LP 36 – Diffraction par des structures périodiques

28 novembre 2017

Guillaume Jung & Bastien Gili-Tos

Niveau : L3

Commentaires du jury

2017 : Il faut traiter la diffraction par des structures périodiques et pas se limiter aux interférences à N ondes
2015 : Il est important de bien mettre en évidence les différentes longueurs caractéristiques en jeu.
2013, 2014, 2015 : Cette leçon donne souvent l'occasion de présenter les travaux de Bragg ; malheureusement, les ordres de grandeur dans différents domaines ne sont pas toujours maîtrisés.
2009, 2010 : La notion de facteur de forme peut être introduite sur un exemple simple. L'influence du nombre d'éléments diffractants doit être discutée.
2004 : Il faut veiller au bon équilibre de l'exposé : il est inutile de faire l'étude de la diffraction de Fraunhofer qui doit être supposée connue et il est souhaitable de consacrer plus de cinq minutes à l'étude de la diffraction des rayons X par les cristaux par exemple.

Bibliographie

- ✍ *Physique expérimentale aux concours de l'enseignement*, **Bellier** ⟶ Bien pour la manip sur le microscope (chap VI.2, p. 131)
- ✍ *Expériences de Physique au CAPES*, **Duffait** ⟶ Bien pour les deux systèmes (chap XIX, p. 184)
- ✍ *Optique*, **Houard** ⟶ La bible en optique, à lire (chap VII, p. 153)
- ✍ *Optique expérimentale*, **Sextant** ⟶ Compléments (tout est intéressant dedans...)

Prérequis

- ➢ Interférences à 2 ondes
- ➢ Diffraction de Fraunhofer
- ➢ Notions de cristallographie

Expériences

- Mesure du grossissement de la lunette astronomique
- Diaphragmes de champ et d'ouverture - Verre de champ (qualitative)
- Mesure de la puissance du microscope
- Limite de résolution en diffraction (qualitative)

Table des matières

Introduction

Cette leçon est la suite des deux leçons précédentes sur la diffraction de Fraunhofer et les interférences à deux ondes.

Mise en évidence du phénomène avec un DVD

Un DVD Friends — 42 secondes

Montrer un DVD au public. On voit dessus une irisation de la lumière ambiante. Le DVD est gravé, c'est à dire qu'il est composé de nombreux sillons en spirale de l'ordre du demi micron. La lumière est diffractée par ces sillons et l'ensemble de ces sillons constitue un réseau de diffraction.

La diffraction par une structure périodique permet donc d'obtenir le spectre de la lumière incidente. On peut alors en tirer deux applications.

La première, appelée spectroscopie, étudie le spectre obtenu en connaissant très bien l'objet diffractant et permet de remonter aux propriétés de la source ; c'est la première application vue dans cette leçon. La deuxième prend le phénomène dans l'autre sens : on connaît parfaitement la lumière incidente mais pas l'objet diffractant. L'étude de la figure de diffraction nous donnera alors des informations sur cet objet diffractant. Si l'objet en question est un cristal, on est dans la cristallographie ; c'est la deuxième application vue dans cette leçon.

Tout d'abord, étudions le cas plus simple : le réseau plan unidimensionnel afin de bien comprendre la physique du phénomène.

1 Réseaux plan unidimensionnels

1.1 Généralités

Un réseau plan unidimensionnel est un objet diffractant dont la transmittance $\underline{t}$ est une fonction périodique. Typiquement : un réseau de fentes.

- L : longueur éclairée du réseau
- N : nombre de fentes éclairées
- d : pas du réseau
- $n = \frac{1}{d}$: nombre de traits par mm.

Ordres de grandeurs :

- $L \simeq$ cm
- $n \simeq 50 \rightarrow 600$ traits/mm
- $d \simeq 1 \rightarrow 10\,\mu$m

On distingue plusieurs types de réseaux : les réseaux par transmission ou réflexion ainsi que les réseaux de phase et/ou d'amplitude. Ici nous nous intéresserons aux réseaux d'amplitude par transmission. Les réseaux sont souvent fabriqués en verre, sur lesquels on a "collé" un métal que nous avons rayé périodiquement avec une pointe en diamant.

1.2 Diffraction

schéma réseau

1.2.1 Formule des réseaux

Le calcul de la différence de marche δ entre deux faisceaux consécutifs donne directement, dans le cas d'interférences constructives, la **formule des réseaux** :

$$\boxed{\delta = d(sin\theta - sin\theta_0) = p\lambda}$$

Avec θ_0 et θ les angles respectivement d'incidence et réfracté et $p \in \mathbb{Z}$ l'ordre d'interférence.

Vectoriellement, cette relation s'écrit :

$$\vec{d}(\vec{k}-\vec{k_0}) = 2\pi p$$

On peut également l'interpréter graphiquement :

L'interprétation graphique met bien en évidence la limitation des ordres possibles. En effet, pour une incidence normale ($sin_0 = 0$) on obtient $sin\theta = \frac{p\lambda}{d}$. Sinus étant comprise entre -1 et 1, on a la limitation suivante : $|p| \leq \frac{1}{\lambda n}$.

En ordre de grandeur, avec $\lambda = 500.10^{-9}\, m$ (le milieu du spectre visible) et $n = 500\, traits/mm$, on obtient $\boxed{|p| \leq 4}$

1.2.2 Intensité diffractée

Rappelons le calcul de l'amplitude $\underline{\Psi}$ de l'onde diffractée dans la direction θ pour une onde incidente d'angle θ_0 dans le cas d'une fente simple. Le principe d'Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer donne :

$$\underline{\Psi} = \underline{K} \int \underline{t}(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

Avec ici : $u = \frac{sin\theta - sin\theta_0}{\lambda}$ et $\underline{t}(x)$ la transmittance d'une fente (0 à l'extérieur et 1 sur la fente).

Dans le cas du réseau, la transmittance est :

$$\underline{T}(x) = \sum_{m=0}^{N-1} \underline{t}(x - md)$$

Soit l'amplitude de l'onde diffractée pour le réseau :

$$\underline{\Psi} = \underline{K} \sum_{m=0}^{N-1} \int \underline{t}(x - md) e^{-2i\pi ux} dx$$

Le changement de variable $X = x - md$ donne :

$$\underline{\Psi} = \underline{K} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{-2i\pi umd} \right)}_{S(u)} \cdot \underbrace{\int \underline{t}(X) e^{-2i\pi uX} dX}_{f(u)} \tag{1}$$

$f(u)$ vient de la diffraction d'une fente unique, c'est le facteur de forme. $S(u)$ traduit les interférences à N ondes, c'est le facteur de structure.

Enfin, après calcul, on obtient l'intensité diffractée dans la direction "u" :

$$I = \underline{\Psi} \cdot \underline{\Psi}^{\star} = I_0 \cdot |\underline{f}(u)|^2 \cdot \underbrace{\left[\frac{sin(N\pi ud)}{sin(\pi ud)} \right]^2}_{R(u)} \tag{2}$$

Etudions un peu le facteur de structure $R(u)$:

- $R(u) = 0$ pour $u = \frac{m}{Nd}$ avec $m \in \mathbb{Z}$
- $R(u)$ max pour $u = \frac{p}{d}$ avec $p \in \mathbb{Z}$
- $R(u = 0) = N^2$

Diffraction d'une lampe Hg par un réseau de traits

✍ Notre tête (et un tout petit peu le Sextant) ⏲ 1 minute

Faire l'image d'une fente (assez fine mais pas trop pour avoir de la lumière) sur le mur ou sur un écran par une lentille convergente de focale adaptée : pas besoin d'une image de 3 m de haut, mais pas de 2 cm non plus. Placer un filtre interférentiel sur le faisceau de la lampe à Hg afin de ne sélectionner qu'une seule raie. Nous avons choisi la raie verte car c'est ce que nous préférions mais vous pouvez choisir le doublet jaune ou la raie bleu (mais moins lumineuse).

Montrer la diffraction (en monochromatique grâce au filtre) et montrer les ordres 0, +1, -1 etc...

Enlever le filtre et montrer que le phénomène est dispersif : les raies de la lampe à vapeur de mercure ne sont pas diffractées avec le même angle. Si vous voulez voir les deux raies de Hg dans l'UV, placer une feuille blanche sur l'écran/mur.

Noter que le rouge est plus dispersé que le bleu, c'est le contraire du prisme.

2 Spectromètre à réseau

Maintenant que nous avons vu la théorie des interférences par des réseaux, passons à une application directe.

2.1 Dispersion

Schéma du spectromètre
On définit le pouvoir de dispersion D :

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{p}{dcos\theta_p} \tag{3}$$

On remarque que D augmente si, soit p augmente ou si d diminue, donc si n augmente.

Jusqu'ici, pas de réel intérêt d'utiliser un réseau par rapport à un prisme, sauf pour inverser le sens de déviation... Mais bon, ce n'est pas primordial en soi. L'intérêt vient pour les petits angles de diffraction.

En effet, si $\theta_m \simeq 0$ (m petit), alors la relation devient :

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} \simeq \frac{p}{d} \tag{4}$$

On a donc une **évolution linéaire** de l'angle de déviation avec la longueur d'onde ! (Contrairement au prisme.)

2.2 Pouvoir de résolution

On suppose ici une fente source infiniment fine, ainsi la seule limite de résolution est due à la diffraction.

Le critère de Rayleigh stipule qu'on ne peut séparer deux tâches de diffraction que si le maximum de l'une correspond au plus proche au minimum de l'autre. A la limite de résolution, on a donc le pouvoir de résolution PR :

$$PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = pN = pLn \tag{5}$$

En ordre de grandeur, on peut prendre $n = 500\,traits/mm$, $L = 20\,mm$ et $p = 1$, on obtient un pouvoir de résolution : $PR = 10^4$

Ainsi, pour $\lambda = 500\,nm$, on a $\boxed{\Delta\lambda = 2,5.10^{-2}\,nm}$

C'est cool, mais en fait non. *(J'avais envie de laisser cette phrase)*

En réalité, cela correspond au pouvoir de résolution *intrinsèque* auquel nous n'avons pas accès. Ce calcul est mené par une fente infiniment fine, donc pas de lumière. En réalité, la fente a une certaine largeur et le pouvoir de résolution diminue. Cette méthode reste néanmoins plus résolvante qu'un prisme : le pouvoir de résolution du prisme est de l'ordre de 10^3.

Transition de la mort qui tue : mais quelles sont donc les limitations auxquelles nous devons faire face en pratique ?!?

2.3 Problèmes à résoudre

• En pratique, si on monte trop haut dans les ordres d'interférence, on peut observer un recouvrement des spectres des ordres p et $p+1$.

Cela se traduit par $sin(\theta_{p+1}^{bleu}) \leq sin(\theta_p^{rouge})$, soit : $\frac{\lambda_B}{\lambda_R - \lambda_B} \leq p$

En pratique, cela arrive dès l'ordre 2 ou 3, voire même parfois l'ordre 1 ! (Si la source émet à 400 nm et à 800 nm par exemple.)

• Autre souci : la majeure partie de la luminosité est contenue dans l'ordre 0, qui est le seul ordre réellement inintéressant ici... On manque alors cruellement de lumière dans les ordres d'intérêt.

Pour remédier à cela, on utilise des réseaux blazés et on travaille plutôt avec par réflexion avec des miroirs car les lentilles apportent leur lot d'aberrations.

Transition encore plus de la MorKi'Tu : passons maintenant à une deuxième application.

3 Diffraction des rayons X par des structures cristallines

En ordre de grandeur, la distance inter-atomique dans un cristal est de l'ordre de 1 Å. On a donc diffraction pour $\lambda \leq 1$Å, d'où l'utilisation des rayons X.

On peut également utiliser la dualité onde-particule en envoyant un faisceau d'électrons accélérés par une tension U, leur longueur d'onde sera alors $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$. On peut également utiliser des neutrons.

3.1 Rappels

Quelques rappels de cristallographie.

On définit le **réseau de Bravais** $\vec{R}$ tels que $\vec{R} = n_1\vec{a_1} + n_2\vec{a_2} + n_3\vec{a_3}$. On a ainsi un recouvrement de tout l'espace si $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on appelle ces réseaux, les réseaux directs (RD).

On définit également le **réseau réciproque** (RR) $\vec{K}$ tels que $e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} = 1$. Soit $\vec{K} = m_1\vec{k_1} + m_2\vec{k_2} + m_3\vec{k_3}$.

Allez, je vous donne le lien entre les deux : $\vec{k_1} = 2\pi\frac{\vec{a_1}\times\vec{a_2}}{\vec{a_1}\cdot(\vec{a_2}\times\vec{a_3})}$ et $\vec{a_i}\cdot\vec{k_j} = 2\pi\delta_{ij}$

On définit enfin les **plans réticulaires** comme toute famille de plans parallèles équidistants qui contiennent tous les points du réseau.

$\vec{K} \in (RR)$ définit la normale à ces plans réticulaires. Si $\vec{K}$ est de norme minimale, alors $\|\vec{K}\| = \frac{2\pi}{d}$ et : $\vec{K} = h\vec{k_1} + k\vec{k_2} + l\vec{k_3}$.

(h, k, l) sont appelés les indices de Miller.

3.2 Formulations de Bragg et de von Laue

Bragg (Prix Nobel de Physique en 1915) suppose en 1913 que la lumière incidente va se réfléchir sur les plans réticulaires. La différence de marche δ entre deux faisceaux issus de la réflexion sur deux plans réticulaires consécutifs est dans le cas d'interférences constructives :

$$\boxed{\delta = 2dsin\theta = p\lambda}$$

C'est la différence de marche pour un réseau à réflexion.

Von Laue (191X) prix Nobel en 1914 ne fait pas d'hypothèse sur les plans réticulaires et stipule que deux atomes voisins vont réfléchir l'onde incidente et la condition vectorielle pour avoir des interférences constructives est alors :

$$\vec{d}\cdot(\vec{k} - \vec{k_0}) = \delta\frac{2\pi}{\lambda} \tag{6}$$

Or $\vec{d} \in (RD)$, on peut étendre à $\vec{R}$ et on obtient $\vec{R}\cdot(\vec{k} - \vec{k_0}) = p2\pi$. C'est la même condition que le RR, d'où $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k_0} \in (RR)$.

On peut interpréter ce résultat graphiquement avec la sphère d'Ewald.

Il existe trois méthodes afin d'obtenir plusieurs pics de diffraction.

La première est la méthode de Laue : on fait varier λ ; on augmente le rayon de la sphère et on intercepte plusieurs points.

La deuxième est la méthode du cristal tournant : on fait tourner le cristal selon un axe ; cela revient à faire tourner le (RR) selon un axe passant par O, on obtient donc plusieurs pics.

La troisième est la méthode des poudres (Debye - Scherrer) : statistiquement, toutes les orientations sont représentées (grains d'un diamètres de quelques microns) ; cela revient à $\vec{K}$ qui parcourt une sphère de centre O et de rayon $\vec{K}$, l'intersection de cette sphère avec la sphère d'Ewald donne toutes les directions diffractées. On obtient alors un cône d'angle 4θ

3.3 Méthode de Debye-Scherrer

Mesure du paramètre de maille d par la méthode de Debye-Scherrer

✍ ⏲ 5-8 minutes selon le temps

On utilise la manip toute prête dans la collection (P96.1 et P93.6). Pas de rayons X (dangereux) mais un faisceau d'électrons. On a $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$. On alimente la manip (attention au branchement un peu chelou) et on mesure l'angle de diffraction 4θ. On peut ainsi remonter au paramètre de maille par la relation $d = \frac{2Lh}{D\sqrt{2meU}}$ avec L la longueur de la cuve et D son diamètre. La valeur tabulée pour du graphite est $d = 213\,\mu m$.

Conclusion

Dans cette leçon, on a mis en évidence les principales propriétés des structures périodiques vis à vis de la diffraction (forme intensité diffractée et influence des paramètres du réseau plan sur celle-ci). On a vu deux applications assez fondamentales : la spectroscopie et la cristallographie.

Ouverture : spectroscopie en astrophysique et contrôle de la directivité d'un faisceau d'ultrasons pour réaliser des échographies.

Remarques et questions