

ACADÉMIE DE _____

A remplir par les candidats avec le plus grand soin
(ni signature, ni marque)

EXAMEN : _____

SESSION : _____

COMPOSITION D _____

Note sur 20	Coefficient	Note à reporter au P.V.

Etablissement d'origine : _____
 Centre de : _____
 Nom : _____
 Prénom : _____
 N° : _____

Appréciations du correcteur

W

$$\beta : \frac{A}{2} X \rightarrow \frac{A}{2+1} Y + \frac{0}{1} \beta^{-} + \frac{0}{2} \nu^{-}$$

anti-neutrino

LP 41: Effet Tunnel

Christophe Madec et Christophe Madec

Niveaux L3 (+++) Prerequis : • Notion des bandes d'énergie
• Eq de Schrödinger • Radioactivité α
• Transistors

I - Présentation de l'Effet tunnel :

- 1) ~~Phénomène~~ Barrière de potentiel, équation de Schrödinger
- 2) Coefficient de transmission, effet Tunnel
- 3) Phénomène ondulatoire ou quantique?

II - Effet Tunnel et théorie de la radioactivité α :

4) Une application : Microscope à effet Tunnel.

- 1) Rappels, résultats expérimentaux
- 2) Nécessité d'un effet Tunnel, modèle de Gamow
- 3) Temps de demi-vie, comparaison théorie - expérience.
- 4) Limites du modèle, discussion

III - Application pratique : Mémoire Flash et de USB :

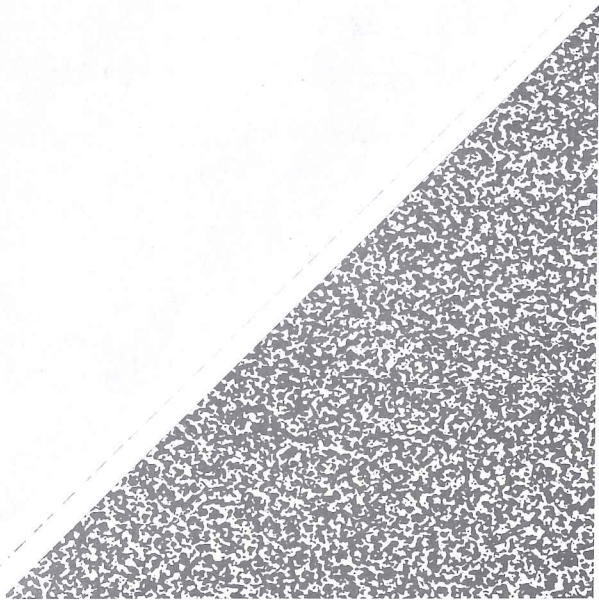
- 1) Transistor à effet de champ
- 2) Effet de mémoire : lecture
- 3) Effet de mémoire : stockage
- 4) Résumé

Commentaires du jury : Voir book

Bibliographie : • BUP 734 $\rightarrow$ effet Gamow • BUP 699 - Microscope
• PQ Bardault + Le Bellac $\rightarrow$ Effet Tunnel
• VALE φ subatomique $\rightarrow$ Commentaires effet Gamow

source : livre trouvé
sur Internet, je
le retranscris
(j'espère)

+ Rathieu - Physique
des semi-conducteurs et des
composants électroniques



On est prié de ne rien écrire au-dessus de cette ligne

Introduction: Les phénomènes de type corpusculaire (à une échelle macroscopique voire microscopique) et ondulatoires sont bien décrits par la mécanique classique. Cependant, l'avènement de la mécanique quantique a mis en avant une dualité entre onde et ~~corpuscule~~. Les résultats de la physique classique ne sont plus applicables et il a fallu repenser toute la physique de cet infiniment petit. L'effet Tunnel illustre bien la ~~différence~~ de repenser la physique:

Exemple: Un skieur ne pourra franchir une colline ^(ou une skieuse) que s'il a pris assez d'élan, c'est-à-dire qu'il ne pourra traverser la barrière de potentiel de pesanteur que constitua la colline que si son énergie est supérieure à la hauteur de cette barrière. En mécanique quantique, ~~une particule~~ nous allons montrer qu'une particule, de part son caractère ondulatoire, a une probabilité non nulle de traverser une barrière de potentiel classiquement impenétrable, contrairement au skieur qui ne pourra jamais dépasser la colline s'il n'a pas l'énergie nécessaire. Donnons alors une définition de l'effet Tunnel:

Effet Tunnel: Propriété que possède un objet de franchir une barrière de potentiel même si son énergie est ~~inférieure~~ à l'énergie minimale requise pour effectuer la franchir.

Même si son énergie est inférieure au max de potentiel

Ne lui permet pas classiquement

~~classique~~

ne lui permet pas classiquement de la franchir.

⚠ Il faut insister qu'il n'y a pas, a priori, de nécessité quantique à l'effet Tunnel, nous allons voir que ce phénomène est purement ondulatoire, mais que la mécanique quantique permet des applications concrètes de cet effet.

Le but de cette leçon est le suivant: Comprendre ce phénomène, voir comment le franchissement est possible, en déduire alors les propriétés de l'effet Tunnel pour comprendre les différentes applications de cet effet à travers le modèle théorique de la radioactivité α , et dans un contexte plus actuel, le fonctionnement de la mémoire Flash.

I - Présentation de l'effet Tunnel:

1) Barrière de potentiel, équation de Schrödinger:

On va reprendre la situation de la skieuse dans un modèle simplifié qui est le suivant (géométrie 1D)

Soit une particule de masse m (un électron par exemple) et d'énergie E qui arrive sur une barrière définie par le graphe ci-contre: On considère que la particule possède une énergie $E < V_0$.

Dans ce qui a vu que la description de l'état d'une particule de masse m dans l'espace à l'instant t se fait au moyen de sa fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ (ici $\Psi(x, t)$).

(Principe I de la MQ), dont l'évolution est régie par l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t)$$

à multiplier par Ψ^ pour obtenir l'équation de continuité*

Le potentiel étant indépendant du temps, on cherche des solutions stationnaires de la forme $\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ de l'équation aux valeurs propres

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi$$

↳ En effet, l'évolution de toute fonction d'onde (pour un système isolé) est immédiatement connue si l'on connaît les solutions stationnaires de l'éq de Schrödinger (Vu en MQ plus tôt dans l'année).

Enfin, on cherchera des solutions en ondes planes (une onde plane représentera en flux ininterrompu de particules) qui, en formant des paquets d'onde, permettant de revenir à des considérations plus physiques (notamment la fct d'onde de toute particule).

C'est pour le problème est posé donc on sent l'ambiguïté :

zone (I) et (IV) : $\psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi'' + k^2 \psi = 0$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

zone (II) : $\psi''(x) + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \Rightarrow \psi'' - k'^2 \psi = 0$

($E < V_0$)

$$k' = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

onde incidente onde réfléchie

I $\psi(x) = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{-ikx}$

II $\psi(x) = B_1 e^{k'x} + B_2 e^{-k'x}$

→ Onde évanescente.

III $\psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$

onde transmise

Analogie: ψ des ondes

Bien sûr, il nous faut des conditions limites. La continuité de ψ nous donne déjà 2 conditions. Or: $\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = \frac{2mE}{\hbar^2} V \psi$
(On suppose V quelconque continue par morceaux)

On intègre entre $-\epsilon$ et ϵ :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi''(x) dx + \frac{2mE}{\hbar^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) V(x) dx$$

$$\downarrow$$

$$[\psi'(x)]_{-\epsilon}^{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \text{ si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ car } \psi \text{ continue} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx$$

$$\downarrow$$

$$= \psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \text{ si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ car } \psi \text{ continue}$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = \psi'(0^+) - \psi'(0^-) \text{ donc } \psi'(0^+) = \psi'(0^-)$$

Donc ψ est continue en 0 De même ψ' est continue en a

On a alors 4 conditions limites que l'on peut écrire. On va supposer que l'onde plane vient de $-\infty$, donc $C_2 = 0$ (présence en $+\infty$ nulle).

ACADÉMIE DE _____

A remplir par les candidats avec le plus grand soin
(ni signature, ni marque)

EXAMEN : _____

SESSION : _____

COMPOSITION D _____

Note sur 20	Coefficient	Note à reporter au P.V.

Établissement d'origine : _____
 Centre de : _____
 Nom : _____
 Prénom : _____
 N° : _____

Appréciations du correcteur

Relations de passage:

$$\begin{aligned}
 \underline{x=0:} \quad & \begin{cases} A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \\ ik(A_1 - A_2) = k'(B_1 - B_2) \end{cases} \quad \underline{x=a:} \quad \begin{cases} B_1 e^{k'a} + B_2 e^{-k'a} = C_1 e^{ika} \\ k'(B_1 e^{k'a} - B_2 e^{-k'a}) = ik C_1 e^{ika} \end{cases}
 \end{aligned}$$

4 conditions limites indépendantes, 5 inconnues, on va donc tout exprimer en fonction de A_1 .

2) Coefficient de transmission, effet Tunnel:

Après calcul, on trouve que $\frac{C_1}{A_1} = \frac{4ikk'e^{-ika}}{(k+ik')^2 e^{k'a} + (k'-ik)^2 e^{-k'a}}$

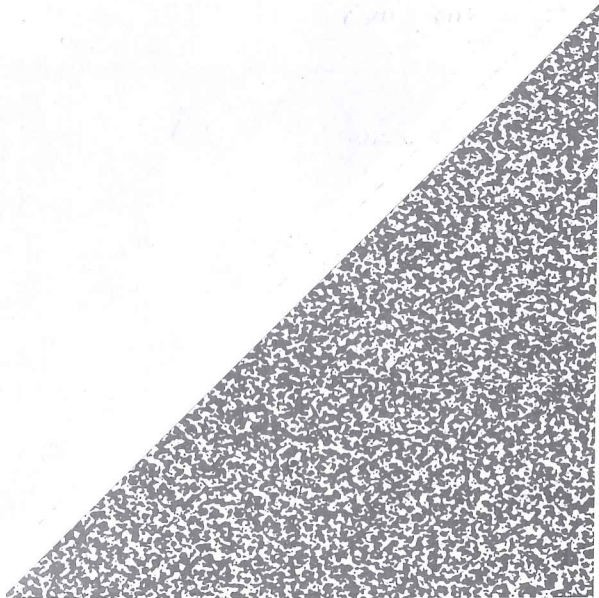
Faisons l'hypothèse que $k'a \gg 1$ (approximation de la barrière épaisse)

$$\Rightarrow \frac{C_1}{A_1} \approx \frac{4ikk'e^{-ika}}{(k+ik')^2} e^{-k'a}$$

On pose la probabilité de transmission $T = \left| \frac{C_1}{A_1} \right|^2 = \frac{16k^2 k'^2}{(k^2 + k'^2)^2} e^{-2k'a}$

Avec $k \text{ et } k' \rightarrow$ $T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2k'a}$

C_1 est l'amplitude de l'onde en sortie de la barrière, et on voit que $C_1 \neq 0$ (si $A_1 \neq 0$) donc la particule peut traverser la barrière de potentiel même si son énergie est inférieure à V_0 .

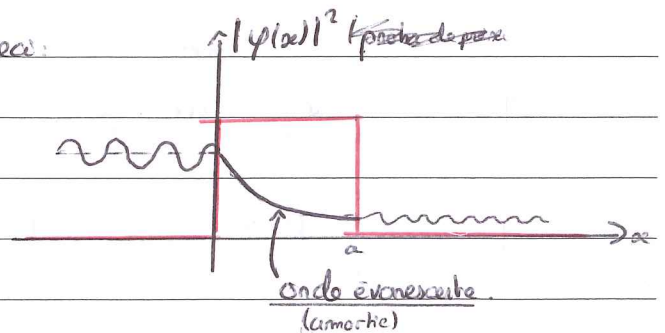


On est prié de ne rien écrire au-dessus de cette ligne

T représente alors la probabilité de transmission du travers de la barrière Tunnel. Quelques remarques:

- Limite classique $\hbar \rightarrow 0$ $T \rightarrow 0$ on retrouve bien notre exemple de départ.
- $V_0 \rightarrow +\infty$ $T \rightarrow 0$ $a \rightarrow +\infty$ $T \rightarrow 0$ ok c'est cohérent.

Graphiquement, il se passe ceci:



~~L'effet Tunnel est en~~

Applications numériques: $E \sim 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$V_0 \sim 5 \text{ eV}$

$1/\kappa \sim 10^{-10} \text{ m}$

donc $T \sim 0,7$ si $a \sim 0,1 \text{ nm}$.

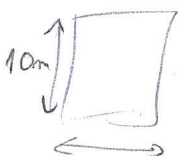
10^{37} obscure
qui passe

Skieur: $m = 80 \text{ kg}$ $V_0 = mgz = 80 \times 9,8 \times 10 = 6000 \text{ J}$

$E \sim 1000 \text{ J}$

$1/\kappa \sim 10^{-37} \text{ m}$ $T = 0$

Il faudrait que l'épaisseur de la colline soit de 10^{-37} m à la calotte
pour passer par effet Tunnel (ben bref)



Remarque sur la généralisation de la barrière Tunnel:
 Normalement si $\Delta x \rightarrow 0$, l'approximation de la barrière épaisse n'est plus valable. En fait, un traitement semi-classique (Le Bellac p42 - 2^{ème} édition) permet de justifier la forme de $T = e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} k(x) dx}$ sans approximation!

Généralisation à une barrière de forme quelconque // (Pas forcément admette ne s'agit pas de temps)

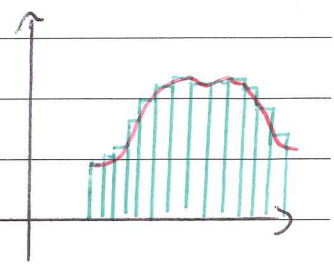
$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2k'a} \quad \text{on suppose } k'a \gg 1 \text{ toujours valide}$$

$$\ln T = -2k'a + \ln \left(\frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \right) \approx -2k'a$$

On calcule à posteriori?

Prendre une barrière qui se ramène par morceaux de forme quelconque et découper la en tranches rectangulaires d'épaisseur Δx (suffisamment épaisses pour que l'approx précédente soit valable).

La proba pour que la particule soit en $x+dx$ = proba qu'elle soit en x X proba de transmission à travers la bande Δx



~~$P(x) = T(x)P(x)$~~

La transmission d'une barrière $[x_i, x_i + \Delta x]$ $T(x_i) \approx e^{-2k'(x_i)\Delta x}$

$$k(x_i) = \sqrt{\frac{2m(V(x_i) - E)}{\hbar^2}} \Rightarrow T = \prod T(x_i) \text{ (les probas se multiplient)}$$

$$\text{Donc } T \approx e^{-2\Delta x \sum_{i=1}^N k(x_i)}$$

une intégrale dans la limite continue soit $T \approx e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} k(x) dx}$

Ce résultat va nous servir par la suite.

3) Phénomène ondulatoire ou quantique?

Qu'advient-il de l'énergie de la particule en franchissant la barrière? Elle est inchangée! L'équation aux valeurs propres vérifiée par la particule entre la zone 1 et 3 est la même! Cela veut dire que le fait de traverser une barrière ne coûte pas d'énergie en soi. C'est un effet ondulatoire sur l'amplitude de probabilité. En fait "Le prix d'énergie" = le pays dans la proba de franchissement de la barrière (qui est en $\exp^{-\sqrt{E}}$). Cette différence avec la physique classique vient que l'on considère des corpuscules (car classique: il faut fournir de l'énergie pour franchir la barrière) alors qu'ici le phénomène est ondulatoire.

* On suppose que les multiples barrières tunnel ne provoquent pas de réflexions multiples entre 2 barrières adjacentes

Approche semi-classique p422 Le Bellac (Nouveau). On peut montrer.

PLUS CLAIR

La transmission ondulatoire (classique)

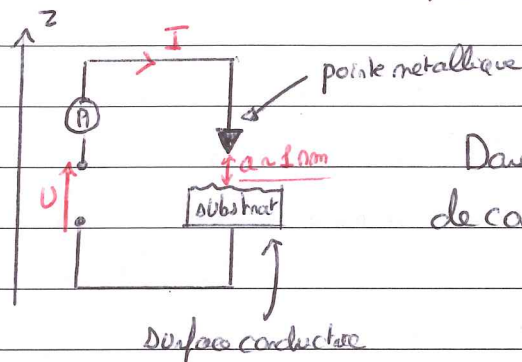
La pièce Q: Un système est censé par fort d'onde qui évolue ondulatoirement il y aura de la même façon transmission

réflexions totales
 probabilité?
 interprétation de
 l'onde:
 probabilité de passage
 de l'objet physique
 transmission

On peut se procurer "l'effet Tunnel" dès que des ondes
 évanescentes sont produites. D'ailleurs, le système d'équations
 nous montre bien que l'on a à faire avec un phénomène ondulatoire.
 Que vient faire la quantique alors? La dualité onde corpuscule
 permet en fait à des corps de traverser par leur caractère ondulatoire
 des barrières de potentiel. ça va être le cas pour la
radioactivité α

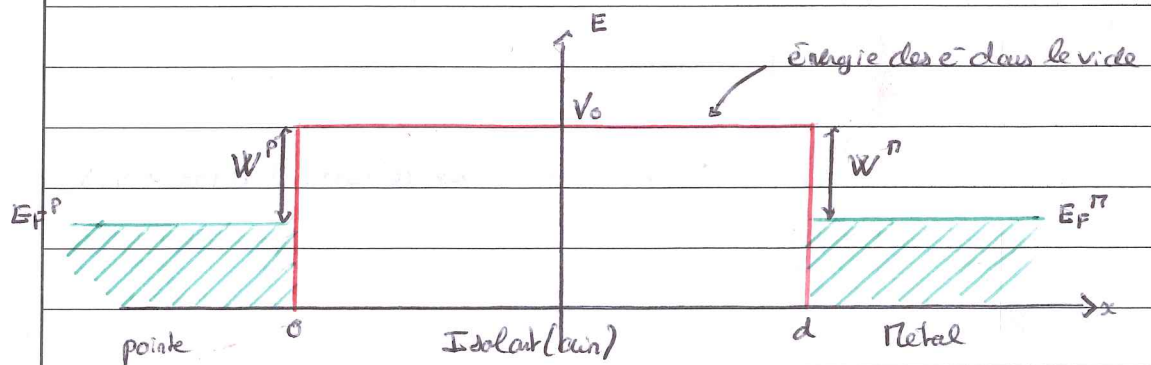
4) Une application: le microscope à effet Tunnel.

But: obtenir la topographie d'une surface conductrice.



Dans le métal, les e^- de la bande de conduction ont une énergie $< E_F$ à $T=0K$

Regardons du côté des bandes d'énergie ce qu'il se passe. A $T=0K$,
 les e^- de la bande de conduction ont une énergie $< E_F$ (l'énergie de Fermi).
 On note W la hauteur de la barrière de potentiel constituant l'énergie
 qu'il faut fournir pour extraire un e^- du métal (travail de sortie)



Pour simplifier l'étude, on suppose que pointe et métal ont
 même niveau de Fermi et que $W_{\text{pointe}} = W_{\text{métal}}$

Lorsque on applique une tension U entre la surface et la pointe,
 la barrière de potentiel est alors déformée:

ACADÉMIE DE _____

A remplir par les candidats avec le plus grand soin
(ni signature, ni marque)

EXAMEN : _____

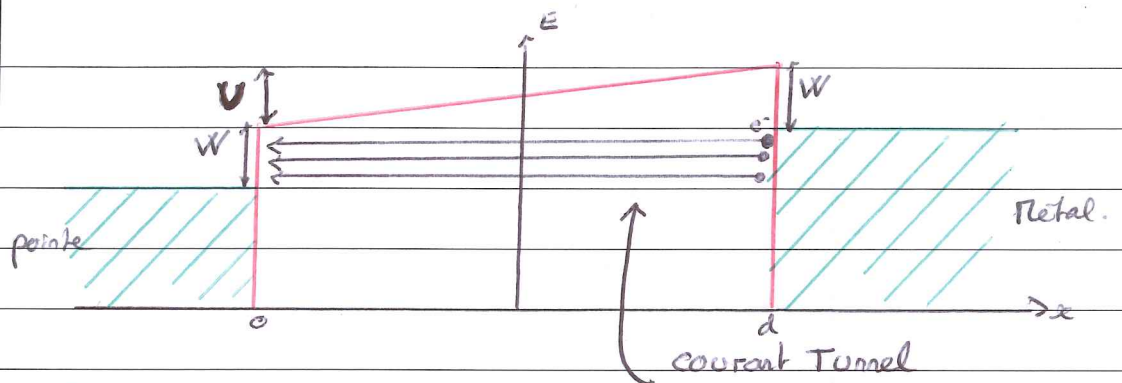
SESSION : _____

COMPOSITION D _____

Note sur 20	Coefficient	Note à reporter au P.V.

Établissement d'origine : _____
Centre de : _____
Nom : _____
Prénom : _____
N° : _____

Appréciations du correcteur



Il y a donc une proba de transmission des e^- du métal vers la pointe par effet Tunnel. On peut mesurer cette intensité et celle-ci est $\propto e^{-2k'd}$ (facteur de transmission) $\Rightarrow$ Mesure de d en recueillant cette intensité $\Rightarrow$ permet de topographier le métal.

• En pratique, un dispositif de rétroaction permet de faire un balayage à courant constant ($I = ck \Rightarrow$ la distance d varie lorsque l'on veut garder $I = ck$).

ORDRE: $U \sim 0,1V$; $V_0 \sim 5eV$ $E \sim 1eV$

Pour $2a \approx \lambda$ $\frac{1}{k'} \sim 10^{-10} m$ pour $1e^-$ $q = 1,602 \times 10^{-19} C$
 $\hbar = 1,054 \times 10^{-34} J.s$
 $m_e = 9,11 \times 10^{-31} kg$

$a = 0,1 nm$: $T \sim 10^{-5}$
 $a = 1 nm$: $T \sim 10^{-9}$

$I \sim nA$

Très faible V et dépend très fortement de la distance.

distance caractéristique d'atténuation $e^{-x/a}$ $\alpha = \frac{1}{a}$

ACADÉMIE DE _____

A remplir par les candidats avec le plus grand soin
(ni signature, ni marque)

EXAMEN : _____

SESSION : _____

COMPOSITION D _____

Note sur 20	Coefficient	Note à reporter au P.V.

Établissement d'origine : _____
Centre de : _____
Nom : _____
Prénom : _____
N° : _____

Appréciations du correcteur

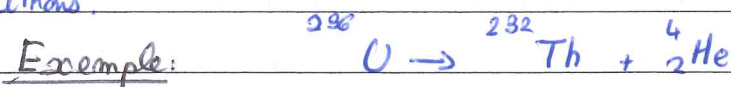
Leçon effet Tunnel

II - Thème de la radioactivité α :

1) Rappels et résultats expérimentaux :

Radioactivité α : Émission, par un noyau instable, d'une particule α (en réalité un noyau d'Helium ${}^4_2\text{He}$).

La radioactivité α permet aux noyaux lourds, contenant un nombre important de protons, de diminuer la répulsion électrostatique des protons par émission d'une particule α , emportant 2 protons et 2 neutrons.



Résultats expérimentaux : $\rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

(décroissance des noyaux désintégré). Mesure de l'énergie cinétique de la particule α émise (située entre 4 et 10 MeV) L'ordre E.

Loi empirique établie : $\ln(T_{1/2}) = A + B/\sqrt{E}$

Questions : que se passe-t-il au niveau microscopique?

Pour
Noyau
d'Uranium

On est prié de ne rien écrire au-dessus de cette ligne

2) Modèle théorique de Gamow, Gurney et Condon, révisé d'un effet Tunnel:

1928 La particule α est traitée comme une particule quantique dont le mvmt est unidimensionnel (x : variable de position).

On utilise un modèle à 2 corps, c-à-d que l'on suppose que la particule α préexiste dans le noyau initial à l'intérieur duquel elle oscille (L'origine d'oscillation? T'après. Cette particule est soumise à un potentiel de la forme suivante:

Après:

• $|x| \leq R_0$: La particule est soumise à l'interaction forte qui assure la cohésion du noyau. Cette interaction est de très courte portée et se limite au noyau. Le potentiel est constant dans cette zone, on le représente par un puits de potentiel où la particule α est dans un état lié. Indpt de la particule la $E = -V_0$

particule α ; l'interaction est à peu près la même partout dans le noyau

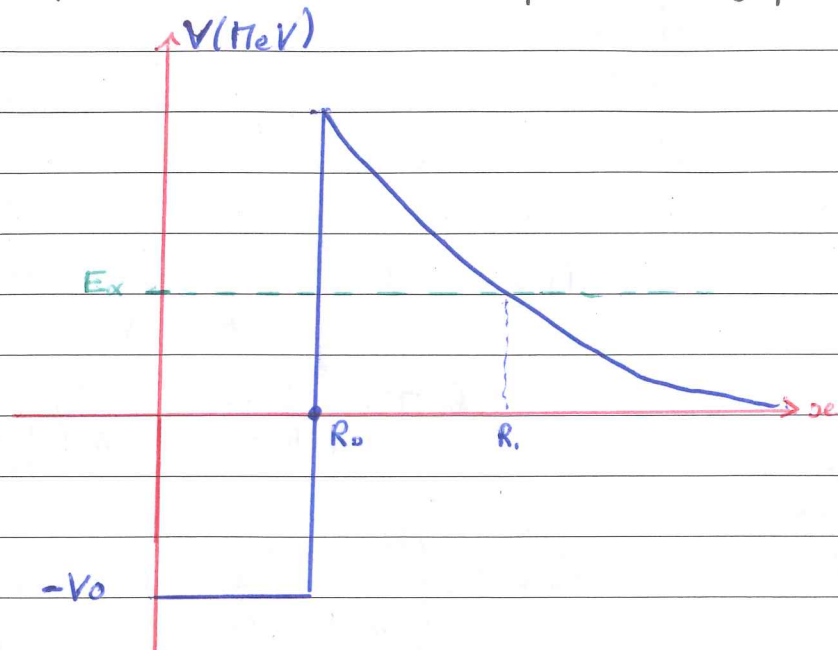
• $|x| \geq R_0$ l'interaction forte étant à très courte portée, elle devient négligeable en dehors du noyau. La particule α est alors soumise à la répulsion des $Z-2 = Z'$ protons restants dans le noyau. -> potentiel Coulombien $E = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

Remarque: Les noyaux lourds sont spontanément émetteurs α .

En fait, la masse du noyau $\gg$ masse d'une particule α et le noyau reste

* R_0 : rayon du noyau atomique dans lequel la particule α est présente. Si $z = X$,
 $R_{\alpha} = r_0 A^{1/3}$
 $r_0 = 1,2 \text{ fm}$.

donc au repos lors d'une émission $\rightarrow$ le potentiel change par la "forme"



Question: la particule α peut-elle s'échapper du noyau?

Expérimentalement, pour le ^{226}Ra (Radium) $\rightarrow$ ^{222}Rn (Radon)

L'énergie de la particule α émise est de $4,78 \text{ MeV}$.

Considérons le processus inverse, c-à-d l'absorption par un noyau de ^{222}Rn , d'un noyau de ^4He (rapprochement depuis l' ∞ des 2 noyaux chargés positivement) $\rightarrow$ de l' ∞ à $R = r_{\text{He}} + r_{\text{Rn}} \approx 7,76 \text{ fm}$ (Après, la force nucléaire forte assure la cohésion)

La barrière coulombienne vaut $E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{R}$

$$q = 86 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad q' = 2 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

On trouve $E_B \approx 31,9 \text{ MeV}$

Donc a priori une particule α expulsée d'un noyau doit avoir une énergie de 32 MeV et non $4,78 \text{ MeV}$... Effet Tunnel!!!

C'est parti pour le calcul: il faut d'abord calculer le coefficient de transmission (avec la formule précédente):

$$\ln T = -2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m(V(x)-E)}}{\hbar} dx$$

• $m = m_\alpha =$ masse de la particule α
• ici $E = E_\alpha$ énergie de la particule α .

Les bornes: conformément au graphe, l'évolution se fait entre R_0 et la sortie en R_1 . On a intersection de E_α en R_1 donc:

$$\underline{\underline{V(R_1) = E_\alpha = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R_1}}}$$

↓
Énergie disponible = énergie de la particule α en sortie du noyau (énergie de répulsion coulombienne)

Remarque: Comme dit précédemment, l'effet tunnel est ONDULATOIRE: le fait de traverser une barrière d'énergie (ou non) ne coûte pas d'énergie pour franchir la barrière donc l'énergie de la particule a resté ce qu'elle est.

$$\text{Donc: } \ln T = -\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 R_1}} dr$$

$$\ln T = \sqrt{\frac{Z'e^2}{\pi\epsilon_0}} \left(-\frac{2}{\hbar}\right) \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}} dr$$

* Cette partie ne sera pas faite ou le son, enfin j'en pense.

* Soit $I = \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}} dr$ chgt de variable: $r = R_1 \cos^2 \theta$
 $dr = -2R_1 \sin \theta \cos \theta d\theta$

On pose θ_0 tel que $R_0 = R_1 \cos^2 \theta_0$

$$\text{Donc } I = - \int_{\theta_0}^0 2R_1 \sin \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1}{R_1 \cos^2 \theta} - \frac{1}{R_1}} d\theta \quad \begin{matrix} r \geq 0 \\ R_1 \geq 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R_1}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \frac{|\tan \theta|}{\sqrt{R_1}} \quad \uparrow$$

$$\text{Donc } I = - \int_{\theta_0}^0 2\sqrt{R_1} \sin \theta \cos \theta \tan \theta d\theta = \int_{\theta_0}^0 2\sqrt{R_1} \sin^2 \theta d\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \Rightarrow I = \sqrt{R_1} \left\{ \theta_0 - \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right\}$$

On suppose $R_0 \ll R_1$ (barrière épaisse en fait) $R_0 = R_1 \cos^2 \theta_0$

$$\Rightarrow \theta_0 = \arccos \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \text{ si } R_0 \ll R_1$$

$$\text{et } \frac{\sin 2\theta_0}{2} = \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \sqrt{1 - \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2} \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \approx \sqrt{\frac{R_0}{R_1}}$$

$$\text{Donc } I = \sqrt{R_1} \left\{ \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} - \sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \right\}$$

$$\Rightarrow \ln T = -\frac{2e}{\hbar} \sqrt{\frac{Z'm}{\pi\epsilon_0}} \sqrt{R_1} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \right\} \text{ or } \sqrt{E} = \sqrt{\frac{Z'e^2}{2\pi\epsilon_0 R_1}}$$

$$\ln T = -\frac{Z'e^2}{\hbar\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2m}{E}} \left\{ \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \right\}$$

(c'est bientôt fini...)