LP49 – Oscillateurs, portraits de phase, non-linéarités

21 février 2017

Jérémy Sautel & Alexandre Michel

Songez qu'Arthur Rubinstein s'est fait chier des années avec La Lettre à Elise *avant d'interpréter ces nocturnes de Chopin qui ont assuré sa gloire.*
Frédéric DARD

Niveau : L3

Commentaires du jury

2015 : L'intérêt de l'utilisation des portraits de phase doit ressortir de la leçon.

2013 : [À propos du nouveau titre] Les aspects non-linéaires doivent être abordés dans cette leçon sans développement calculatoire excessif, en utilisant judicieusement la notion de portrait de phase. Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.

Jusqu'en 2013, le titre était : Exemples d'effets de non linéarité sur le comportement d'un oscillateur.

2011, 2012 : Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.

2010 : L'analyse de l'anharmonicité des oscillations du pendule pesant ne constitue pas le coeur de la leçon. Différents effets des non linéarités doivent être présentés.

2007, 2008 : Le régime forcé des oscillateurs non linéaires est également envisageable.

2003 : La leçon ne doit pas se limiter à une résolution d'équations différentielles non linéaires. Une discussion des effets en liaison avec la forme de l'énergie potentielle peut être intéressante. La présentation d'un oscillateur de van der Pol précablé sur une plaquette reste trop souvent théorique. En quoi ce système est-il représentatif de problèmes usuels en électronique ?

Jusqu'en 2002, le titre était : Exemples d'effets de non linéarité sur le comportement d'un oscillateur.

2000 : Celle leçon est parfois présentée de façon très abstraite. Par ailleurs on doit s'efforcer de varier les exemples, en tout cas de ne pas les limiter exclusivement à l'électronique.

1999 : La simple étude de la non-linéarité du pendule simple et du vase de Tantale ne peut suffire. Il faut dégager clairement, sur différents exemples, l'impact des non-linéarités sur (selon les cas) la période, l'amplitude des oscillations, voire la forme du signal, sa valeur moyenne.

1997 : Le jury regrette que certains candidats passent beaucoup de temps à traiter de l'effet relativement banal de certaines non-linéarités, comme l'influence de l'amplitude du mouvement sur la période d'oscillation d'un pendule, sans évoquer les phénomènes, beaucoup plus riches, d'instabilités ou de transition vers le chaos.

Bibliographie

✍ *Mécanique 1*, **J.-P. Faroux, J. Renault** ⟶ Toujours utile, notamment ici sur l'Ansatz et l'introduction aux bifurcations

✍ *Mécanique 1*, **BFR** ⟶ Rétablissons ici M. Bertin (*cf.* LP14), dont la contribution ne fut en réalité que trop brève.

✍ *Non linear dynamics and chaos*, **Strogatz** ⟶ Précis, complet, et loin d'être dénué d'humour !

✍ *Physique PCSI*, **M.-N. Sanz** ⟶ L'introduction aux bifurcations y est très bien traitée.

✍ *Electronique expérimentale*, **M. Krob** ⟶ Un grand classique, qui nous montre ici comment réaliser l'élément non-linéaire de l'oscillateur de Van der Pol, assez simplement.

✍ *Physique des solitons*, **T. Dauxois** ⟶ Nec plus ultra.

Prérequis

➢ Mécanique du point, incluant les référentiels non galiléens ;

➢ Plan de phase pour un mouvement à un degré de liberté ;

➢ Electrocinétique et électronique.

Table des matières

Introduction

Jusqu'ici, nous savons résoudre analytiquement, en mécanique, deux grands types de problèmes : la chute libre et l'oscillateur harmonique. Nous nous ramenons d'ailleurs souvent à ce dernier cas lors de l'étude d'un oscillateur bien connu, le pendule simple, alors que l'équation générale de son mouvement est non linéaire. L'objet de cet exposé est donc de présenter des méthodes pour aborder les non-linéarités des oscillateurs, et de mettre en exergue la richesse physique qu'elles contiennent.

1 Oscillations libres

✍ BFR, FR

1.1 Le pendule simple

On considère un point matériel de masse m, fixé à l'extrêmité d'une tige rigide de longueur l, dont la masse sera négligée et dont l'autre extrêmité est fixe. Cet ensemble est soumis à la pesanteur $\overrightarrow{g}$, et on note θ l'angle que fait la tige avec la verticale. On néglige tout frottement. L'application du principe fondamental de la dynamique au point matériel seul donne, si l'on considère sa composante orthoradiale, l'équation suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

Bien sûr, on peut résoudre cette équation en la linéarisant dans le cas de petites oscillations ($\theta_{max} << 1$, qui donne $\sin\theta \simeq \theta$), pour lesquelles on se ramène à un oscillateur harmonique de pulsation propre $\sqrt{g/l}$. Mais pour des angles θ_{max} de l'ordre de $\pi/2$, ou même encore plus, cette approximation devient clairement trop grossière. En particulier, on constate qu'il est possible de faire tourner le pendule... Essayons alors d'obtenir un portrait de phase général qui rendrait compte de la dynamique de ce pendule simple. En la multipliant par $\dot{\theta}$ et en intégrant par rapport au temps, on obtient aisément :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\theta = E \tag{2}$$

où E est une constante d'intégration. Cette notation est due au fait qu'elle correspond, à un facteur ml^2 près, à l'énergie totale du système (qui est conservée puisque toute dissipation a été négligée). Le tracé de $\dot{\theta}$ en fonction de θ peut alors prendre plusieurs alures, suivant les valeurs de E. On obtient alors un beau portrait de phase :

Note : le blanc ci-dessus N'EST PAS un espace de temporisation. Il s'agit bien pour vous de reproduire ici le portrait de phase que M. Michel va vous dessiner avec une *maestria* sans précédent au tableau. La direction signale que si l'envie vous prend d'anticiper son tracé, libre à vous. Après tout, le client est roi ! Sachez néanmoins que si d'aventure vous vous loupiez, et qu'il en consécutait un enlaidissement notoire de votre poly, vous ne pourriez décemment vous en prendre qu'à vous-mêmes.

On peut par ailleurs compléter ce portrait de phase en prenant en compte la dissipation. Pour ce faire, la direction, toujours bienveillante (méfiance : ce n'est pas le cas de toutes les directions...), vous conseille d'utiliser une couleur différente. On peut obtenir ces nouvelles trajectoires qualitativement, en connaissant le comportement expérimental d'un pendule amorti par frottements fluides, ou de façon plus précise en ajoutant un terme en $\alpha\dot{\theta}$ dans l'équation du mouvement.

Ce portrait de phase présente des courbes fermées, c'est-à-dire qu'il existe des trajectoires prériodiques. Par ailleurs, le décompte de θ s'effectuant à 2π près, on peut également définir une période du mouvement dans le cas de rotations du pendule. Penchons-nous sur l'expression de la période du mouvement.

1.2 Période

On se place ici dans le cas non amorti. On note $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ la fréquence propre du pendule. Elle donne directement la période du mouvement $T_0 = 2\pi/\omega_0$ dans le cas de petites oscillations. Or, en général, la non-linéarité du terme en sinus est à l'origine de l'apparition d'harmoniques d'ordre supérieur. Pour expliciter la première d'entre elles, on va effectuer un développement limité du sinus au premier ordre non nul supérieur à 1. Dans le cas du sinus, il s'agit du troisième ordre :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \mathcal{O}(\theta^5) \tag{3}$$

On obtient alors, en se limitant à l'ordre 3 en θ, l'approximation suivante de l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) = 0 \tag{4}$$

On a donc quasiment un oscillateur harmonique, au terme en θ^3 près. Pour une solution comportant une vibration de pulsation ω, ce terme entraîne l'ajout de vibrations à la pulsation 3ω (il suffit pour s'en convaincre de développer $\sin^3(\omega t)$). A partir de ce constat, une méthode usuelle consiste alors à introduire un *ansatz* (« commencement » en allemand), c'est-à-dire une forme approchée de la solution, de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \varepsilon\theta_0 \sin(3\omega t) \tag{5}$$

où $\varepsilon << 1$. Cette dernière hypothèse est inspirée par la prépondérance du premier terme dans la limite $\theta_0 << 1$.

On exprime alors simplement $\ddot{\theta}$ et θ^3 (en se limitant à l'ordre 1 en ε pour ce dernier), avant de les réinjecter dans notre équation approchée. On a alors :

$$({\omega_0}^2 - \omega^2)\theta_0 \sin(\omega t) - 9\omega^2\varepsilon\theta_0 \sin(3\omega t) + {\omega_0}^2\varepsilon\theta_0 \sin(3\omega t) - \frac{{\omega_0}^2}{6}{\theta_0}^3 \sin^3(\omega t) - \frac{{\omega_0}^2}{2}\varepsilon{\theta_0}^3 \sin(3\omega t)\sin^2(\omega t) = 0.$$

On utilise alors la formule trigonométrique suivante : $\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4}\sin(\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t)$.

En ne gardant ensuite que les termes d'ordre 0 en ε et de pulsation ω, on trouve :

$$\boxed{\omega \simeq \omega_0 \sqrt{1 - \frac{{\theta_0}^3}{8}}} \tag{6}$$

Ce dernier résultat, qui porte le nom de **formule de Borda**, met en exergue la perte d'isochronisme aux grands angles : la période des oscillations du pendule dépend de leur amplitude ! Dans le portrait de phase, les trajectoires fermées ne sont plus des ellipses, dès lors que $\theta_0 << 1$ n'est plus vérifiée. Au fur et à mesure que θ_0 croît, cette distorsion gagne en importance, jusqu'au cas limite où $\theta_0 = \pi$.

Dans le cas du pendule simple, les non-linéarités sont inhérentes à la dynamique. En effet, le paragraphe qui s'achève a bien mis en évidence leur influence, toute dissipation exclue. Néanmoins, la dissipation peut aussi être source d'anharmonicité, comme nous allons le voir sur un exemple qui ne présente a priori aucune non-linéarité : notre cher oscillateur harmonique.

1.3 Oscillateur harmonique amorti par frottements solides

On considère un pavé de masse m, attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, dont l'autre extrêmité est maintenue fixe. Ce solide repose sur le sol, ce qui est à l'origine d'une force de frottement solide entre le solide et le sol. Nous négligerons par contre toute dissipation du type frottements fluides. La position à vide du ressort est prise comme origine des abscisses. On écarte le solide à la position $x_0 > 0$ suffisante pour que la force de rappel du ressort le mette en mouvement malgré le frottement solide (ceci s'écrit $kx_0 \geq \mu_S mg$). Tant qu'il y a glissement, la norme de la force de frottement solide est donnée par $||\overrightarrow{T}|| = \mu_D mg$, et par ailleurs $\overrightarrow{T}$ est de même direction et de sens opposé à la vitesse $\overrightarrow{v}$ du solide. L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$\ddot{x} + \mu_D g \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + \frac{k}{m} x = 0 \tag{7}$$

On voit d'ores et déjà que cette équation différentielle en $x(t)$ est non linéaire, du fait (Camille, c'est pour toi !!!) de la présence du terme en $\dot{x}/|\dot{x}|$, éminemment non-linéaire. L'explicitation de la valeur absolue ($|\dot{x}| = \sqrt{\dot{x}^2}$) suffit à qui souhaite s'en convaincre. Face à cette embûche apparente, nous allons de nouveau traiter le problème *via* les portraits de phase. Considérons la première phase du mouvement : vu que $x_0 > 0$ et qu'il y a glissement à cause du rappel du ressort, on a $\dot{x} < 0$. Donc, en posant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $a = \mu_D mg/k$, on a l'équation :

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 (x - a) = 0 \tag{8}$$

Alors, compte tenu des conditions initiales, $x(t) - a = (x_0 - a)\cos(\omega_0 t)$ d'où $\dfrac{\dot{x}(t)}{\omega_0} = -(x_0 - a)\sin(\omega_0 t)$.

Dans un portrait de phase en coordonnées $(x, \dot{x}/\omega_0)$, ceci correspond simplement à un demi-cercle inférieur de centre $(a, 0)$ et de rayon $x_0 - a$. A la fin de cette étape, on est à $x_1 = -x_0 + 2a$ et $\dot{x} = 0$. Pour que le ressort puisse alors repousser le solide, il faut que $k(x_0 - 2a) \geq \mu_S mg$, autrement dit $x_0 \geq a(2 + \mu_S/\mu_D)$. Si cette condition n'est pas vérifiée, le mouvement s'arrête là. Si elle l'est, on a dorénavant $\dot{x} > 0$ et on va donc obtenir un demi-cercle supérieur de centre $(-a, 0)$ et de rayon $x_1 - a$. On procède ainsi de suite jusqu'à invalidation de la condition $|x_n| \geq a\mu_S/\mu_D$. En fait, sur chacune de ces phases du mouvement, l'équation est linéaire (c'est pour ça qu'il n'y a pas ici de génération d'harmoniques d'ordres supérieurs).

Note : même ceux qui ne suivent que d'une oreille distraite comprendront que ce nouveau blanc est gracieusement mis à leur disposition afin de tracer le portrait de phase de l'oscillateur harmonique amorti par frottements solides.

Nous venons de mettre en évidence et d'étudier deux exemples de non-linéarités présentées par des oscillateurs mécaniques. Remarquons que ceux-ci étaient somme toute assez simples de par leur conception. Maintenant, voyons ce qu'il en est en électrocinétique, autre grand domaine dans lequel les oscillateurs ont une place prépondérante. Nous allons en particulier nous pencher sur le cas de l'oscillateur de Van der Pol, pour lequel les oscillations sont dites entretenues. Cette qualification sera d'ailleurs justifiée.

2 Oscillations entretenues

✍ Krob

2.1 Elément non linéaire de l'oscillateur de Van der Pol

Ici, nous vous proposons (Camille, once again), d'après le livre de M. Krob, un circuit permettant d'obtenir la caractérisitique entrée-sortie suivante :

$$\boxed{s(t) = -\alpha e(t) + \beta e^3(t)} \tag{9}$$

Dans cette écriture, on a $\alpha = K\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\left(\frac{R_4}{R_3+R_4}\right)V_0 > 0$ et $\beta = \frac{K^2 R_2}{R_1} > 0$.

On peut visualiser cette formule en alimentant l'élément non linéaire avec une tension sinusoïdale délivrée par un GBF. Il suffit alors d'utiliser un oscilloscope en mode XY. On peut intuiter ici que, comme dans le cas du calcul de la formule de Borda, le terme en e^3 va pouvoir être utilisé pour générer des harmoniques d'ordre 3.

2.2 Equation de Van der Pol

On insère désormais l'élément non linéaire (fait maison, comme le souligne à juste titre la direction) dans le montage présenté ci-dessous, qui consiste à boucler la sortie sur l'entrée via un intégrateur non inverseur.

Par un calcul laissé à la sagacité du lecteur (qui se rapellera avec profit l'histoire de Rubinstein et de *La Lettre à Elise*...), on montre que la tension notée $s(t)$ sur le schéma ci-dessus vérifie l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\omega_0\left(\frac{s^2}{{s_0}^2} - 1\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 s(t) = 0} \tag{10}$$

où on a noté $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}}$ ainsi que $\varepsilon = \sqrt{\frac{R_1R_2C_2}{C_1}}\left(\frac{\alpha R_{C_1} - R_{NL}}{R_{NL}R_{C_1}}\right)$ et ${s_0}^2 = \frac{\alpha R_{C_1} - R_{NL}}{3\beta R_{C_1}}$.

En posant $\tau = \omega_0 t$, $x = s/s_0$ et $x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$, cette équation se réécrit :

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0 \tag{11}$$

Cette équation différentielle est bien sûr non linéaire de par le terme en x^2x' qu'elle comporte. Deux cas se présentent alors, en fonction des caractéristiques des composants du circuit :

- $\varepsilon > 0$: si $x < 1$, le terme en x' est amplificateur et x croît vers 1. Si $x > 1$, le terme en x' est dissipatif et x décroît vers 1. On observe alors des **oscillations auto-entretenues** de $s(t)$, ce qui justifie par ailleurs le titre de cette partie ;
- $\varepsilon < 0$: si $x < 1$, le terme en x' est dissipatif et x décroît vers 0. Si $x > 1$, le terme en x' est amplificateur et x croît jusqu'à saturation d'un des amplificateurs opérationnels utilisés. Dans tous les cas, le système ne présente **pas d'oscillations en régime permanent**. Il n'aura d'ailleurs échappé à personne que dans ce cas, s_0 n'est pas même défini.

On se placera bien sûr dans toute la suite dans le cas $\varepsilon > 0$. L'introduction d'un ansatz similaire à celui utilisé pour le calcul de la formule de Borda (justifié par le fait que le terme non linéaire est à nouveau d'ordre 3 en x) montre que les non-linéarités jouent dans la solution un rôle proportionnel à $|\varepsilon|$. La direction juge opportun de renvoyer de nouveau le lecteur à ses gammes...

2.3 Cas limites lorsque $\varepsilon << 1$ et $\varepsilon >> 1$

2.3.1 Limite $\varepsilon << 1$

Dans ce cas-ci, on peut approximer la solution par $s(t) = s_0 \cos(\omega_0 t)$. Comme on pouvait s'y attendre, cela revient à étudier l'oscillateur harmonique et on obtient des ellipses dans le plan de phase. Néanmoins, il existe un régime transitoire (à compter de la fermeture du circuit) au cours duquel les oscillations s'établissent. Le portrait de phase présente donc en toute rigueur un cycle limite vers lequel la dynamique du système tend, et ce d'autant plus vite que $x << 1$.

2.3.2 Limite $\varepsilon >> 1$

Dans ce cas-là, il va falloir travailler un petit peu notre équation différentielle pour faire ressortir la physique du problème. Une réécriture d'une simplicité affligeante conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[x' + \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right] = -x \tag{12}$$

On pose maintenant $F(x) = x^3/3 - x$ et $y = F(x) + x'/\varepsilon$. Il vient aisément :

$$x' = \varepsilon(y - F(x)) \tag{13}$$

$$y' = -\frac{x}{\varepsilon} \tag{14}$$

A la lumière de ce couple d'équations, on peut interpréter et commenter le graphique obtenu à l'oscilloscope par M. Michel, non sans une certaine maîtrise de son sujet.

Décidément aujourd'hui, c'est Byzance (ou Versailles pour ceux qui préfèrent, mais la direction aime le bassin méditerranéen) : encore une occasion de peaufiner ce merveilleux poly à l'aide de votre coup de crayon !

Spécifions qu'une observation « INVERT » (XY ayant subi une symétrie d'axe (OY)) de la tension $u(t)$ (voir le schéma) en fonction de $s(t)$ permet bien d'obtenir l'allure de y en fonction de x. En effet, s vaut R_2C_2 que multiplie la dérivée temporelle de u, et on a vu que $x = -\varepsilon y'$.

BONUS :

On peut expliciter la période des oscillations auto-entretenues dans le cas $\varepsilon >> 1$. En négligeant les temps sur lesquels $y' \simeq 0$, on établit que :

$T = 2\int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t = 2\int_{x_A}^{x_B} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = 2\int_{x_A}^{x_B} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x.$

Or, entre A et B, on a $y \simeq F(x)$, d'où $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F'(x) = x^2 - 1$ et par ailleurs $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega_0 y' = -\frac{\omega_0}{\varepsilon}x$. On a alors :

$T = 2\int_{x_A}^{x_B} (x^2 - 1)\left(-\frac{\varepsilon}{\omega_0 x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}\int_{x_A}^{x_B}\left(-x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}\left[-\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_{x_A}^{x_B} = \frac{2\varepsilon}{\omega_0}\left(\ln\left(\frac{x_B}{x_A}\right) - \frac{{x_B}^2 - {x_A}^2}{2}\right).$

Or on montre que $x_A = 2$ et $x_B = 1$, ce qui nous fait finalement $T = \frac{\varepsilon}{\omega_0}(3 - 2\ln 2)$.

*Nous avons donc vu que le comportement d'un oscillateur varie considérablement au fur et à mesure que les éventuelles non-linéarités prennent de l'ampleur. Maintenant, nous allons revenir à un oscillateur mécanique, inspiré du pendule simple, pour introduire une conséquence importante de la non-linéarité : l'apparition de bifurcations. Entamons donc notre dernière partie, dans le plus grand des calmes (*Balkis dixit, Jérôme dixit*).*

3 Introduction aux bifurcations

✍ FR, Sanz

3.1 Position du problème

On considère ici un pendule simple en tout point identique à celui présenté en début de leçon. Seulement voilà, la tige est maintenant entraînée en rotation, à la pulsation ω, autour de l'axe (Oz), de sorte que le problème n'est plus plan. Pour se ramener à un problème plan, on se place dans le référentiel tournant à la pulsation ω, qui est non galiléen. Dans ce référentiel, la dynamique est celle du pendule simple, enrichie d'une force centrifuge. Là c'est clair, la direction fait du pied à la LP 03. Compte tenu de cette force centrifuge, le principe fondamental de la dynamique appliqué au point matériel de masse m donne :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \omega^2 \cos\theta\right) \sin\theta = 0 \tag{15}$$

Toujours plus de non linéarités ! Quelles sont alors les positions angualires d'équilibre pour ce pendule tournant ?

3.2 Equilibres et stabilité

La force centrifuge est à l'origine d'un travail $\delta W = ml \sin\theta \omega^2 \overrightarrow{e_\rho}.(l\mathrm{d}\theta \overrightarrow{e_\theta}) = \dfrac{ml^2\omega^2}{2} \sin(2\theta)\mathrm{d}\theta$.

On a donc une énergie potentielle associée telle que $-\mathrm{d}E_{p,c} = \delta W$, soit $E_{p,c} = \dfrac{ml^2\omega^2}{4} \cos(2\theta) + cste$.

L'énergie potentielle totale du système s'écrit donc :

$$E_p(\theta) = -mgl\cos\theta + \frac{ml^2\omega^2}{4} \cos(2\theta) + cste \tag{16}$$

On a donc $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = mgl\sin\theta - \dfrac{ml^2\omega^2}{2} \sin(2\theta) = ml^2 \left(\dfrac{g}{l} - \omega^2 \cos(\theta)\right) \sin\theta = ml^2 \left({\omega_0}^2 - \omega^2 \cos(\theta)\right) \sin\theta$.

Ainsi, les positions d'équilibre sont données par :

- $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ si $\omega < \omega_0$;
- $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \arccos\left(\dfrac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\right) = \theta_{eq}$ et $\theta = -\arccos\left(\dfrac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\right) = -\theta_{eq}$ si $\omega > \omega_0$;

Notons que l'équation du mouvement les donnait directement pour $\ddot{\theta} = 0$. Et la STABILITE ?

$\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = ml^2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left({\omega_0}^2 \sin\theta - \dfrac{\omega^2}{2} \sin(2\theta)\right) = ml^2 \left({\omega_0}^2 \cos\theta - \omega^2 \cos(2\theta)\right)$.

Pour $\theta = 0$, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta = 0) = ml^2 \left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)$, et $\theta = 0$ **est stable si, et seulement si,** $\omega < \omega_0$.

Pour $\theta = \pi$, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta = \pi) = ml^2 \left(-{\omega_0}^2 - \omega^2\right)$, et $\theta = \pi$ **est toujours instable**.

Pour $\theta = \pm\theta_{eq}$, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta = \pm\theta_{eq}) = ml^2 \left({\omega_0}^2 \dfrac{{\omega_0}^2}{\omega^2} - \omega^2 \cos(\pm 2\theta_{eq})\right)$.

Ainsi, vu que $|cosx| \leq 1$ et que $\pm\theta_{eq}$ ne sont définis que pour $\omega > \omega_0$, ils sont **toujours stables**.

Si on trace les positions d'équilibre stable en fonction de ω, on observe alors une bifurcation en $\omega = \omega_0$. La direction, consciencieuse jusqu'au bout, vous laisse parachever ce poly avec un graphe dans lequel vous mettrez, nous en sommes certains, une vibrante application !

Conclusion

Nous avons vu au cours de cette leçon différents types de non-linéarités que peuvent présenter des oscillateurs simples, en mécanique comme en électronique. Les deux principales sources qui ont été dégagées ici sont l'anharmonicité du potentiel et la dissipation (lorsqu'elle n'est pas proportionnelle à $\dot{x}$). Dans chaque cas, une résolution analytique serait *a priori* trop compliquée. Pour preuve, le calcul de la période du pendule dans le cas général fait appel à une intégrale elliptique (la direction renvoie les plus courageux vers le consortium Landau - GHP). On préfère alors utiliser les portraits de phase qui, bien qu'étant une construction graphique assez simple, constituent un outil extrêmement puissant lorsqu'il s'agit de prédire et d'analyser la dynamique.

Ouverture :

Equation de Korteweg - de Vries (solitons), équation de Schrödinger non linéaire. Explication des écarts à la loi de Dulong et Petit, ainsi que de l'effet Kerr optique à l'aide d'anharmonicités. A votre bon coeur (*le torréfacteur dixit*) ! ! !