sont d'autant plus élevées que les tâches sont éloignées du pt de eugène de la lumière.

- théorème de Babinet: deux pupilles complémentaires donnent des figures de diffraction identiques en tt pt différent de l'image de la source.

$$\begin{aligned} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Pupille} \leftrightarrow t(x,y) \leftrightarrow \hat{T}(f_x, f_y) \\ \text{Complément} \leftrightarrow 1 - t(x,y) \leftrightarrow \delta(f_x, f_y) - \hat{T}(f_x, f_y) \end{array} \right\} \text{ m. figure pour un fil ou une fente.} \end{aligned}$$

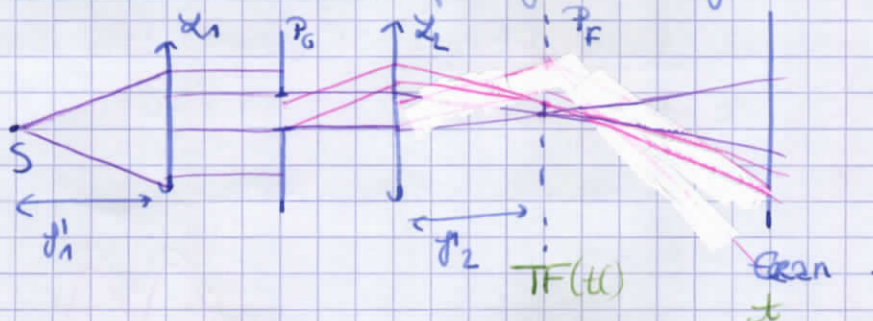
observer exp. les propriétés.

III - Applications

1) Filtrage optique : expérience d'Abbe. (1872)

• en introduisant un masque de le plan de Fourier on peut occulter certaines fréquences spatiales et modifier l'aspect de l'image : filtrage spatial.

• Plan de Fourier: plan focal image de la lentille L_2 .



↳ on peut appliquer HF aux $\neq$ pts sources P'' de P_F .
Alors $\underline{u}(x) \propto \iint TF(u) \left(\frac{-x_F}{\lambda f_2}, \frac{-y_F}{\lambda f_2} \right) e^{i 2\pi \left(\frac{x_F x + y_F y}{\lambda D} \right)} dx_F dy_F$

sur l'écran on a le résultat de 2 TF donc l'amplitude en l'écran est proportionnelle à la transmittance de l'objet.
et on a accès au plan de Fourier

• Si on masque les bords : filtre passe-bas : couper les hautes fréquences spatiales, supprime les détails fins de l'image.
débrassage des photos.

↳ exp.

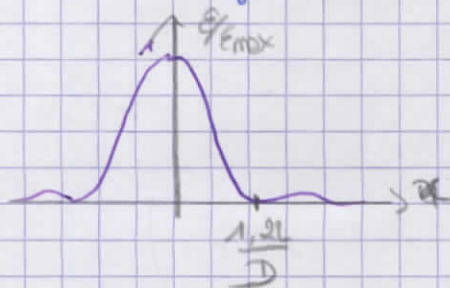
• si on occulte partie de l'axe optique : filtre passe-haut : sténoscopie
on voit bien les détails sur fond noir (coupe le fond uniforme)

2) Critère de Rayleigh: Limite de résolution

- image d'un pt $\rightarrow$ tâche à cause de la diffraction.

$\hookrightarrow$ on ne peut pas séparer 2 pts si leur tâche de diffraction se recouvrent.

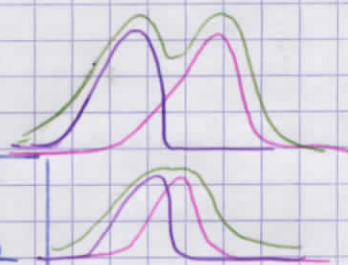
- figure de diffraction d'un trou: $(\phi=0)$ $E(\alpha) = E_0 \left(\frac{2 J_1(\alpha x)}{\pi x} \right)^2$
avec $x = \frac{d \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\lambda d'}$ et J_1 : fonction de Bessel.



$\rightarrow$ tâche d'Airy: 1^{er} disque lumineux
de rayon $1.22 \frac{\lambda d'}{D}$ $= 1.22 \frac{\lambda}{D}$
 d' : distance image-lentille.

- 2 pts $\rightarrow$ 2 tâches d'Airy méchantes

Critère de Rayleigh: On distingue 2 figures de diffraction lorsque le max principal de chacune des figures se situe à l'ext. de la tâche centrale de l'autre figure.



- Limite: $\alpha_{\min} = 1.22 \frac{\lambda d'}{D}$

$$\alpha_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$$(S_1 S_2 = S_1' S_2' \cdot \frac{d}{d'})$$

Conclusion

- Diffraction: phénomène rapidement observé, interprété plus tardivement comme des interférences grâce au principe d'H.F.
- Dans des condit° de Fraunhofer, ie $d \rightarrow \infty$, l'amplitude diffractée correspond à la TF de l'objet $\rightarrow$ propriétés de la figure = m. que la TF.
 $\rightarrow$ accès aux fréquences spatiales: Filtrage.
- Couverture: Diffraction de Fresnel, diffraction par des structures périodiques $\rightarrow$ structure de l'objet, spectroscopie (angle de diffraction dépend λ).