

LP43 – ÉVOLUTION TEMPORELLE D'UN SYSTÈME QUANTIQUE À DEUX NIVEAUX

15 février 2017

*"L'horloge est une belle invention pour rappeler
l'heure des repas."*

Amélie CHARDAC & Balkis DOHNI

DIOGÈNE

Niveau : L3

Commentaires du jury

2015 : Il est étonnant de voir cette leçon s'appuyer sur les états stationnaires sans aucun élément de justification. L'évolution d'un système quantique en régime forcé est trop souvent totalement négligée.

Jusqu'en 2014, le titre était : Oscillateurs à deux degrés de liberté en mécanique classique et en mécanique quantique. Analogies et différences.

2009, 2010 : Le phénomène de battement (comme son analogue quantique) est au coeur de la leçon.

2005 : La notion de mode propre doit être parfaitement maîtrisée et définie avec précision.

2000 : Bien que couramment utilisé comme exemple de système quantique à deux niveaux, l'inversion de l'ammoniac est un exemple délicat, car le terme de couplage y est difficile à interpréter physiquement. On peut trouver d'autres systèmes à deux niveaux, plus simples à présenter.

Bibliographie

- *Mécanique quantique*, **Le Bellac** →
- *Mécanique quantique*, **Basdevant** →
- *Mécanique quantique tome I*, **Cohen** →

Prérequis

- Formalisme matriciel de la MQ
- Confinement d'une particule - puits de potentiel
- Effet tunnel
- Evolution d'un spin soumis à un champ B constant
- Moment cinétique en MQ

Table des matières

1 Résonance magnétique	2
1.1 Position du problème	2
1.2 Traitement quantitatif	2
2 Molécule d'ammoniac	4
2.1 Position du problème	4
2.2 Cas des puits non couplés	6
2.3 Cas des puits couplés	7
2.4 Evolution temporelle : phénomène d'inversion	9
3 MASER	10
3.1 Description	10
3.2 Champ électrique oscillant	10

Introduction

Les objectifs pour ce cours sont :

- Présenter le formalisme de l'étude d'un système à deux niveaux
- Applications

1 Résonance magnétique

1.1 Position du problème

Système : proton, de masse m_P , de charge $+e$ et de spin $\pm \frac{\hbar}{2}$

Le moment cinétique de spin de cette particule s'écrit :

$$\hat{\vec{\mu}} = \frac{\mu_B g}{\hbar} \hat{\vec{s}} \quad (1)$$

où $\hat{\vec{\mu}}$ est le moment magnétique, μ_B est le magnéton de Bohr, g est le facteur de Landé ($g = -5.6$ pour le proton) et $\hat{\vec{s}}$ le spin.

On peut alors définir : $\gamma = \frac{\mu_B g}{\hbar}$ qui est le facteur gyromagnétique. Il est fonction de la masse de la particule, de sa charge et de son environnement, ce qui en fait une caractéristique particulière de la particule étudiée.

Le proton est placé dans un champ magnétique tournant :

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + B_1 (\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y) \quad (2)$$

Le proton est un système à deux niveaux de part son spin (up ou down).

Notre objectif est d'étudier l'évolution temporelle de ce système pour voir s'il est possible de passer d'un état à l'autre spontanément (modulo le forçage).

1.2 Traitement quantitatif

Le Hamiltonien de cette particule s'écrit :

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B} = -\frac{\gamma g}{\hbar} (\sigma_X B_X + \sigma_Y B_Y + \sigma_Z B_Z) \quad (3)$$

On pose $\alpha = \frac{\gamma g}{\hbar}$, d'où :

$$\hat{H} = -\alpha \begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{-i\omega t} \\ B_1 e^{i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

On note $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ la base des états propres de $\hat{S}_z$.

Alors tout état se décompose : $|\psi\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$.

L'équation de Schrödinger pour cette fonction d'onde s'écrit :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (5)$$

ie

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a}_+ \\ \dot{a}_- \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} a_+ B_0 + a_- B_1 e^{-i\omega t} \\ a_+ B_1 e^{i\omega t} - B_0 a_- \end{pmatrix} \quad (6)$$

Ce qui s'écrit en un système d'équations couplées en a_+ et a_- :

$$\begin{cases} i\hbar\dot{a}_+ &= -\alpha B_0 a_+ - \alpha B_1 a_- e^{-i\omega t} \\ i\hbar\dot{a}_- &= -\alpha B_1 a_+ e^{i\omega t} - \alpha B_0 a_- \end{cases} \quad (7)$$

On peut alors définir 3 pulsations caractéristiques du système :

$$\begin{cases} \omega_0 &= -\frac{\gamma g}{\hbar} B_0 \\ \omega_1 &= -\frac{\gamma g}{\hbar} B_1 \\ \omega & \end{cases} \quad (8)$$

Pour pouvoir résoudre ce système d'équations non linéaires couplées, on effectue un changement de référentiel : on se place dans le référentiel lié au champ tournant.

On définit alors des nouvelles variables :

$$b_{\pm}(t) = e^{\pm \frac{i\omega t}{2}} a_{\pm}(t) \quad (9)$$

Alors le système d'équations devient :

$$\begin{cases} i\dot{b}_+ &= -\frac{\omega-\omega_0}{2} b_+ + \frac{\omega_1}{2} b_- \\ i\dot{b}_- &= \frac{\omega_1}{2} b_+ + \frac{\omega-\omega_0}{2} b_- \end{cases} \quad (10)$$

En dérivant ces équations par rapport au temps, pour les découpler, on obtient :

$$\ddot{b}_{\pm} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_{\pm} = 0 \quad (11)$$

où $\Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}$ est appelée pulsation de Rabi.

Nous souhaitons à présent voir quelle influence cela a sur l'évolution temporelle du système. Choisissons par exemple un état initial : $|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle$.

Alors :

$$\begin{cases} b_-(t) &= -i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \\ b_+(t) &= \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\omega-\omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \end{cases} \quad (12)$$

La vecteur d'onde s'écrit donc dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} -i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{i\frac{\omega t}{2}} \\ \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\omega-\omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right] e^{-i\frac{\omega t}{2}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Il est alors possible de calculer l'évolution temporelle de la probabilité d'être dans l'état $|+\rangle$ à partir de l'état initial $|\psi\rangle$:

$$P_+(t) = |\langle +|\psi\rangle|^2 = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \quad (14)$$

L'évolution de la probabilité d'être dans l'état $|+\rangle$, selon différentes valeurs pour la pulsation de forçage, est représentée ci-dessous (Figure 1) :

Commentaires :

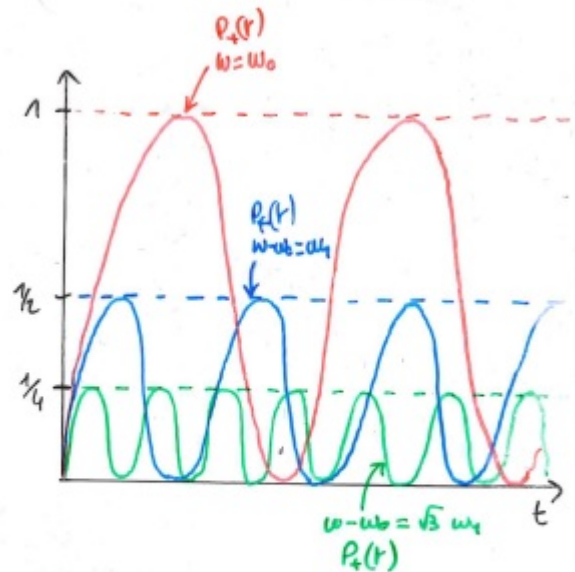
- Evolution oscillante : oscillations de Rabi
- Problème entièrement résolu (pour toute pulsation)
- $\Omega = f(\Delta\omega)$

Étudions 3 cas :

- $\omega - \omega_0 = \sqrt{3} \omega_1$; $\Omega = 2 \omega_1$
 $P_+(t) = \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$; $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

- $\omega - \omega_0 = \omega_1$; $\Omega = \sqrt{2} \omega_1$
 $P_+(t) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$; $T = \sqrt{2} \frac{2\pi}{\omega_1}$

- $\omega = \omega_0$; $\Omega = \omega_1$
 $P_+(t) = \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$; $T = \frac{4\pi}{\omega_1}$



■ Retenir :

→ forçage harmonique $\Rightarrow$ bascule oscillante du spin

FIGURE 1 – Evolution temporelle de la probabilité en fonction de la valeur de ω

- Les oscillations (pics) sont d'autant mieux résolus que l'on est proche de la résonance (on atteint une probabilité de 1 à la résonance, périodiquement).

Application :

C'est le principe de la RMN utilisée en chimie pour caractériser des molécules. On peut remonter au facteur γ par la mesure de pulsation.

2 Molécule d'ammoniac

2.1 Position du problème

La molécule d'ammoniac NH_3 est composée d'un atome d'azote N central, relié à trois atomes d'hydrogène H qui sont dans un même plan. Ainsi, la molécule NH_3 a une forme pyramidale (cf schéma Figure 2).

On s'intéresse aux deux configurations (D) et (G) du plan des 3 atomes d'hydrogène H.

La molécule NH_3 a un nombre infini d'états. Dans l'absolu, elle peut translater, tourner ; les atomes peuvent vibrer et les électrons peuvent être dans un état excité.

Par conséquent, ce n'est pas, a priori, un système à deux états. Cependant, nous allons faire l'approximation que tous les états sauf 2 restent fixes, car ils n'interviennent pas dans ce qui nous intéresse pour l'instant. D'abord, on se place dans le référentiel de l'atome d'azote N et on suppose la molécule dans son état fondamental électronique. Puis, nous faisons les hypothèses suivantes : la molécule ne peut pas tourner autour de son axe de symétrie, a une impulsion nulle et vibre aussi peu que possible.

Il reste alors deux états possibles qui sont les deux positions possibles de l'atome d'azote : il peut être d'un côté ou de l'autre du plan des atomes d'hydrogène. Nous noterons ces états $|\psi_G\rangle$ quand N est à gauche du plan des H et $|\psi_D\rangle$ quand il est à droite. Nous allons étudier cette molécule comme si c'était un système à deux états.

$\{|\psi_G\rangle, |\psi_D\rangle\}$ constitue une base des états de la molécule NH_3 .

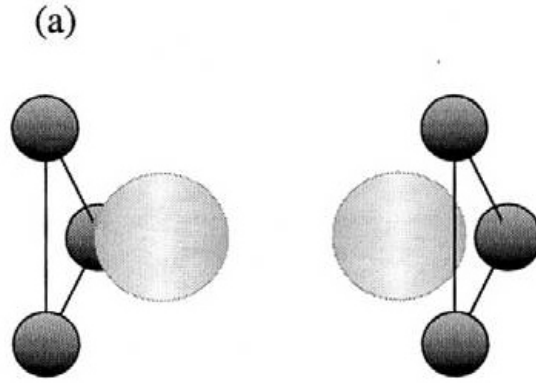


FIGURE 2 – Molécule NH_3 . Configurations équivalentes : (D) à gauche et (G) à droite

Pour passer d'une configuration à l'autre, l'azote doit traverser le plan des atomes d'hydrogène. Qualitativement, le paysage énergétique dans lequel évolue l'azote, de masse m_N , et de coordonnée x par rapport au plan des H ($x=0$), est :

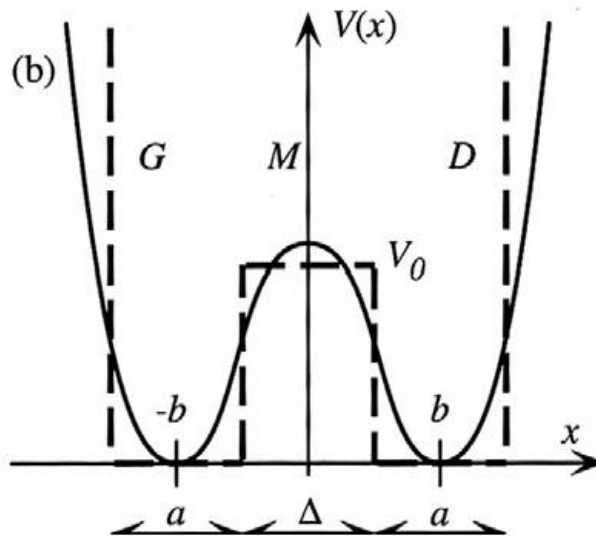


FIGURE 3 – Potentiel réel de la molécule d'ammoniac (en trait plein) et le puits potentiel carré associé (en pointillés).

On a deux configurations stables qui correspondent à un minimum d'énergie : lorsque la particule est en $x=-b$ et en $x=b$. L'énergie croît autour de $x=0$ à cause de la répulsion électronique et lorsque la particule est en $x=0$, l'azote est dans le plan des hydrogènes et il s'agit d'une configuration instable très défavorable énergétiquement.

Quand on passe de la configuration (G) à la configuration (D), on a "retourné" la molécule comme un parapluie et on parle alors d'inversion de la molécule.

Dans la suite, nous allons approximer le potentiel réel par un potentiel carré (cf Figure 3) et nous nous proposons comme objectif d'étudier l'évolution temporelle du système entre ces deux états.

ODG : pour la molécule d'ammoniac on a $b = 0,4\text{\AA}$ et $V_0 = 0,25\text{eV}$ pour la hauteur de la barrière de potentiel.

2.2 Cas des puits non couplés

Si les deux puits étaient infinis (V_0 infini) :

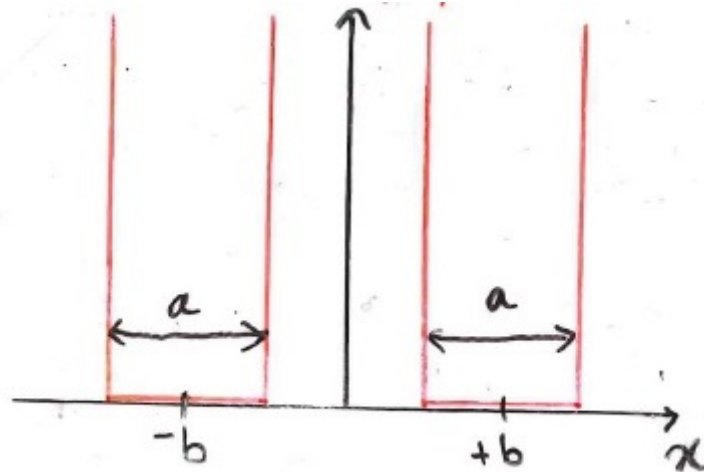


FIGURE 4 – Puits infinis

Alors, on peut les traiter séparément comme 2 fois un simple puits infini.

Le potentiel étant indépendant du temps, on peut rechercher dans chacun des puits des solutions stationnaires à l'équation de Schrodinger. Cela a été vu dans une leçon précédente (confinement d'une particule) et nous ne détaillerons pas les calculs à nouveau ici.

Les états propres sont $|\psi_G\rangle$ et $|\psi_D\rangle$, de forme sinusoidale $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\left(b + \frac{a}{2} \pm x\right)\right)$ et avec des énergies identiques E_n :

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (15)$$

On obtient deux oscillateurs quantiques indépendants. On a les mêmes niveaux énergétiques et qui oscillent à la même longueur d'onde. Dans la suite on ne s'intéressera qu'au niveau fondamental E_0 qui est doublement dégénéré :

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (16)$$

Dans cette situation, dans la base $\{|\psi_G\rangle, |\psi_D\rangle\}$ la représentation matricielle du Hamiltonien est :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Les termes non diagonaux sont nuls car les états $|\psi_G\rangle$ et $|\psi_D\rangle$ ne se voient pas.

Tout état quantique peut se décomposer en : $|\psi\rangle = c_G(t)|\psi_G\rangle + c_D(t)|\psi_D\rangle$. Or ici il n'y a pas de couplage donc $|\psi\rangle = c_G(t)|\psi_G\rangle$ ou $|\psi\rangle = c_D(t)|\psi_D\rangle$.

La résolution de l'équation de Schrödinger pour $c_G(t)$ donne : $i\hbar \frac{dc_G}{dt} = E_0 c_G$.

Ce qui nous donne $c_G(t) = \alpha_G \exp\left(\frac{-iE_0 t}{\hbar}\right)$ et de même, $c_D(t) = \alpha_D \exp\left(\frac{-iE_0 t}{\hbar}\right)$. Les deux états ont bien la même énergie (car ils sont symétriques par rapport au plan des 3 H) et ce niveau est dégénéré.

Si on suppose que la molécule est initialement dans l'état $|\psi_G\rangle$ (ie totalement à gauche du plan des hydrogènes) alors $\alpha_G = 1$ et $\alpha_D = 0$ donc pour tout t, $c_D(t) = 0$. Ainsi, la probabilité de trouver la molécule dans la configuration (G) est $P_G(t) = 1$ et celle d'être dans la configuration (D) est $P_D(t) = 0$. La molécule reste bloquée dans un des puits.

↓ A partir de cette modélisation, on obtient une dégénérescence de l'énergie pour les deux états et on a vu qu'il était impossible d'observer l'inversion de la molécule dans ce cas.

2.3 Cas des puits couplés

Dès lors que la barrière n'est pas infinie, il existe une probabilité non nulle pour la molécule d'ammoniac de passer de la configuration (G) à la configuration (D) et inversement. Ceci est possible par effet tunnel, comme nous avons pu l'étudier précédemment. Cela a deux conséquences :

- $E_0 \rightarrow E'_0 < E_0$: en effet, puisque la particule peut explorer une région de l'espace plus étendue, elle va voir un puits effectif de plus grande largeur. Or $E \propto \frac{1}{a^2}$ donc l'énergie est abaissée.
- Puisque la particule peut passer d'une configuration à l'autre, il existe un couplage entre les nouveaux états $|\phi_1\rangle$ (majoritairement à gauche) et $|\phi_2\rangle$ (majoritairement à droite). Le nouveau Hamiltonien s'écrit dans cette base :

$$H = \begin{pmatrix} E'_0 & -A \\ -A & E'_0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

où $A > 0$ et $E'_0 < E_0$.

Pour ne nous intéresser qu'à deux niveaux d'énergie, nous allons nous placer dans le cas d'un couplage faible, ie $A \ll E'_0$.

Tout état quantique peut se décomposer en : $|\psi(t)\rangle = c_1(t)|\psi_1\rangle + c_2(t)|\psi_2\rangle$.

L'équation de Schrodinger s'écrit alors :

$$i\hbar \frac{d\phi}{dt} = H\phi \Rightarrow i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_0 & -A \\ -A & E'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

On obtient donc deux états propres :

- un symétrique

$$u_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1(t) + c_2(t)) \Rightarrow |\psi_s(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \quad (20)$$

- un antisymétrique

$$u_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_1(t) - c_2(t)) \Rightarrow |\psi_a(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle) \quad (21)$$

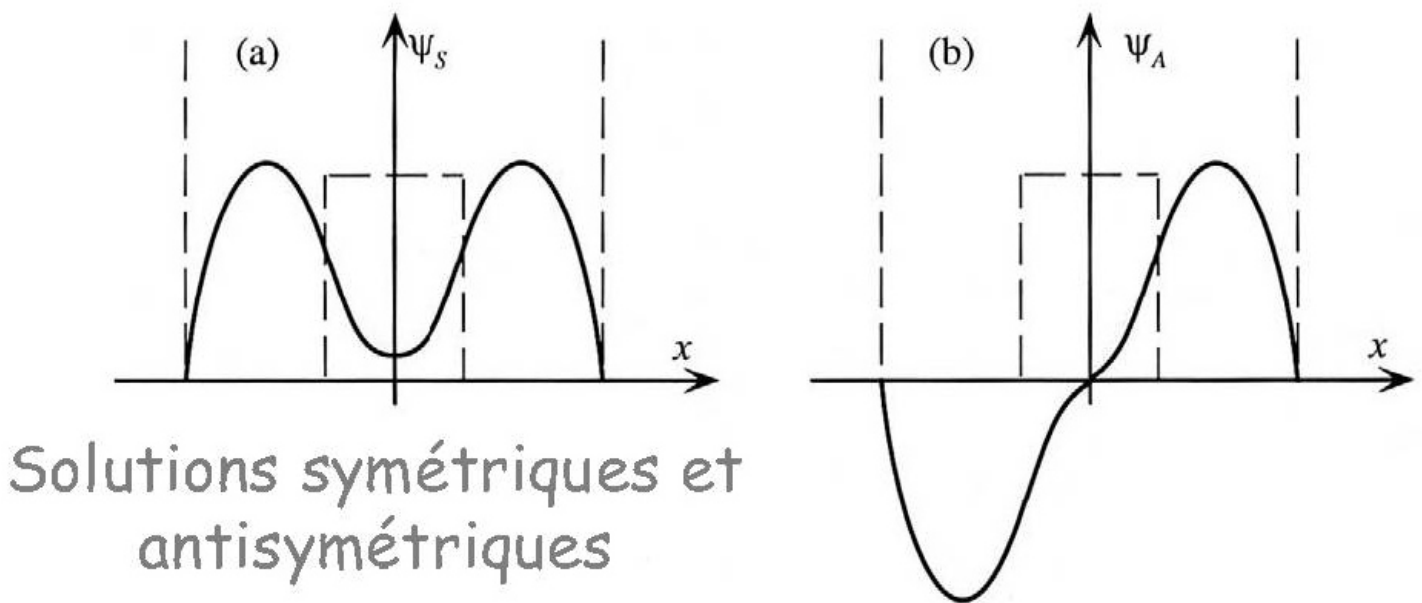


FIGURE 5 – Modes symétrique et antisymétrique pour le niveau fondamental

Ces états sont associés aux énergies propres :

- pour la solution symétrique

$$E_s = E'_0 - A \quad (22)$$

- pour la solution antisymétrique

$$E_a = E'_0 + A \quad (23)$$

Remarque :

L'énergie du mode antisymétrique est plus élevée car la fonction d'onde présente plus de noeuds.

On a ainsi une levée de dégénérescence en énergie grâce au couplage par effet tunnel :

Et on peut à présent remonter à la forme des fonctions d'onde $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$:

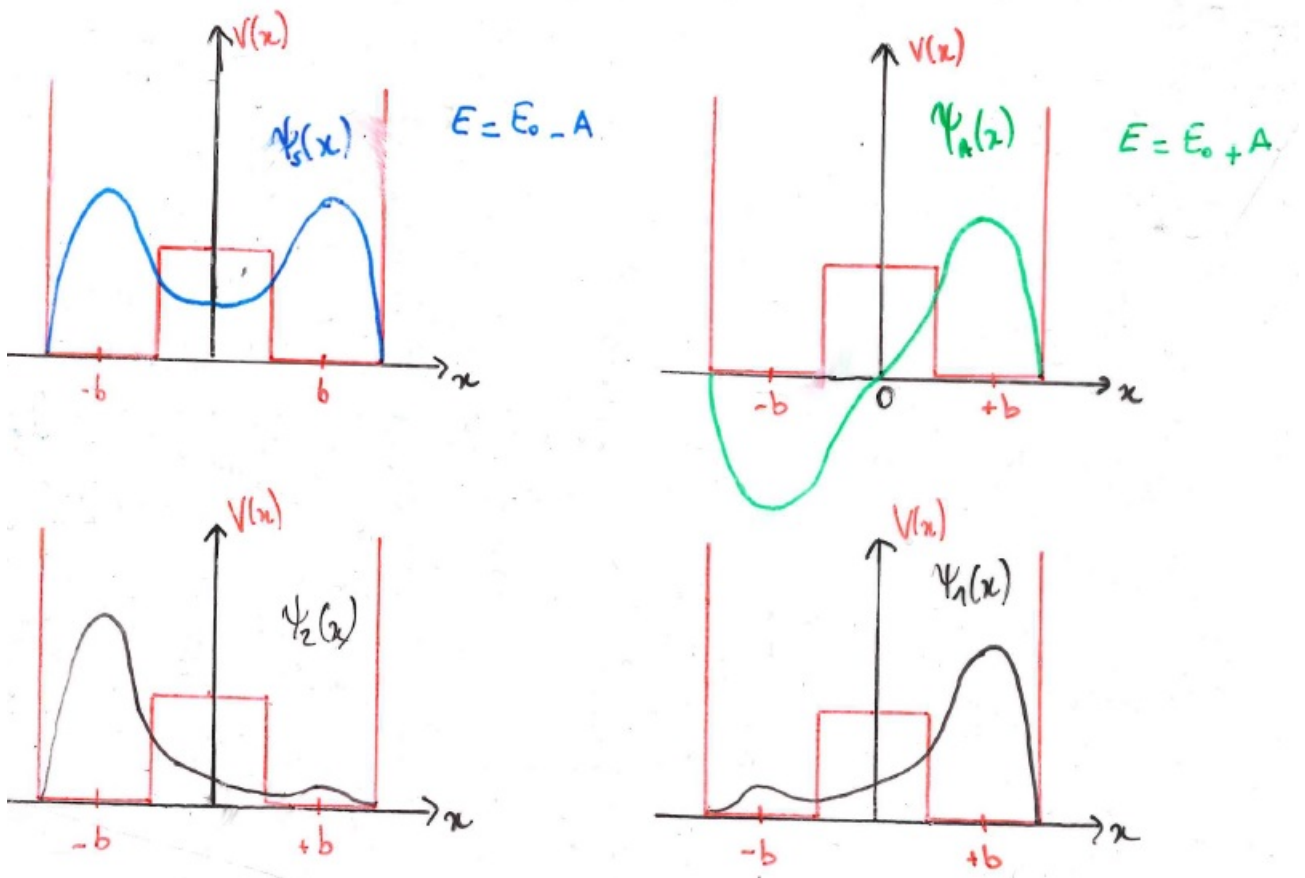


FIGURE 6 – Forme des fonctions d'ondes $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$.

On retrouve le sens de $|\psi_2\rangle$ = "majoritairement à gauche" et $|\psi_1\rangle$ = "majoritairement à droite". Néanmoins, on constate par rapport au cas précédent sans couplage que la fonction d'onde n'est pas restreinte à un côté du plan.

Il s'agit de voir à présent comment ce couplage par effet tunnel influence l'évolution temporelle du système. En particulier, nous allons voir que l'on obtient un phénomène d'inversion de la molécule d' NH_3 et des battements périodiques.

2.4 Evolution temporelle : phénomène d'inversion

Tout état se décompose dans la base d'états propres $\{|\psi_S\rangle, |\psi_A\rangle\}$:

$$|\phi(t)\rangle = b_S(t)|\psi_S\rangle + b_A(t)|\psi_A\rangle \quad (24)$$

Remarque :

Les états propres sont bien stationnaires (obtenus par résolution de l'équation aux valeurs propres du Hamiltonien) mais les coefficients de combinaison linéaire évoluent temporellement.

Les coefficients $b_S(t)$ et $b_A(t)$ vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} i\hbar \dot{b}_S(t) &= (E'_0 - A)b_S(t) \\ i\hbar \dot{b}_A(t) &= (E'_0 + A)b_A(t) \end{cases} \quad (25)$$

dont les solutions sont : $b_{S,A}(t) = B_{S,A} e^{\frac{(E'_0 \mp A)}{i\hbar} t}$

Si on suppose que à $t=0$ on ait : $|\phi(t=0)\rangle = |\psi_A\rangle$ alors $B_{S,A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$$|\phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{(E'_0 - A)}{i\hbar} t} |\psi_S\rangle + e^{\frac{(E'_0 + A)}{i\hbar} t} |\psi_A\rangle \right) = e^{\frac{E'_0}{i\hbar} t} \left(\cos\left(\frac{A}{\hbar} t\right) |\psi_1\rangle + i \sin\left(\frac{A}{\hbar} t\right) |\psi_2\rangle \right) \quad (26)$$

On en déduit les probabilités :

$$\begin{cases} P_1(t) &= \cos^2\left(\frac{A}{\hbar} t\right) \\ P_2(t) &= \sin^2\left(\frac{A}{\hbar} t\right) \end{cases} \quad (27)$$

Les probabilités des états "majoritairement à gauche" et "majoritairement à droite" sont en opposition de phase : la molécule subit un phénomène d'inversion (ie retournement) avec une période $T = \frac{\hbar}{A}$. On remarque que plus le couplage est fort, plus cette inversion est fréquente.

ODG :

- Pour NH_3 : $T = 4,2 \cdot 10^{-11} \text{s} \rightarrow \nu = 24 \text{GHz}$
- Pour AsH_3 $T = 2 \text{ans}$

Et retour sur les hypothèses (pour NH_3) : $\begin{cases} A &= 9,93 \cdot 10^{-5} \text{eV} \\ V_o &= 0,25 \text{eV} \end{cases}$

Application pratique à ce phénomène d'inversion de la molécule d'ammoniac.

3 MASER

3.1 Description

Objectif : utiliser la molécule comme source de rayonnement

Deux étapes :

- Communiquer de l'énergie à la molécule : inversion de population obtenue en appliquant un champ statique
- Extraire cette énergie sous forme de rayonnement : émission stimulée obtenue en appliquant un champ oscillant de fréquence proche de la résonance

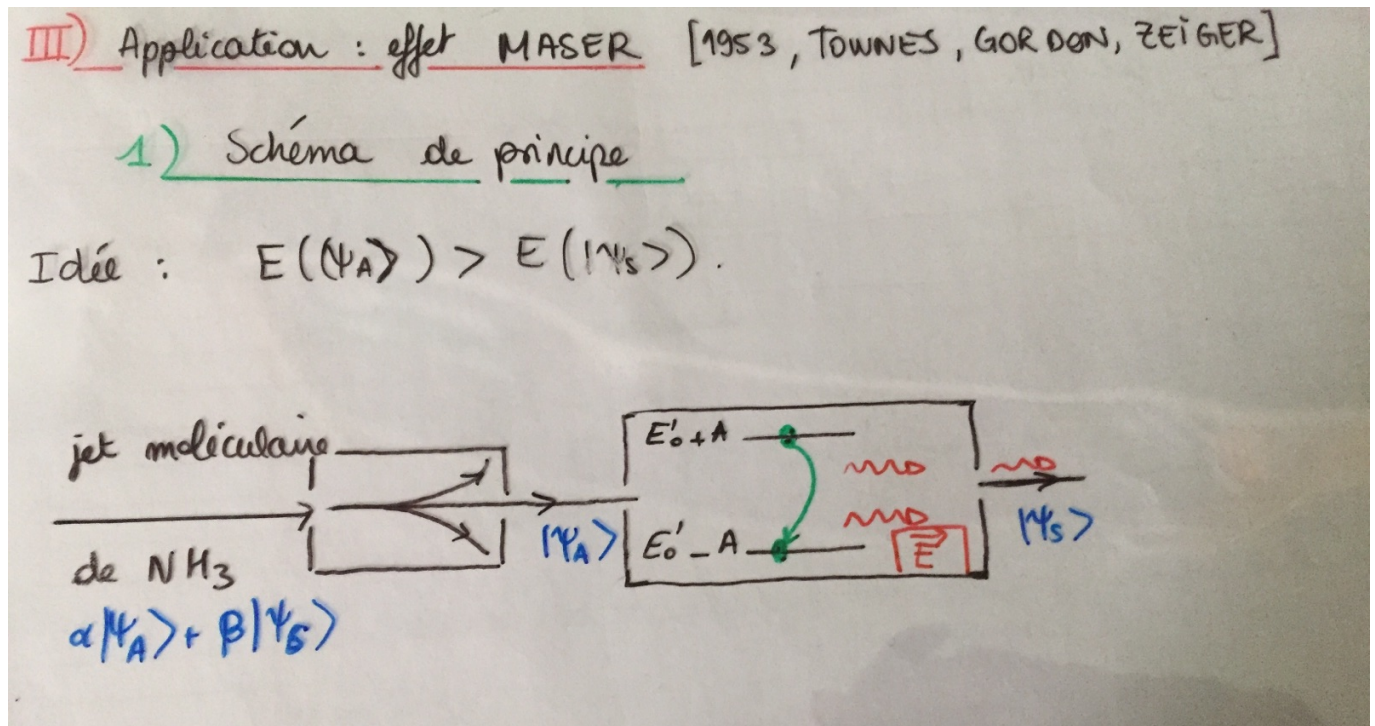


FIGURE 7 – Schéma de principe du maser

3.2 Champ électrique oscillant

On étudie ici l'émission stimulée provoquée par l'application d'un champ électrique oscillant. Par analogie avec ce qui a été fait sur la résonance magnétique, on retrouve des oscillations de Rabi à la résonance (cf Figures 8 et 9).

Application - Les horloges atomiques :

Une application directe du principe du Maser est l'horloge atomique (cf schéma). On utilise cette fois des atomes de Césium (à l'origine de la définition de la seconde). La précision des horloges atomiques est une dérive de l'ordre de $10^{-16}s$ en 1 seconde. Ces horloges sont utiles en métrologie, chronologie ou encore pour les systèmes de navigation par GPS.

III) Application : effet MASER

2) Champ $\vec{E}$ oscillant - Analogie avec la RMN

MASER

SPIN $1/2$ - RMN

Base de travail

$$\{|\Psi_s\rangle, |\Psi_A\rangle\}$$

$$\{|+\rangle, |-\rangle\}$$

Hamiltonien

$$\begin{pmatrix} E'_0 - A & -E_0 d \cos(\omega t) \\ -E_0 d \cos(\omega t) & E'_0 + A \end{pmatrix}$$

$$-\frac{g\gamma}{2} \begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{-i\omega t} \\ B_1 e^{i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix}$$

Equation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar \dot{a} = (E'_0 - A)a - \eta b \cos(\omega t) \\ i\hbar \dot{b} = (E'_0 + A)b - \eta a \cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i\dot{a}_+ = \frac{\omega_0}{2} a_+ + \frac{\omega_1}{2} a_- e^{-i\omega t} \\ i\dot{a}_- = \frac{\omega_1}{2} e^{i\omega t} a_+ - \frac{\omega_0}{2} a_- \end{cases}$$

Changement de variable

$$\begin{cases} \alpha(t) = a(t) \exp\left(-\frac{E'_0 - A}{i\hbar} t\right) \\ \beta(t) = b(t) \exp\left(-\frac{E'_0 + A}{i\hbar} t\right) \end{cases}$$

$$b_{\pm}(t) = a_{\pm}(t) \exp\left(\pm \frac{i\omega t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2i\dot{\alpha} = -\omega_1 \beta \left(e^{i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t} \right) \\ 2i\dot{\beta} = -\omega_1 \alpha \left(e^{-i(\omega - \omega_0)t} + e^{i(\omega + \omega_0)t} \right) \end{cases}$$

$$\ddot{b}_{\pm} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 b_{\pm} = 0$$

Palatations caractéristiques :

$$\omega_0 = \frac{2A}{\hbar}$$

$$\omega_0 = -\frac{g\gamma B_0}{\hbar}$$

$$\omega_1 = \frac{E_0 d}{\hbar}$$

$$\omega_1 = -\frac{g\gamma B_1}{\hbar}$$

FIGURE 8 - Analogie MASER-Spin 1/2

• Résonance $\omega = \omega_0$ • $\Phi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \exp\left(\frac{E_0 - A}{i\hbar} t\right) \\ \cos\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right) \exp\left(\frac{E_0 + A}{i\hbar} t\right) \end{pmatrix}$ $P_A(t) = \sin^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)$	• Pas d'approximation • $\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} -i\frac{\omega_1}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \exp\left(\frac{i\omega t}{2}\right) \\ \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + i\frac{\omega - \omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right] \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right) \end{pmatrix}$ • $P_+(t) = \left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$
---	---

Évolution **oscillante** dans les 2 cas.

Résonance $\Rightarrow$ la probabilité atteint **1**

FIGURE 9 – Analogie MASER-Spin 1/2 (suite et fin)

Conclusion

LASER, coefficients d'Einstein, emission-absorption...

Questions, remarques...