

LP 41 : Effet tunnel

(1)

Niveau : L3

- Prérequis :
- Notions sur les bandes d'énergie
 - Équation de Schrödinger
 - Radioactivité α
 - Jonction p-n

I Présentation de l'effet tunnel

1. Barrière de potentiel, équation de Schrödinger
2. Coefficient de transmission, effet tunnel
3. Phénomène ondulatoire ou quantique ?
4. Applications : microscope à effet tunnel

II Théorie de la radioactivité α

1. Rappels : résultats expérimentaux
2. Nécessité d'un effet tunnel, modèle de Gamow
3. Temps de demi-vie, comparaison théorie-expérience
4. ~~Limites du modèle, discussion~~

I Applications pratiques : mémoire flash et clé USB

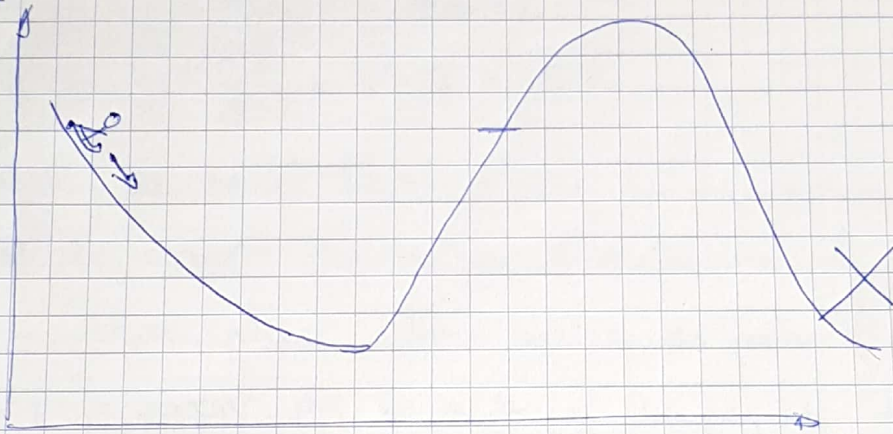
1. Transistor à effet de champ et effet mémoire
2. Effet de mémoire : lecture
3. Effet de mémoire : stockage
4. Résumé

Echelle macro : phénomène corpusculaire l'ondulatoire bien décrit par mécanique classique.

Méca quantique : dualité onde / corpuscule.

→ repenser la méca classique du microscopique, l'effet tunnel illustrent cette nécessité.

Exemple :



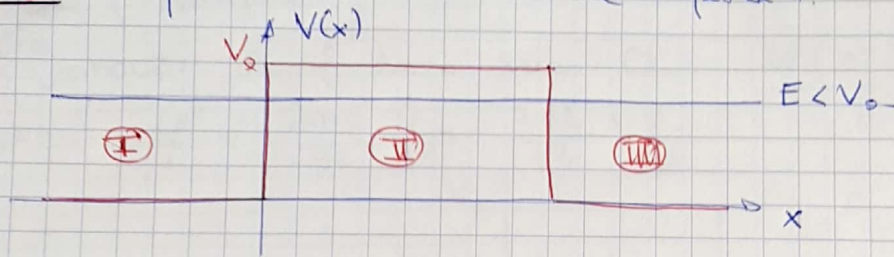
en méca ϕ , une particule (car dualité onde / corpuscule) peut traverser la barrière de potentiel, classiquement impossible.

Effet tunnel : propriété qui permet à un objet de franchir une barrière de potentiel même si son énergie ne lui permet pas classiquement de la franchir.

I1

particule de masse m (e^- par ex).

(3)



Equation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x,t) + V(x,t) \Psi(x,t)$$

Potential indépendant du temps ; on cherche des solutions stationnaires du type:

$$\Psi(x,t) = \varphi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + V(x) \varphi = E \varphi$$

→ évolution de toute fonction d'onde (pour un système isolé) immédiatement connue si l'on connaît les solutions stationnaires de l'éq de Schrödinger

→ solution d'onde plane (flux ondulatoire de particules).

(on peut revenir par la suite à des paquets d'onde).

⊕ et ⊖ $\varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi'' + k^2 \varphi = 0$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

⊕ $\varphi''(x) + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi'' - k'^2 \varphi = 0$

$$k' = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

⊕ $\varphi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}$ (incidente, réfléchie)

⊕ $\varphi_{II}(x) = A_{II} e^{ikx} + B_{II} e^{-ikx}$ (émergente)

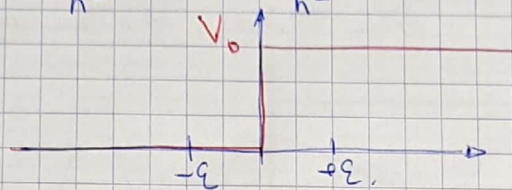
⊕ $\varphi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx}$ (transmise)

CL (transparent).

(4)

Continuité de ψ donne deux CL: $\psi(0^-) = \psi(0^+)$.

or: $\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = \frac{2mE}{\hbar^2} V \psi$.



on intègre entre $- \epsilon$ et ϵ :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi''(x) dx + \frac{2mE}{\hbar^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) V(x) dx$$

$\xrightarrow[\text{car } \psi \text{ continue}]{0 \text{ si } \epsilon \rightarrow 0}$
 $\xrightarrow[\text{car } \psi \text{ continue}]{0 \text{ si } \epsilon \rightarrow 0}$

$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = \psi'(0^+) - \psi'(0^-)$ donc $\psi'(0^-) = \psi'(0^+)$.

ψ' continue en 0. (de même en a).

suppose onde plane vient de $-\infty$ donc $B_{III} = 0$.

Relations de passage:

$x=0$: $A_I + B_I = B_{II} + B_{III}$

$ik(A_I - B_I) = k'(A_{II} - B_{II})$

$x=a$: $A_{II} e^{k'a} + B_{II} e^{-k'a} = A_{III} e^{ika}$
 $k'(A_{II} e^{k'a} - B_{II} e^{-k'a}) = ik A_{III} e^{ika}$

4 équations, 5 inconnues: on exprime tout en fonction de A_I .

I.2.

Après calcul, on trouve $\frac{A_{III}}{A_I} = \frac{4ikk'e^{-ika}}{(k+ik')^2 e^{k'a} + (k'+ik)^2 e^{-k'a}}$

Approximation de la barrière épaisse: $k'a \gg 1$.

$\Rightarrow \frac{A_{III}}{A_I} \approx \frac{4ikk'e^{-ika}}{(k+ik')^2} e^{-k'a}$

On pose la probabilité de transmission: $T = \frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2} = \frac{16k^2k'^2}{(k^2+k'^2)^2} e^{-2k'a}$
 en remplaçant k et k' :

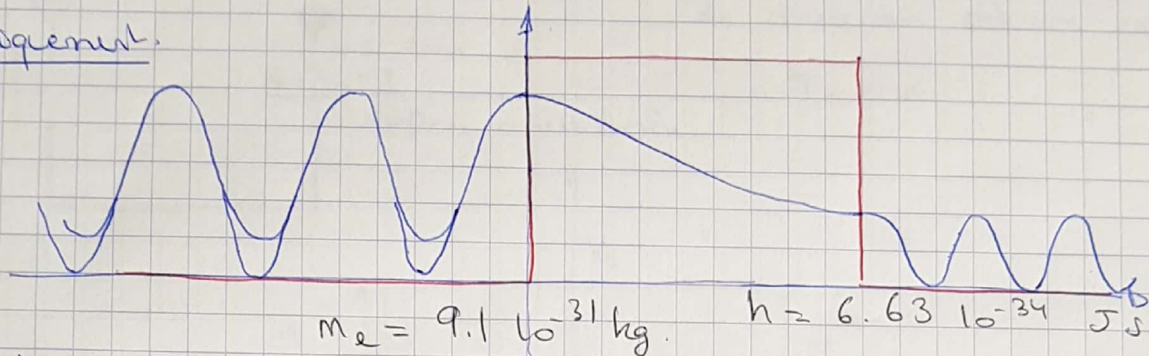
$$T = \frac{16 E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2k'a}$$

$|A_{III}|^2$ représente la probabilité pour la particule après la barrière de potentiel et on voit que $|A_{III}|^2 \neq 0$ (si $|A_I|^2 \neq 0$), bien que $E < V_0$

Remarque :

- $V_0 \rightarrow +\infty \Rightarrow T \rightarrow 0$ (barrière infiniment haute).
- $a \rightarrow +\infty \Rightarrow T \rightarrow 0$ (barrière infiniment large).

graphiquement.



Application numériques : $E \approx 1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ $\frac{1}{k'} \approx 10^{-10} \text{ m}$
 $V_0 \approx 5 \text{ eV}$

donc si $a = 0.1 \text{ nm}$, $T \approx 0.3$ $a = 1 \text{ nm}$, $T \approx 3 \cdot 10^{-9}$

I.3 • Énergie de la particule échangée.

↳ égalations aux valeurs propres échangées entre zone I et III

↳ le fait de traverser la barrière ne coûte pas d'énergie en soi.

Effet oscillatoire sur l'amplitude de probabilité car la particule est caractérisée par sa fonction d'onde qui évolue de manière purement oscillatoire.

On peut reproduire "l'effet tunnel" dès que des ondes évanescentes sont produites $\rightarrow$ réflexion totale frustrée (bloc de paraffine).

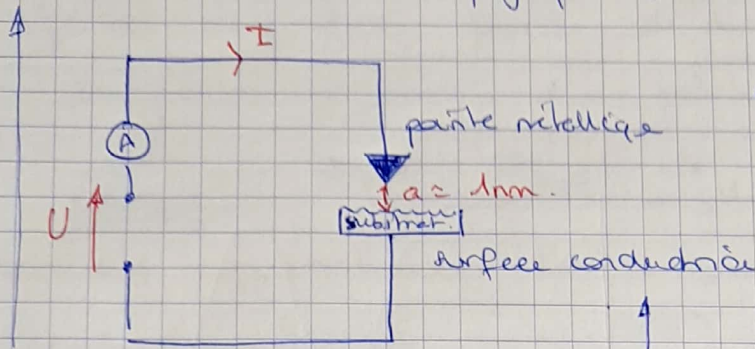
La partie "quantique" du phénomène vient de la dualité onde / particule qui permet à une particule massive de traverser une barrière de potentiel.

I.4.

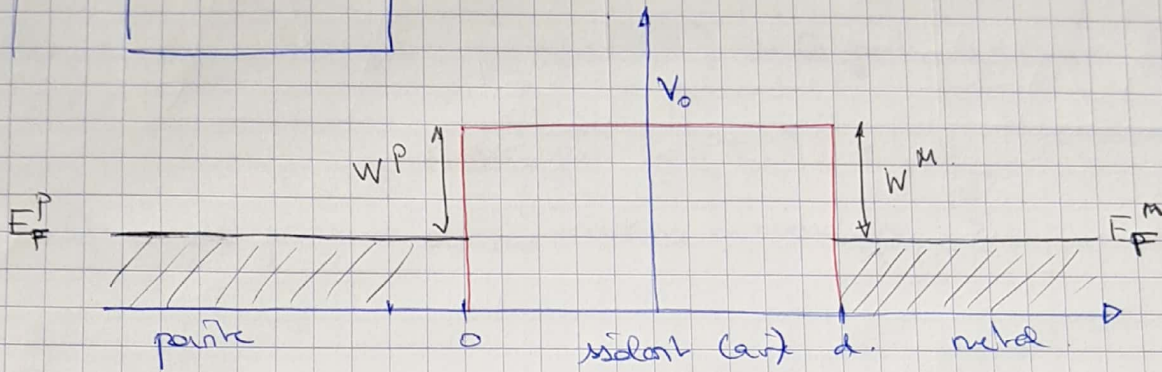
(transparent)

⑥

But : obtenir la topographie d'une surface conductrice

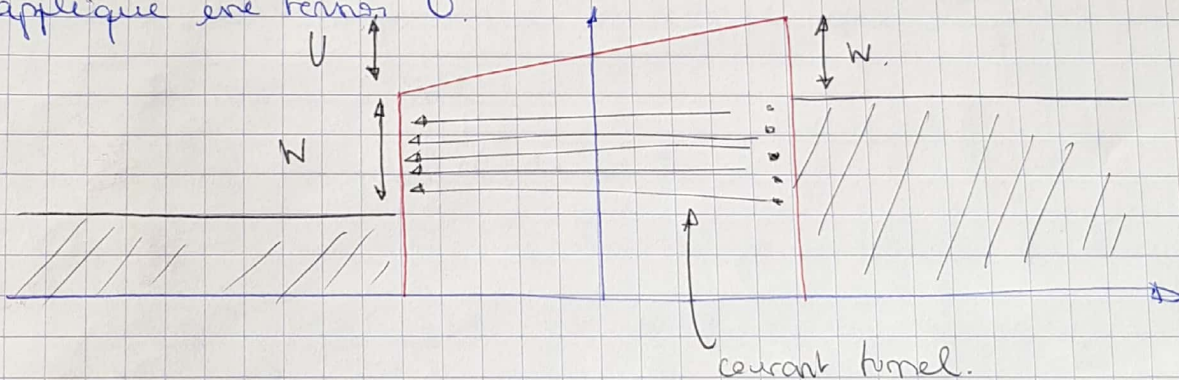


dans le métal, les e^- de la bande de conduction ont une énergie $< E_F$ à $T=0K$



simplification : suppose pointe / métal au même niveau de Fermi.
et que $W^P = W^M$.

on applique une tension U .



Proba de transmission des e^- du métal vers la pointe par effet tunnel

La mesure de l'intensité $I \propto e^{-2k'd}$ (facteur de transmission),

$\Rightarrow$ mesure de d en recueillant cette intensité

$\Rightarrow$ permet de topographier le métal.

ODG:

$I \sim 1 \text{ nA}$ $V \sim 1V$ $d \sim 0.1 \text{ nm} \sim 1 \text{ nm}$

rés verticale : $\Delta E_F > 0.01 \text{ eV}$ variation de $1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm}$

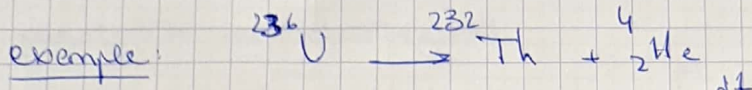
lateral : $\Delta r_{xy} > 1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm} \rightarrow$ un ODG sur I .

II.1 Radiocapture α : émission, par un noyau instable,

(7)

d'une particule α (noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$).

permet aux atomes lourds de diminuer la répulsion électrostatique des protons par émission d'une particule α .



Résultats expérimentaux: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Mesure de l'énergie cinétique (E) de la particule α émise. (entre 4 et 10 MeV).

Loi empirique établie: $\ln(T_{1/2}) = A + \frac{B}{\sqrt{E}}$ par l'ironisme.

Que se passe-t-il au niveau microscopique?

II.2

1928 : particule α traitée comme une particule quantique dont le mouvement est unidimensionnel (x).

Modèle à deux corps: i.e on suppose que la particule α préexiste dans le noyau initial.

Soumise à un potentiel de la forme:

• $|x| \leq R_0$: interaction forte / assure la cohésion du noyau.
très courte portée et se limite au noyau.

potentiel constant dans cette zone: puit de potentiel.

où la particule α est dans un état lié.

• $|x| > R_0$: interaction forte négligeable hors du noyau.

particule α soumise à la répulsion de $Z-Z' = Z'$ protons

restants dans le noyau. $\rightarrow$ potentiel coulombien $E = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

(transparent)
petite α de masse M . interne v à l'intérieur du rayon du rayon R_0
se heurte contre la barrière à une fréquence $\frac{v}{R_0}$

1.3 Relation d'incertitude de Heisenberg $v \approx \frac{h}{MR_0}$ (approximation).

→ nombre de collisions contre la barrière $= \frac{v}{MR_0^2}$.

→ probabilité de disintégration.

$$d = \frac{h}{MR_0^2} e^{-\left(\frac{2\sqrt{2}M}{h} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{V-E} dr\right)}$$

ie $\ln d = \ln \frac{h}{MR_0^2} - 2 \frac{\sqrt{2}M}{h} I$ où $I = \int_{R_0}^R \sqrt{V-E} dr$.

$$V = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = E \frac{R_1}{r}$$

donc $I = \sqrt{E} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{\frac{R_1}{r} - 1} dr$ intégrer en posant $r = R_1 \sin^2 \theta$

$$\Rightarrow I = \frac{R_1 \sqrt{E}}{E} (\pi - 2\theta_0 - \sin 2\theta_0)$$

$R_0 \ll R_1$ (barrière épaisse).

$$\theta_0 \sim \sin \theta_0 \sim \sqrt{\frac{R_0}{R_1}}$$

$$I = \frac{R_1 \sqrt{E}}{\sqrt{E}} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \right)$$

donc $\ln d = \ln \frac{h}{MR_1^2} - \frac{2\pi(Z-2)e^2 \sqrt{2}M}{h\sqrt{E}} + \frac{8e}{h} \sqrt{R_1(Z-2)}$

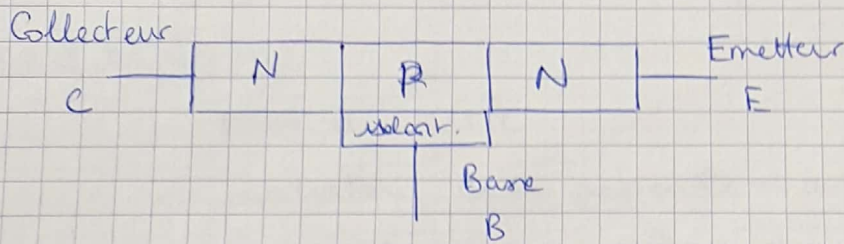
or $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ (décroissance exponentielle).

donc $\ln T_{1/2} = \ln(\ln 2) - \ln \lambda$.

d'où $\ln T_{1/2} = \frac{A}{\sqrt{E}} + B$.

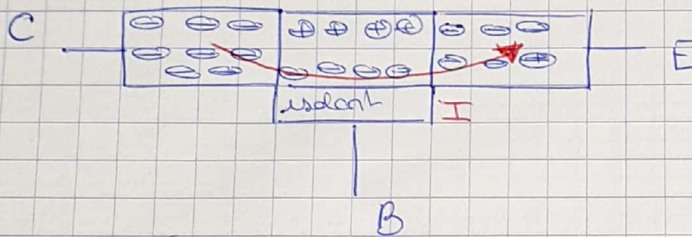
III. 1.

(11)

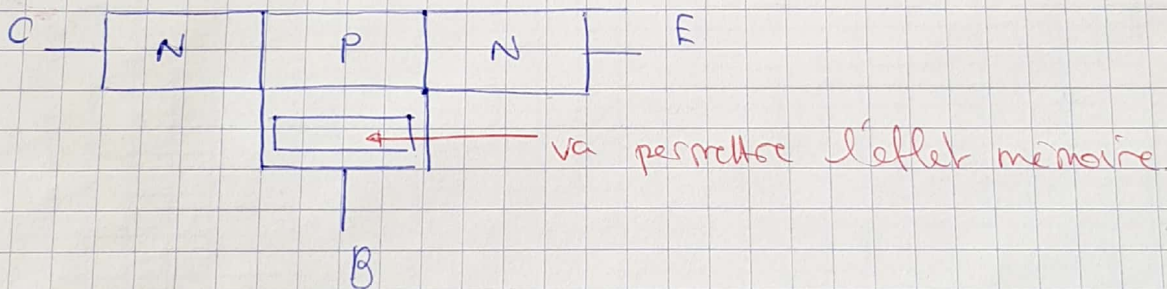


Aucune tension à la base : transistor bloquant.

Tension assez forte : effet condensateur, accumulation des e^- sur des côtés des compartiments dopés P.

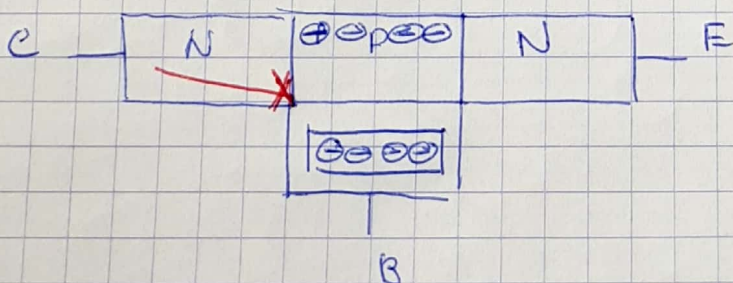


Ajout de l'effet mémoire : oxyde conducteur "grille flottante" dans l'isolant.

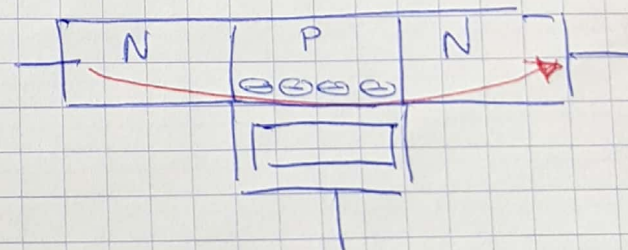


II. 2. grille flottante peut être dans deux cas :

- chargée électriquement en électrons (comme un condensateur).
- non chargée électriquement (neutre en charges).



valeur du bit : 0
bloqué



valeur du bit : 1
passant

Ex 1

~~Merci bien pour de me dire de 2 et A part~~

(10)

$$ODG : T_{1/2} \approx 10^{10} \text{ ans. pour } ^{238}\text{U}$$

bes d'hypothèses :

- forme de $V(r)$.
- oscillations de la particule α autour du noyau (10^{22} collisions)

$$R_0 \approx 4 \text{ fm} \rightarrow v \approx 10^7 \text{ m.s}^{-1} \rightarrow f \approx 10^{22} \text{ Hz}$$

~~III.2~~ il suffit de voir si le transistor est bloquant ou passant. (12)

- transistor passant ($\text{bit} = 1$) : la grille est chargée.
- transistor bloquant ($\text{bit} = 0$) : la grille est chargée est e^- .

III.3



recouvre d'une barrière épaisse.

pour charger, forte tension pour déformer la barrière et avoir une barrière mince.

III.4. • hautes tensions → conditions extrêmes pour le transistor.

↳ nombre de cycle d'écriture des lecteurs SSD est limité.

• épaisseur du résist → limitation de la miniaturisation des composants.

Temps: Lecture:

Ecriture:

SSD 25 - 50 μs .

300 μs - 800 μs .

HDD 3 ms

3 ms.

Courant: Lecture

Write

SSD 20 mA.

SSD 20 mA.

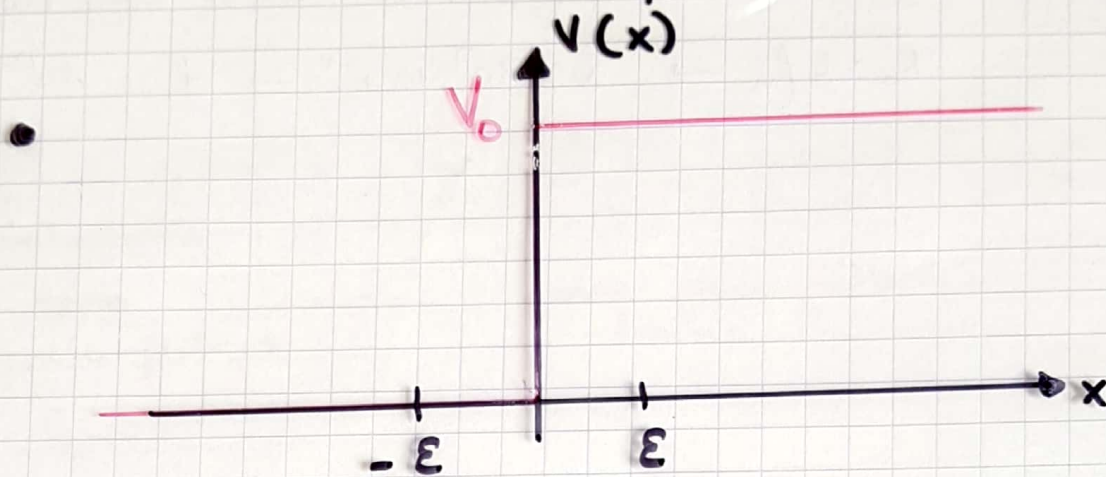
HDD > 300 mA

> 300 mA.

Mémoire: > 10 ans.

Conditions aux limites :

- continuité de φ : $\varphi(0^-) = \varphi(0^+)$
(resp. en $a^\pm$)



on intègre entre $-\varepsilon$ et ε :

$$\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi''(x) dx}_{[\varphi'(x)]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}} + \frac{2mE}{\hbar^2} \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x) dx}_{\rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ car } \varphi \in C^0} = \frac{2m}{\hbar^2} \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)V(x) dx}_{\rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ car } \varphi \in C^0}$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = \varphi'(0^+) - \varphi'(0^-)$$

donc $\varphi'(0^-) = \varphi'(0^+)$

ie $\varphi'(a^-) = \varphi'(a^+)$

$$d = \frac{\hbar}{MR_0^2} \exp \left[-2 \left(\frac{\sqrt{2M}}{\hbar} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{V-E} dr \right) \right]$$

ie $\ln d = \ln \frac{\hbar}{MR_0^2} - 2 \frac{\sqrt{2M}}{\hbar} I$

ou $I = \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{V-E} dr$

$$V = \frac{2Z'e^2}{4\pi r}$$

$$V = E \frac{R_1}{r}$$

donc $I = \sqrt{E} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{\frac{R_1}{r} - 1} dr$

$$r = R_1 \sin^2 \theta$$

$$I = 2R_1 \sqrt{E} \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$\sin \theta_0 = \sqrt{\frac{R_0}{R_1}}$$

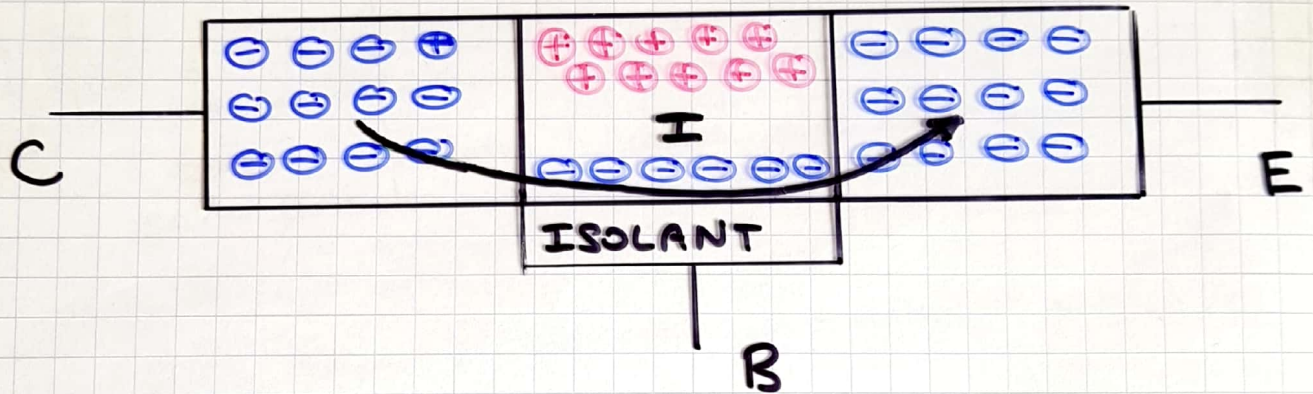
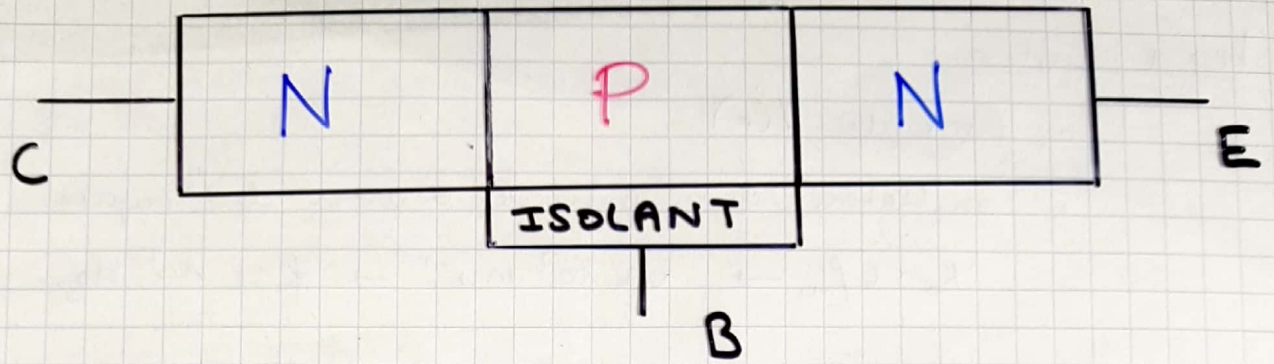
d'où $I = \frac{R_1 \sqrt{E}}{E} (\pi - 2\theta_0 - \sin 2\theta_0)$

$R_0 \ll R_1$

$$\theta_0 \approx \sin \theta_0 \approx \sqrt{\frac{R_0}{R_1}}$$

$$I = R_1 \sqrt{E} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_0}{R_1}} \right)$$

or $E = \frac{2Z'e^2}{4\pi R_1}$



Effet mémoire :

