

LP 30 : RAYONNEMENT DIPOLAIRE ÉLECTRIQUE

23 avril 2019

Alexandre Klein & Julien Pollet

Niveau : L3

Commentaires du jury

Bibliographie

- ♣ *Cap Prépa (PSI/PSI*)*, **Renvoizé** → vieux programme
- ♣ *Optique*, **Houard** → couleur de l'atmosphère
- ♣ *Onde électromagnétiques* **Garing** → ions colorés
- ♣ *Electromagnétisme* **Perez** → Calcul de champs
- ♣ *Mécanique 2* **Feynman** → Antennes

Pré-requis

- Electrostatique et Magnétostatique, dipole statique, ARQS
- Equation de Maxwell et Condition de jauge
- Solution de la forme potentiels retardés

Table des matières

1	Le dipôle oscillant	2
1.1	Cadre d'étude	2
1.2	Calcul des potentiels	2
1.3	Calcul des champs \vec{E} et \vec{B}	3
1.4	La puissance rayonné	4
2	Première applications : Les antennes	4
2.1	Antenne rectiligne	4
2.2	Exemple : distribution de courant sinusoïdale	5
2.3	Cas particulier de l'antenne demi-onde	6
3	Deuxième application : Diffusion de Rayleigh	7
3.1	Modèle de l'électrons élastiquement lié	7
3.2	Puissance rayonné via la Diffusion de Rayleigh	7
3.3	Application : pourquoi le ciel est bleu ?	8

Introduction

Les ondes électromagnétiques, mise en évidence par Maxwell au cours de la seconde moitié du 19e siècle ont aujourd'hui d'innombrables applications, allant de la télécommunication, à l'imagerie médicale en passant par les micro-ondes et les GPS ou encore bien d'autres...

Nous avons déjà parlé de ces types d'onde dans les leçons précédentes, mais nous ne savons toujours pas quelles solutions physiques pourraient être utilisées pour générer de telles ondes, c'est ce que nous allons essayer de voir dans cette leçon.

1 Le dipôle oscillant

1.1 Cadre d'étude

On a déjà mentionné le cas d'un dipôle électrostatique, mais que se passe-t'il lorsqu'on met en mouvement une des deux charges composant ce type de dipôle.

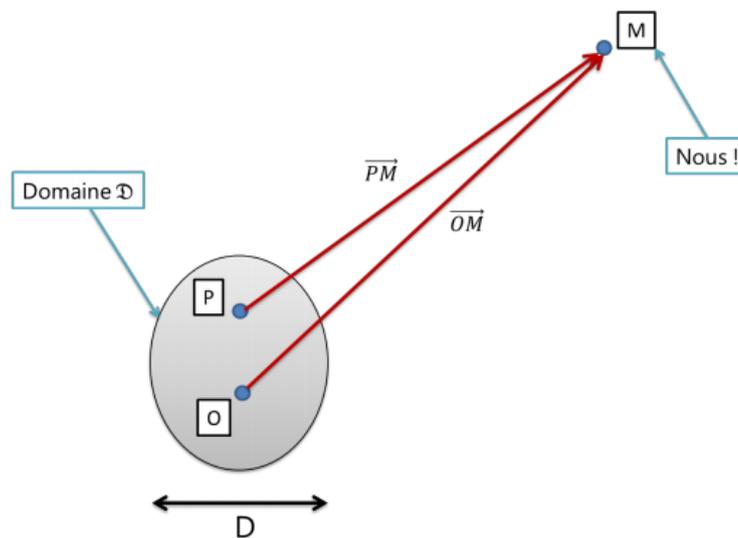


FIGURE 1 – Rayonnement du dipôle oscillant

On va donc se placer dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, dans lequel la particule chargée négativement est immobile et celle chargée positivement est animée d'une vitesse \vec{v} :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \cos(\omega t) \text{ avec } \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z \quad (1)$$

Dans ce cas le courant créé par le mouvement des charges sera : $\vec{i} = q \cdot \vec{v}$. Ce courant électrique va engendrer la création d'un champ magnétique en plus du champ électrique créé dans le cadre du dipôle électrostatique.

Nous allons également ajouter quelques hypothèses pour simplifier l'étude du problème :

- Approximation dipolaire : $a \ll r$
- ARQS des sources et charge non relativiste : $v \ll c$ et $T \gg a/c$
- Champ lointain : $cT = \lambda \ll r$

1.2 Calcul des potentiels

Les équations de Maxwell prises avec la condition de jauge de Lorentz nous donnent deux équations similaires pour le potentiel scalaire et vecteur :

$$\vec{\Delta} \vec{A} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{\Delta} V + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Les solutions de ce type d'équation sont bien connues, elles prennent en compte l'état de \vec{j} et ρ avant la durée de propagation. Connaissant \vec{j} et ρ on peut donc calculer \vec{A} et V via les formules dites de "potentiel retardé" :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (4)$$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (5)$$

Avec $t' - t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ la durée de propagation. On va calculer le potentiel vecteur \vec{A} pour lequel il n'y a qu'un courant ponctuel à considérer, donc :

$$\vec{A}(\vec{OM}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{i}(\vec{OP}, t')}{|\vec{OM} - \vec{OP}|} \quad (6)$$

Dans le cadre de l'approximation dipolaire on peut considérer que le point M est très éloigné du dipôle soit $OM \gg ON$ et donc $|\vec{OM} - \vec{OP}| \approx r$.

De plus avec l'ARQS des sources on peut écrire que le temps caractéristique du système est largement supérieur à la durée de propagation de l'onde dans le système $\tau \ll \frac{2\pi}{\omega}$ soit $\frac{a}{c} \ll \frac{2\pi}{\omega}$. On peut donc faire l'approximation suivante :

$$\vec{v}(t - \frac{MP}{c}) \approx \vec{v}(t - \frac{OM}{c}) - \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{OMc} \frac{d\vec{v}}{dt}(t - \frac{OM}{c}) \quad (7)$$

$$\text{or } \left| \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{OMc} \frac{d\vec{v}}{dt}(t - \frac{OM}{c}) \right| \approx \frac{a\omega}{2\pi c} v \ll v \quad (8)$$

On peut donc écrire que :

$$\vec{A}(\vec{OM}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^+ \cos(\omega(t - \frac{r}{c}))}{r} \vec{e}_z \quad (9)$$

Et si on écrit cette relation en fonction du moment dipolaire $\vec{P}(t) = q\vec{OP}$ on obtient un potentiel de la forme :

$$\vec{A}(\vec{OM}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{P}(t')}{dt'} \quad (10)$$

(Remarque : On peut généraliser cette formule si il y a plusieurs charges en prenant $\vec{P}(t) = \sum_i q_i \vec{OP}_i$ si il y a plus de charges)

1.3 Calcul des champs \vec{E} et \vec{B}

Il désormais très simple de calculer le champ \vec{B} (on notera $p = |\vec{p}(t')|$) :

$$\vec{B}(\vec{OM}, t) = \vec{rot} \vec{A} \quad (11)$$

$$\vec{B}(\vec{OM}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{rot} \left(\frac{1}{r} \frac{dp}{dt} \vec{e}_z \right) \quad (12)$$

$$\vec{B}(\vec{OM}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{grad} \left(\frac{1}{r} \frac{dp}{dt} \right) \wedge \vec{e}_z \quad (13)$$

$$\vec{B}(\vec{OM}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\frac{1}{c} \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dt} \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad (14)$$

On en déduit ensuite le champ électrique avec l'équation de Maxwell-Ampère et $\vec{j} = 0$: $\vec{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$

$$\vec{E}(\vec{OM}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(\frac{1}{rc} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{r^2} \right) (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 p}{dt^2} \sin \theta \vec{e}_\varphi \right] \quad (15)$$

On va maintenant faire une dernière approximation pour simplifier l'expression de ces deux champs en se plaçant loin du dipôle et on va par conséquent ne garder que les termes avec la plus petite puissance de r au dénominateur.

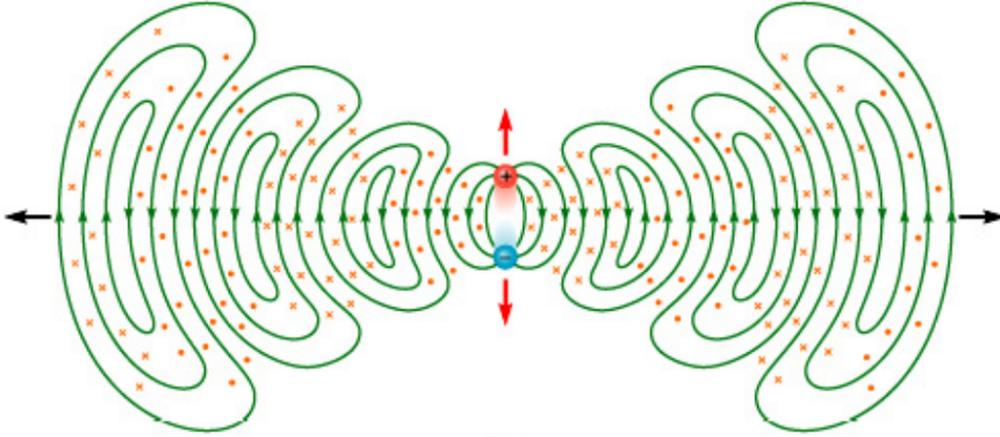


FIGURE 2 – Rayonnement du dipôle oscillant

$$\vec{E}(\vec{OM}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{c^2} \frac{d^2 p}{dt^2} \sin\theta \vec{e}_\theta \quad (16)$$

$$\vec{B}(\vec{OM}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{1}{c} \frac{d^2 p}{dt^2} \sin\theta \vec{e}_\varphi \quad (17)$$

Remarques :

1. Il n'y a une onde émise que si $\frac{d^2 p}{dt^2} \neq 0$, les charges sont accélérées
2. Décroissance de l'amplitude en $1/r$
3. Rayonnement anisotrope dû à $\sin(\theta)$
4. Rayonnement polarisé
5. Structure locale d'onde plane

1.4 La puissance rayonné

Le vecteur de Poynting caractérise la puissance rayonnée par l'onde, il est donnée par $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{\Pi} = \frac{\sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2 \vec{e}_r \quad (18)$$

Remarques :

1. $\vec{\Pi}$ est dirigé selon \vec{e}_r
2. L'énergie est rayonnée de manière anisotrope : pas d'énergie dans l'axe du dipole.
3. La puissance rayonnée a travers une sphère de centre O est constante : formule de LARMOR $P_{ray} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} < \left(\frac{d^2 p}{dt^2} \right)^2 >$

2 Première applications : Les antennes

2.1 Antenne rectiligne

Une antenne est en réalité un bout de conducteur qu'on peut assimiler à un dipole dans lequel les charges sont en mouvement. On prendra par exemple un cylindre si bien que :

$$\vec{j} = \frac{1}{lS} \sum_i q_i \vec{v}_i \quad (19)$$

On en déduit le lien entre I et le moment dipolaire :

$$\vec{I} = \int \vec{j} dS = \frac{1}{l} \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (20)$$

Ce sont donc les variations de l'intensité qui vont nous intéresser car on a $\frac{dI}{dt} = \frac{1}{l} \frac{d^2p}{dt^2}$
 Les Hypothèses faites précédemment pour le calcul du dipôle sont bien vérifiées :

1. Non relativiste $v \ll c$ (si I varie assez lentement)
2. Champ lointain et approximation dipolaire : on peut toujours se placer assez loin
3. ARQS : $l \ll \lambda$ n'est pas respecté pour des antennes de taille de l'ordre de λ . On doit considérer des morceaux infinitésimaux d'antenne!

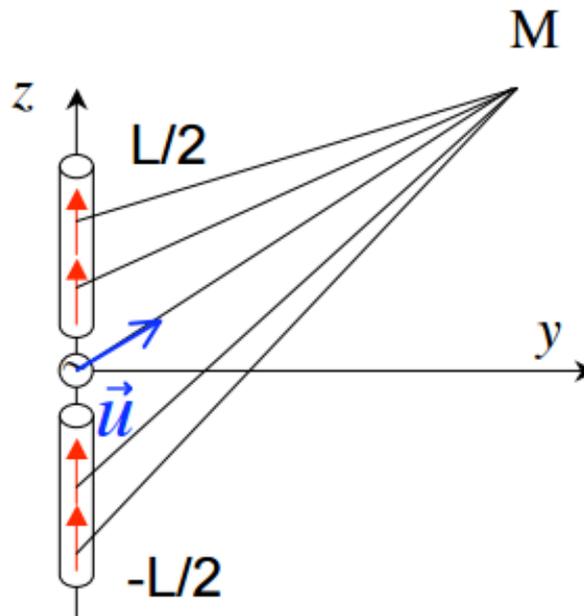


FIGURE 3 – Schéma d'une antenne rectiligne

On va donc calculer l'élément de champ créé par un morceau d'antenne $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{c^2} \frac{dI(z)}{dt} \sin\theta \vec{e}_\theta \quad (21)$$

On intègre sur toute l'antenne pour avoir le champ global rayonné par l'antenne :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_{z=-L/2}^{z=+L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{c^2} \frac{dI(z)}{dt} \sin\theta \vec{e}_\theta \quad (22)$$

2.2 Exemple : distribution de courant sinusoïdale

Une antenne est définie par le courant $I(z)$ qu'on lui impose, on choisit le plus souvent des courants sous la forme d'onde stationnaire avec pour conditions aux limites imposant que $I(z=L/2)=I(z=-L/2)=0$. On peut donc choisir des courants $I(z)$ de la forme :

$$I = I_0 e^{i\omega t} \cos kz \quad \text{ou} \quad I = I_0 e^{i\omega t} \sin kz \quad (23)$$

avec la relation $L = n\lambda/2$ (n est impair ou pair)

On peut donc calculer l'intégrale pour obtenir l'expression de \vec{E} le champ rayonné :

$$\vec{E} = i \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \quad \text{si } n \text{ est impair} \tag{24}$$

$$\vec{E} = i \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{(-1)^{n/2} - \cos\left(\frac{n\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \quad \text{si } n \text{ est pair} \tag{25}$$

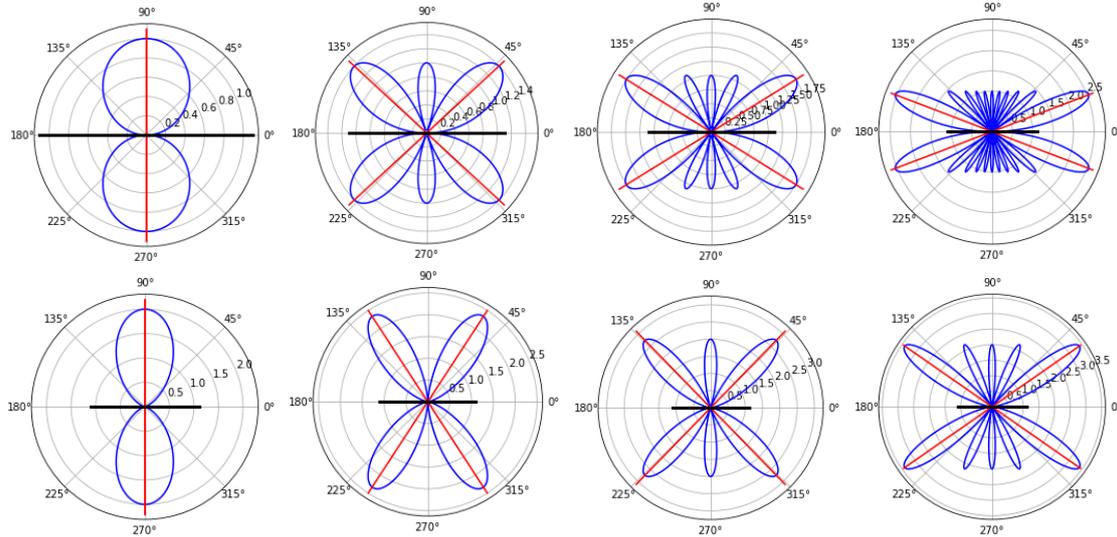


FIGURE 4 – Le champ \vec{E} en fonction de θ pour n impair en haut ($n=1,3,5,11$) et n pair en bas ($n=2,4,6,10$) (fait en Python)

On peut observer que selon les différents modes choisis, une antenne peut être plus ou moins directive. Pour $n=1$ l'antenne émet dans tout le plan orthogonal à l'axe du dipole (utile pour émettre), tandis que pour $n=11$ les lobes principaux dominant énormément et font un angle de $\theta = 21^\circ$ avec l'axe du dipole (utile pour recevoir une onde dont on connaît la direction)

2.3 Cas particulier de l'antenne demi-onde

Un des cas les plus fréquemment utilisé pour une antenne est le cas $l = \frac{\lambda}{2}$. Dans ce cas on a :

$$\vec{E} = i \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \tag{26}$$

$$\vec{B} = i \frac{\mu_0 I_0}{2\pi cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\varphi \tag{27}$$

On en déduit le vecteur de poynting et sa moyenne temporelle :

$$\vec{\pi} = \frac{I_0^2}{4\pi^2 cr^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}\right)^2 \sin(\omega t - kr) \vec{e}_r \tag{28}$$

$$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{I_0^2}{8\pi^2 cr^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}\right)^2 \vec{e}_r \tag{29}$$

L'antenne rayonne donc dans l'espace une puissance total $\langle P_{ray} \rangle = \int \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{S} = 35.54 I_0^2$. On peut aussi calculer sa résistance de rayonnement définie par la relation $P_{ray} = R_{ray} I_{eff}^2 = \frac{R_{ray} I_{eff}^2}{2}$ et $R_{ray} = 73.1\Omega$.

3 Deuxième application : Diffusion de Rayleigh

La diffusion de Rayleigh est un modèle expliquant la diffusion de la lumière à travers des atomes en suspension dans un milieu transparent.

3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

Le modèle de l'électron élastiquement lié est un modèle très célèbre pour exprimer le moment dipolaire \vec{P} d'un atome soumis à un champ extérieur \vec{E}_{ext} . On se place dans le référentiel du noyau, immobile car $m_p \gg m_e$ pour faire

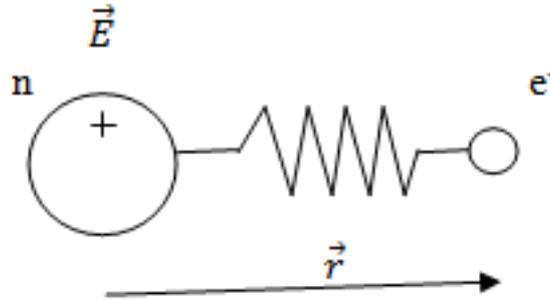


FIGURE 5 – Schéma du modèle de l'électron élastiquement lié à son noyau

un bilan des forces :

- $\vec{F}_1 = -m\omega_0^2 \vec{r}$ la force de rappel élastique
- $\vec{F}_2 = -\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$ la force de frottement de fluide
- $\vec{F}_3 = -e\vec{E}_{ext}$

Ce qui nous donne pour la seconde loi de Newton :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = -q\vec{E}_{ext} \quad (30)$$

Or comme r est directement relié au moment dipolaire de l'atome on peut en déduire la relation en notation complexe :

$$\vec{P} = \frac{e^2/m\omega_0^2}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + i\frac{\omega}{\omega_0^2\tau}} \vec{E}_{ext} \quad (31)$$

3.2 Puissance rayonné via la Diffusion de Rayleigh

Dans le cadre de la diffusion de Rayleigh on se place dans le cas $\omega \ll \omega_0$ ($\omega_0 = 10^{16} rad/s$ on se limite donc aux longueurs d'onde supérieures à l'ultraviolet. Pour un atome ou ion ayant Z électrons on a donc $\vec{P} = \frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2} \vec{E}_{ext}$. Donc

pour un champ extérieur issu d'une onde plane progressive harmonique de pulsation ω on aura $\frac{d^2 \vec{P}}{dt^2} = -\frac{(Ze)^2 \omega^2}{m\omega_0^2} \vec{E}_{ext}$.

Or comme la puissance est de l'onde électromagnétique diffusée est proportionnelle au carré du champ \vec{E} diffusé lui-même proportionnel à $\frac{d^2 \vec{P}}{dt^2}$, on en déduit la puissance diffusées par le dipole :

$$\langle P_{diff} \rangle = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 K \langle |\vec{E}_{ext}|^2 \rangle \quad (32)$$

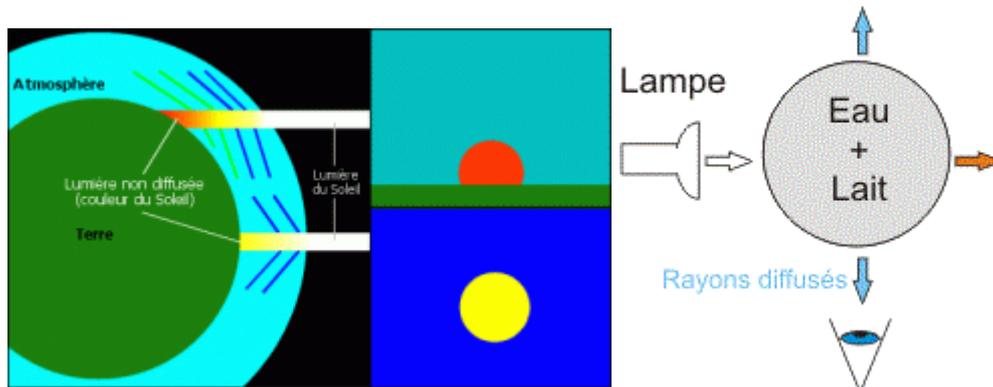


FIGURE 6 – Schéma illustrant la diffusion de Rayleigh dans l'atmosphère et dans du lait

3.3 Application : pourquoi le ciel est bleu ?

La longueur d'onde du rouge étant deux fois supérieure à celle du bleu, la puissance diffusée pour ces longueurs d'onde sera 16 fois moins importante, donc le ciel sera vu comme bleu par l'œil humain. Au contraire à l'aube ou au crépuscule, on peut observer le soleil rougir car le rayonnement transmis est peu à peu privé de bleu lorsque les rayons traversent l'atmosphère. Sur la lune en l'absence d'atmosphère, ce phénomène n'est pas observé.

On peut illustrer ce phénomène avec une expérience du sextant p274, à faire avec du vrai lait très dilué.