

LP47 - PHÉNOMÈNE DE RÉSONANCE DANS DIFFÉRENTS DOMAINES DE LA PHYSIQUE

April 2, 2015

Solène Le Corre & Guillaume Laurent

Niveau : L2

Bibliographie

♣ *cap prepa PCSI*,
♣ *H prepa Ondes*,
♣ *Mécanique 1*, **Feynmann**
♣ *Bup 851*, **JP Roux**
♣ *Hyperfréquences*, **Gardiol**

→ oscillateur RLC.
→ Oscillateurs couplés
→ analogie électromécanique
→ La corde de Melde
→ Le micro onde

Prérequis

- Electronique
- Oscillateur harmonique et amorti en régime libre
- phénomène ondulatoire (corde de melde, onde électromagnétiques)

Expériences

☞ circuit RLC

Contents

1	Le circuit RLC en régime sinusoïdal	2
1.1	Mise en equation	2
1.2	Résonance et facteur de qualité	3
1.3	Résonance en puissance	3
2	Oscillateur mécanique	4
2.1	Analogie électromécanique	5
2.2	Oscillateur à deux degrés de liberté	5
2.3	La corde de Melde	6
3	Quelques applications	7
3.1	Le four à micro ondes	7
3.2	La spectroscopie IR en chimie	7

Introduction

Soumis à une excitation périodique, certains systèmes présentent un comportement spectaculaire.

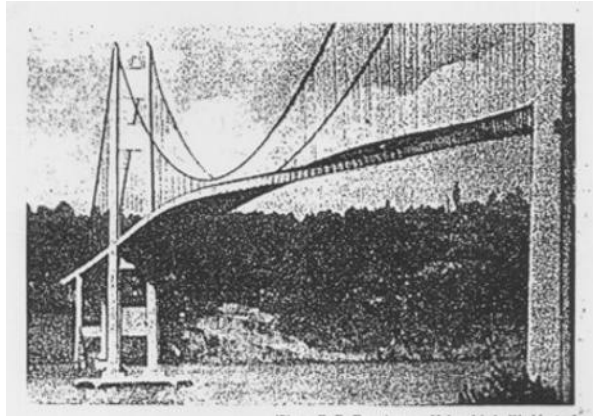


Figure 1: Le Tacoma Narrows Bridge juste avant sa destruction

On se propose de formaliser un tel comportement.
On se place dans le cadre des systèmes linéaires.

↓ *Étudions un circuit RLC classique.*

1 Le circuit RLC en régime sinusoïdal

On sait qu'un circuit RLC possède une fréquence propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Que se passe-t-il si on impose via l'alimentation une fréquence d'excitation quelconque?



On a un circuit RLC avec un facteur de qualité assez grand. On montre que pour des fréquences grandes ou petites devant la fréquence propre, l'intensité est faible. En revanche, pour une fréquence proche de la fréquence propre, l'intensité est importante.

1.1 Mise en équation

On démontre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i :

$$L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

On sait que la solution de cette équation différentielle est une combinaison linéaire de la solution de l'équation :

$$0 = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

(solution transitoire), et d'une solution particulière de l'équation homogène. On a déjà vu que la solution transitoire est exponentiellement amortie avec un temps $\tau = \frac{L}{R}$, est on se place donc dans le régime stationnaire. On peut alors écrire la solution sous forme complexe : $\underline{i} = \underline{i}_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{e} = e_0 e^{j\omega t}$. Il vient alors immédiatement :

$$\underline{i}_0 = \frac{j\omega}{L((\omega^2 - \omega_0^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q})} e_0$$

ou $Q = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{\omega_0 \tau}{2}$ est appelé le *facteur de qualité*. Nous reviendrons sur la signification de cette dénomination

↓ *Voyons ce que nous pouvons tirer d'une telle formulation*

1.2 Résonance et facteur de qualité

La norme de i_0 a pour expression :

$$i_0 = \frac{\omega}{L\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{\omega\omega_0}{Q})^2}} e_0$$

Le tracé de $i_0 = f(\omega)$ fait apparaître plusieurs points importants :

1. i_0 présente un maximum en $\omega_r = \omega_0$.
2. la largeur du pic est proportionnelle à Q

A partir de ces considérations, on peut définir :

- *une résonance* : c'est lorsque l'amplitude de la réponse d'un système excité à une fréquence particulière ω_r passe par un maximum. On constate que dans ce cas particulier, il y a résonance lorsque $\omega = \omega_0$ et que dans ce cas, $i_{max} = Qe_0\sqrt{\frac{C}{L}}$
- *l'acuité de la résonance* : C'est le rapport $\frac{\Delta\omega}{\omega_r}$ où $\Delta\omega$ est la largeur de la bande de pulsation pour lesquelles $i(\omega) \geq i_{max}/\sqrt{2}$. On constate ici que $\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = 1/Q$

Retour sur le facteur de qualité

On constate que $\frac{\Delta\omega}{\omega_r} = 1/Q$: *plus le facteur de qualité est important, plus la résonance est piquée autour de ω_r .*

De plus, $i_{max} = Qe_0\sqrt{\frac{C}{L}}$: *plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance en intensité est marquée.*

Pour un circuit RL idéal (oscillateur harmonique), le facteur de qualité est infini et la résonance ne peut exister que pour $\omega = \omega_0$. En réalité, les fil, la bobine et la capacité possèdent des résistances, et on est jamais dans le cas idéal. $Q = \frac{\omega_0}{2\tau}$ correspond au nombre d'oscillation pendant le temps caractéristique d'amortissement du régime transitoire.

Résonance en tension?

On peut tout à fait faire le même raisonnement pour u_C la tension aux bornes du condensateur, et aboutir à l'expression de sa norme :

$$u_C = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{\omega\omega_0}{Q})^2}} e_0$$

On constate alors que u_C possède une résonance en $\omega_0(1 - \frac{1}{2Q^2})$, à condition que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. A cause de la dépendance en Q , cette formulation de la résonance est impropre, et c'est pourquoi on se cantonnera au cas de la résonance en intensité.



Le critère énergétique est un critère pertinent en électronique. Étudions donc cet aspect de la résonance.

1.3 Résonance en puissance

On part de la loi des mailles :

$$\begin{aligned} e &= u_C + Ri + u_L \\ &= U_C + Ri + L\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

On multiplie par i :

$$ei = u_C i + Ri + Li\frac{di}{dt}$$

Or $i = C\frac{du_C}{dt}$ Donc :

$$ei = Cu_C \frac{du_C}{dt} + Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

$$\underbrace{ei}_{P_F} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_C^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right)}_{P_{LC}} + \underbrace{Ri^2}_{P_J}$$

Où P_F est la puissance fournie, P_{LC} est la puissance reçue par la bobine et la capa, et P_J est la puissance dissipée par effet joule. Sur une période, on sait que $\langle P_{LC} \rangle = 0$ donc $\langle P_F \rangle = \langle P_J \rangle$.

On rappelle que $\langle P_J \rangle = R \langle i^2 \rangle = \frac{R}{2} \text{Re}(ii^*)$

Donc :

$$P_J = \frac{R}{2L^2} \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{\omega\omega_0}{Q})^2} e_0^2$$

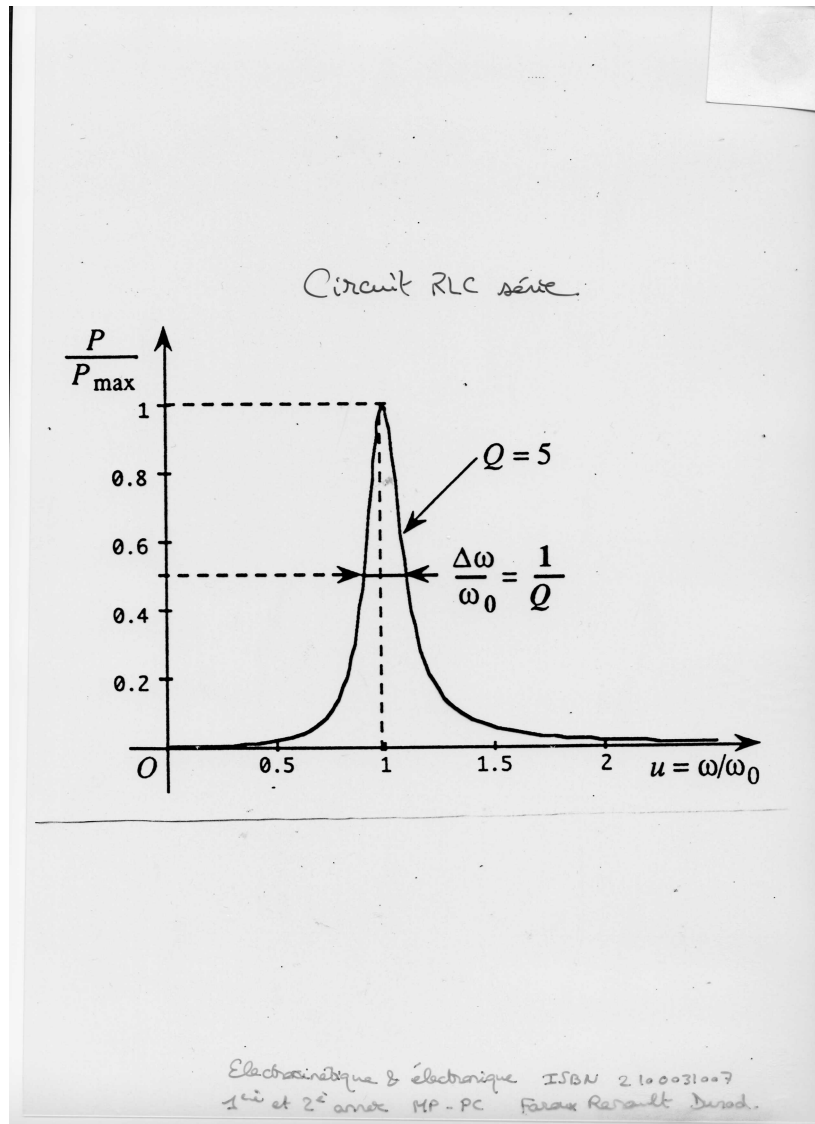


Figure 2: Résonance en puissance

Interprétation : Le circuit présente une résonance en puissance. La puissance fournie au circuit par le générateur (et ensuite dissipée par effet joule) augmente drastiquement lorsque la fréquence d'excitation avoisine la fréquence propre du circuit RLC.

↓ On a illustré le phénomène de résonance sur un exemple tiré de l'électronique sans toutefois exhiber le caractère général de ce phénomène.

2 Oscillateur mécanique

2.1 Analogie électromécanique

Remarque préliminaire : On a traité le circuit RLC. Ici, on se propose de développer une comparaison entre ce système électronique et un système mécanique.

On se place dans un référentiel galiléen. Intéressons-nous au comportement d'une masse liée à un support fixe par un ressort de raideur k , et subissant des frottements fluides de coefficient γ . L'équation du mouvement se déduit du produit fondamental de la dynamique :

$$m \frac{dv}{dt} = -\gamma v - kx + F_{excitation}$$

Pour se ramener à une situation similaire au circuit RLC, on dérive par rapport au temps :

$$m \frac{d^2v}{dt^2} + \gamma \frac{dv}{dt} + kv = \frac{dF_{excitation}}{dt}$$

On constate immédiatement des points communs entre cette équ. diff et celle du circuit RLC :

circuit RLC	système mécanique
tension d'excitation e	force d'excitation F
intensité i	vitesse v
inductance L	masse m
résistance R	coef de frottement fluide γ
capacité C	inverse de la raideur du ressort k

Ainsi, de même que l'on observe une résonance en intensité pour un circuit RLC, on observe une résonance en vitesse pour un tel système mécanique. La fréquence de résonance et le facteur de qualité se déduisent de l'analogie :

circuit RLC	système mécanique
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$Q = \omega_0 \frac{L}{R}$	$Q = \omega_0 \frac{m}{\gamma}$

↓ Il y a équivalence entre ces deux problèmes. Étudions maintenant un système plus compliqué présentant deux degrés de liberté. Ce système possède-t-il une résonance?

2.2 Oscillateur à deux degrés de liberté

Considérons deux masses M identiques liées à des supports fixes par des ressorts identiques de raideur K , et entre elles par un ressort de raideur k cf transparent. On considère le cas sans frottement. Le calcul des amplitudes des vitesses est fait dans le H Prepa, et conduit à :

$$\begin{aligned} v_1(\omega) &= \frac{\omega F_0}{2M} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \\ v_2(\omega) &= \frac{\omega F_0}{2M} \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{aligned}$$

où $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{K+2k}{M}}$

Points communs et différences avec l'oscillateur à un degré de liberté

Ce système possède deux fréquences de résonance correspondant aux deux fréquences propres du système. Ici la résonance est associée à un maximum *local* de l'amplitude.

Pour la masse 1, il existe une pulsation $\omega_a = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}}$ pour laquelle v_1 s'annule. C'est une *fréquence d'anti-résonance*.

↓ En rajoutant un degré de liberté, on rajoute une fréquence de résonance. Que se passe-t-il si on passe à un très grand nombre de degrés de liberté ?

2.3 La corde de Melde

On considère maintenant une corde de Melde, déjà vue auparavant. Chaque segment infinitésimal de la corde est un oscillateur couplé aux deux segments adjacents. Dans la limite continue, la corde possède une infinité de degrés de liberté.

La corde est excitée par un pot vibrant à une de ses extrémité, et fixée à un support fixe à l'autre extrémité. La corde est de longueur L .

On se propose d'expliciter l'amplitude de vibration en tout point M de la corde.

On fait plusieurs hypothèses d'études :

1. Il n'y a pas de frottement fluide
2. La corde est de raideur négligeable

On note r et r' les coefficients de réflexion respectivement en 0 et en L . On note a l'amplitude de l'excitation au niveau du pot vibrant et $A_i(x)$ l'amplitude (complexe) en x de l'onde réfléchi i fois :

$$\begin{aligned} A_0(x) &= ae^{-j\frac{2\pi}{\lambda}x} \\ A_1(x) &= -r'ae^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda} + \frac{2\pi}{\lambda}x} \\ A_2(x) &= rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}}A_0(x) \\ A_3(x) &= -rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}}A_1(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Alors on peut exprimer l'amplitude complexe totale en x :

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i(x) \\ &= ae^{-\frac{2j\pi}{\lambda}x} \sum_{i=0}^{\infty} \left(rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \right)^i - ar'e^{\frac{2j\pi}{\lambda}x} \sum_{i=0}^{\infty} \left(rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \right)^i \\ &= a \left(e^{-\frac{2j\pi}{\lambda}x} - r'e^{\frac{2j\pi}{\lambda}x} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \right)^i \end{aligned} \tag{1}$$

Or la série géométrique $\sum_{i=0}^{\infty} \left(rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}} \right)^i$ converge et vaut :

$$\frac{1}{1 - rr'e^{-2j\frac{2\pi L}{\lambda}}}$$

On en déduit l'amplitude de l'oscillation en x :

$$|A|^2 = a^2 \frac{(1 - r')^2 + 4r' \sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}(L - x))}{(1 - rr')^2 + 4rr' \sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}L)}$$

Les maxima d'amplitudes (ventres) vérifient :

$$|A|_{max}^2 = a^2 \frac{(1 + r')^2}{(1 - rr')^2 + 4rr' \sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}L)}$$

Et on constate en particulier que l'amplitude est maximale pour $\sin^2(\frac{2\pi}{\lambda}L) = 0$ ie si L est un multiple demi-entier de la longueur d'onde. Pour $L = n\frac{\lambda}{2}$, on peut montrer que le facteur de qualité est $Q = \frac{n\pi\sqrt{rr'}}{1 - rr'}$.

Définition

Ce type de résonateur où la dimension spatiale fixe les fréquences permises est appelé une *cavité résonante*.

On l'utilise très communément en optique (cavité Fabry perot) pour accorder un laser ou réaliser du filtrage interférentielle, en acoustique (exemple de la flûte).

3 Quelques applications

3.1 Le four à micro ondes

Le principe du four à micro onde est de chauffer de façon uniforme et rapide un aliment sans pour autant chauffer son environnement (four classique). L'idée est d'exciter spécifiquement un mode de vibration de la molécule d'eau : ici le mode rotationnel. La désexcitation par les chocs moléculaire entraîne un accroissement de la température.

La fréquence de résonance du mode rotationnel est de l'ordre de 100 GHz. On se place à 2.45 GHz pour éviter la résonance. En effet, plus on est proche de la résonance, plus les molécules d'eau absorbent et donc moins l'onde pénètre en profondeur dans l'aliment. On est pas trop loin de la résonance non plus pour ne pas limiter l'absorption.

Pour obtenir une fréquence de 2.45 GHz, on utilise une cavité résonnante accordée à cette fréquence, appelé magnétron.

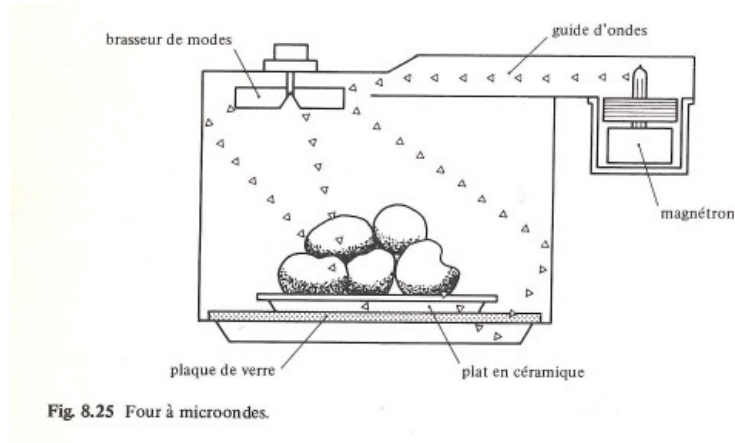


Figure 3: Un four à micro ondes

3.2 La spectroscopie IR en chimie

L'absorption sélective en fonction de la longueur d'onde est le principe de base de la spectroscopie IR. Par analogie avec un système mécanique, on peut assimiler une liaison chimique à un ressort entre deux masses. On peut calculer la longueur d'onde correspondant à la fréquence du mode vibrationnel :

$$\lambda = 2\pi c \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

Où μ est la masse réduite et k est la constante de raideur du ressort. En ordre de grandeur, pour des liaisons chimiques, λ est dans l'infrarouge. Un champ électromagnétique de longueur d'onde correspondante sera donc fortement absorbé par l'échantillon. La mesure de l'intensité transmise nous renseigne donc sur la présence ou non de certaines liaisons chimiques.

Conclusion

On a vu que le phénomène de résonance est présent dans de nombreux domaines de la physique. C'est parfois un phénomène que l'on désire éviter (les résonances mécanique dans la construction par exemple), et c'est aussi une signature caractéristique du système très utilisé en spectroscopie. On n'aura pas parlé ici des nombreuses applications en filtrage optique (cavités Fabry Perot).