LP03

Niveau : L2 ?

Commentaires du jury

- **2000 :** Blalabal.

Prérequis

➢ Cinématique des fluides (dérivée particulaire)

➢ Notions de diffusion

Expériences

☕ Viscosimètre à bille

☕ Écoulement de Poiseuil cylindrique

Table des matières

Introduction

- La leçon précédente nous a permis de caractériser la cinématique d'une particule de fluide (vitesse, accélération), notamment avec les descriptions Eulerienne et Lagrangienne qui nous ont permis de mettre en avant l'accélération convective.

- Aujourd'hui nous allons nous intéresser à la dynamique du fluide. Comme $\frac{D\vec{v}}{Dt}$ et la dérivée particulière, la dynamique d'une particule de fluide de volume $d\tau$ s'écrit $\rho d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = \left(\sum \overrightarrow{f_v}\right) d\tau$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \sum \overrightarrow{f_v} \tag{1}$$

- Il faut donc pouvoir écrire les forces sous forme volumique. Celles que vous connaissez déjà :

- force volumique de pression : $-\overrightarrow{grad}(p)$
- force de gravité : $\rho \overrightarrow{g}$

- Or il y a un effet qu'on a jamais décrit c'est l'impact de la viscosité. C'est un phénomène que vous connaissez déjà. Expérience qualitative écoulement avec glycérine et eau.

But

le but de cette leçon est de décrire mathématiquement la viscosité et et de décrire les propriétés des écoulements visqueux

1 Notion de viscosité

1.1 Mise en évidence

Trouver une image, le top serait une vidéo...

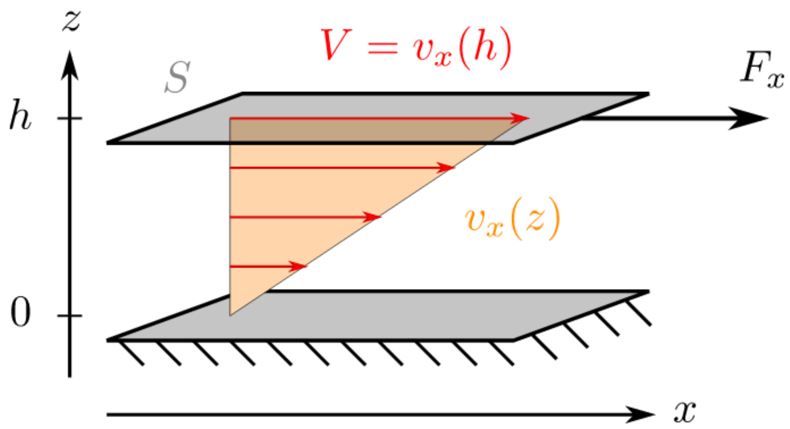

Figure 1 – Ecoulement Couette plan

On considère un **fluide incompressible**.

Observations/constats :

- La vitesse tangentielle du fluide et nulle sur les parois
- Champ de vitesse en $\vec{v} = v(z)\vec{e_x}$
- Empiriquement la force exercée sur la plaque vérifie $F_x = \eta \frac{V}{h} S\vec{e_x}$ avec η un coefficient de proportionnalité. Compte tenu du profil linéaire de $\vec{v_x}$ suivant z, on peut réécrire la force suivant $\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} S\vec{e_x}$

Pour le même écoulement : cette fois qu'en est-il de la force exercée par une couche de fluide sur une couche située en dessous ? → **On admet qu'elle a la même expression :**

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \eta \frac{\partial v}{\partial y} S\vec{e_x} \tag{2}$$

Le coefficient η est appelé viscosité dynamique du fluide

Conditions de validité :

- Fluides incompressibles
- Fluides dis "Newtonnien" : c'est à dire pour lesquels la linéarité entre contrainte et gradien de vitesse est vérifiée.

Interprétation du phénomène : la présence d'un cisaillement se traduit par une contrainte qui s'oppose à ce cisaillement. La couche de fluide allant plus vite tend à entraîner celles qui vont moins vite, réciproquement une couche moins rapide tendant à "retenir" les plus rapides. Dans cet exemple, on pourrait presque avoir envie de dire que le fluide visqueux a "envie" d'homogénéiser la vitesse ! Il me semble que parler d'aspect diffusif est un peu tôt à ce stade de la leçon.

Dimension/unité/ordres de grandeur :

- Dimension : masse/(longueur * temps)
- Unité : $Pa \times s$

Fluide	Air	Eau	Glycérol	Miel
Viscosité (Pa.s)	2.10^{-5}	10^{-3}	1.5	10

L'échelle de valeur est trèèèès étendue. On attribue même une viscosité aux glacier pour modéliser leur "écoulement". A vérifier mais il me semble que c'est la grandeur qui s'étend sur le plus grand nombre d'ordres de grandeur de l'univers entier ! !

Transition orale : on a déjà mieux cerné, formalisé, ce qu'est la viscosité, mais pour décrire la dynamique d'un écoulement visqueux, on a besoin de **forces volumiques**. Voyons ce qu'on peut faire.

1.2 Force visqueuse volumique

Cas précédent On conserve le cas précédent mais sans préjuger cette fois de la stationnarité de l'écoulement : $\overrightarrow{v} = v(y,t)\overrightarrow{e_x}$. On considère une particule fluide de volume dxdydz située entre y et y+dy : **schéma au tableau** :

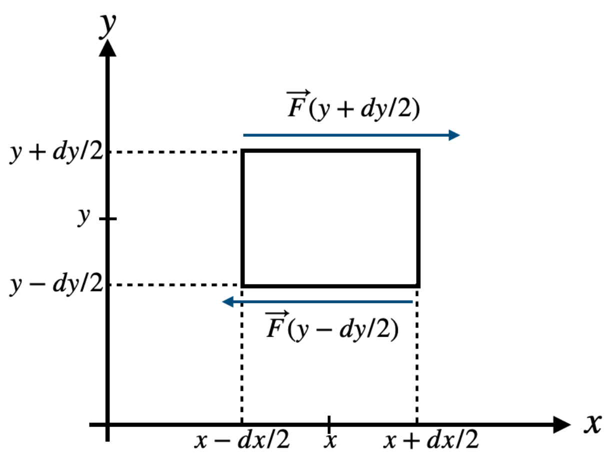

Figure 2 – Particule de fluide soumise à des contraintes de cisaillement

En reprenant l'expression macroscopique et en l'appliquant à la particule de fluide mésoscopique on trouve :

$$\overrightarrow{F}(x,y,z,t) = \eta\frac{dv}{dy}(y+dy/2,t)\ dxdz\ \overrightarrow{e_x} - \eta\frac{dv}{dy}(y-dy/2,t)\ dxdz\ \overrightarrow{e_x} = \eta\frac{d^2v}{dy^2}(y,t)\ dxdydz\overrightarrow{e_x}$$

Cas $\overrightarrow{v} = v_x(x,y,z,t)\overrightarrow{e_x}$: en appliquant le même raisonnement il faut prendre en compte les variations suivant x et suivant z et on abouti à :

$$\overrightarrow{F}(x,y,z,t) = \eta \Delta v_x(x,y,z,t)\overrightarrow{e_x}$$

Cas général : on obtient l'expression générale de la force visqueuse volumique pour les fluides newtonniens incompressibles [1]

$$\overrightarrow{f_v} = \eta \Delta \overrightarrow{v}$$

1.3 Nouvelle interprétation de la viscosité

On reconsidère le cas initial. Le PFD appliqué à une particule de fluide donne $\rho dV \frac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dV$ et donc avec l'hypothèse sur le champ de vitesse on trouve (le fluide est incompressible) :

$$\frac{\rho v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 \rho v_x}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 \rho v_x}{\partial x^2}$$

avec $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ qui est appelée **viscosité cinématique**. On voit que cette équation est une équation de diffusion de la quantité de mouvement volumique suivant $\overrightarrow{e_x}$. Cela met en avant le caractère de la viscosité, comme processus de transport diffusif de la quantité de mouvement.

Transition

La viscosité est maintenant une notion formalisée. Nous allons pouvoir nous intéresser à la dynamique des écoulements visqueux

2 Dynamique des écoulements visqueux

2.1 Mouvement d'un fluide visqueux

Conservation de la masse : déjà connue $div(\rho\overrightarrow{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ qui avec l'hypothèse d'incompressibilité devient :

$$div(\overrightarrow{v}) = 0$$

Equation de Navier-Stokes : en appliquant le PFD à une particule de fluide *danslereferentieldulabosupposeGalileen* (sic) on a :

$$\rho\left(\frac{\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v})\right) = -\overrightarrow{\nabla}p + \rho\overrightarrow{g} + \eta\Delta\overrightarrow{v}$$

Rmq pour moi : On se retrouve avec **4 inconnues** (v_x, v_y, v_z, P) pour **4 équations**. A condition de fixer les conditions aux limites, le problème doit admettre une solution. En revanche, si on considère une fluide compressible, il manque une équation pour "fermer" le problème. On fait souvent une hypothèse sur la pression, mais il n'y a pas qu'une seule possibilité (gaz parfait, compressibilité adiabatique etc...)

1. **Attention !** la viscosité ne se résume pas à une conséquence du cisaillement. On peut avoir une influence en $\partial^2 v_x/\partial x^2$ qui on le voit bien n'a pas pour origine du cisaillement

Conditions aux limites (ref montrouge + Guyon) : Il ne reste plus que les conditions aux limites. Il y en a de 2 types :

- cinématiques : elles portent sur la vitesse du fluide
- dynamiques : elle portent sur les forces

Le sujet est "dense" et on ne cherchera pas ici à tout caractériser. On retiendra :

- **interface liquide solide** que la vitesse tangentielle du fluide est la même que celle du solide, on dit que **le fluide adhère aux parois du solide**. De plus, on suppose que le fluide ne peut pas s'enfoncer dans le solide ou s'en décoller. Donc on a finalement comme conditions aux limites :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{solide}$$

- Il y a également des hypothèses à formuler sur la pression. On fixera souvent la pression à l'interface air/liquide à la pression atmosphérique P_0

Remarques :

- Equation au dérivées partielles non linéaire du fait du terme $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v}$. A la piscine si vous envoyez une vague sur une autre, elle ne vont pas "s'ignorer" comme en électromagnétisme. C'est à cause du terme non linéaire.
- Pas de solution générale
- Solutions possibles à condition de simplifier le problème : symétries, conditions aux limites...

2.2 Nombre de Reynolds - régimes d'écoulement

Equation de Navier-Stokes adimensionnée Il est souvent intéressant d'adimensionnaliser une équation pour dégager les paramètres pertinents caractérisant le phénomène étudié (aussi en simulation où traiter des grandeurs de l'ordre de l'unité peut éviter de gros soucis). Pour l'équation de Navier-Stokes, on commence par poser $p' = p - p_0$ où p_0 correspond au champ de pression hydrostatique. Puis on définit :

- $\overrightarrow{r_a} = \overrightarrow{r}/L$ avec L longueur caractéristique
- $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v}/\overrightarrow{U}$ avec U vitesse caractéristique
- $t_a = tU/L$ (pas besoin de définir un temps caractéristique à part, on a déjà des grandeurs caractéristique qui le permettent)
- $p'_a = p'/(\rho U^2)$ (on remarque que P est homogène à une densité d'énergie, comme on a déjà des grandeurs caractéristiques permettant de définir une densité d'énergie on a pas besoin d'en définir une nouvelle)

Grandeur réelle		grandeur adimensionnée
position	$\overrightarrow{r}$	$\overrightarrow{r_a} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{L}$
gradient	$\overrightarrow{\mathbf{grad}} = \left[\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right]$	$\overrightarrow{\mathbf{grad}}_a = \left[\dfrac{\partial}{\partial x_a}, \dfrac{\partial}{\partial y_a}, \dfrac{\partial}{\partial z_a}\right] = L\overrightarrow{\mathbf{grad}}$
laplacien	$\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\triangle_a = \dfrac{\partial^2}{\partial x_a^2}, \dfrac{\partial^2}{\partial y_a^2}, \dfrac{\partial^2}{\partial z_a^2} = L^2\triangle$
vitesse	$\overrightarrow{v}$	$\overrightarrow{v_a} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{U}$
pression motrice	$P^* = P - \rho\overrightarrow{g}z$	$P_a^* = \dfrac{P}{\rho U^2}$
temps	t	$t_a = \dfrac{U}{L}t$
dérivée temporelle	$\dfrac{\partial}{\partial t}$	$\dfrac{\partial}{\partial t_a} = \dfrac{L}{U}\dfrac{\partial}{\partial t}$

On aboutit à **l'équation de Navier Stokes adimensionnée :**

$$\frac{\partial\overrightarrow{v_a}}{\partial t_a} + \left(\overrightarrow{v_a} \cdot \overrightarrow{grad_a}\right)\overrightarrow{v_a} = -\overrightarrow{grad_a}P_a^* + \frac{1}{R_e}\triangle_a\overrightarrow{v_a}$$

avec $R_e = \dfrac{\rho LU}{\eta}$ On voit que les champs de vitesse et de pression solutions de {NS + masse} sont des fonctions de $(\overrightarrow{r_a}, t_a, Re)$. Conclusion **pour un problème donné, le nombre de Reynolds détermine entièrement la solution de {NS + masse}** .

Interprétation du nombre de Reynolds

En faisant le rapport des ordres de grandeurs des termes advectifs et diffusif de l'équation de NS on trouve :

$$\frac{\rho(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v}}{\eta\triangle\overrightarrow{v}} = \frac{\rho U^2/L}{\eta U/L^2} = \frac{\rho LU}{\eta} = R_e$$

Le nombre de Reynolds quantifie donc le rapport des flux de quantités de mouvement dûs au transport convectif de quantité de mouvement sur le transport diffusif de quantité de mouvement. On peut dégager 2 cas limites sur le comportement du fluide selon la valeur de R_e :

$R_e \ll 1$: On parle **d'écoulement laminaire**. On peut négliger le terme convectif de l'accélération particulaire devant le terme de viscosité (on ne peut pas négliger les autres termes car si on essaye de les comparer ça ne va pas dépendre que de Re il va rester des L ou des U en facteur) . L'équation de Navier-Stokes devient l'équation de Stokes. L'équation du mouvement du fluide est alors linéaire et on peut déterminer analytiquement le champ des vitesses. De plus, en régime stationnaire l'écoulement est réversible (GHP p444) : c'est une conséquence de la linéarité. Si on change le champ de pression en P , alors v est solution de l'équation.

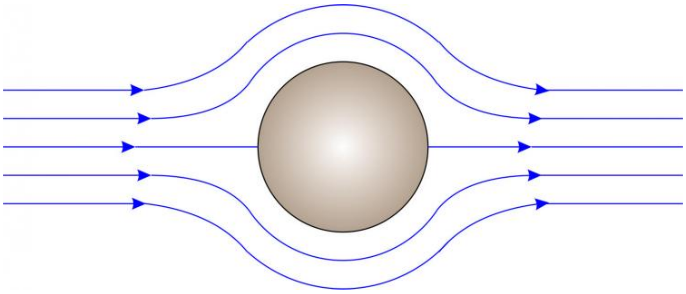

Figure 3 – Exemple d'écoulement laminaire autour d'un obstacle : la symétrie illustre la réversibilité.

C'est dans ce régime qu'on se place pour les viscosimètres : comme on peut calculer le champ de vitesse, on peut relier le couple resistant à la viscosité.

$R_e \gg 1$: *GHP p507* On parle **d'écoulement turbulent**. Les termes de viscosité sont négligeables loin de l'obstacle. On retombe alors sur l'équation d'Euler vue précédemment. Pourtant même dans des écoulements turbulents, certains phénomènes comme l'effet Magnus ne peuvent s'expliquer sans la présence de la viscosité. En réalité, dans ce régime la viscosité se manifeste toujours dans une zone réduite proche de l'obstacle que l'on appelle couche limite. Conclusion, à haut nombre de Reynolds, la viscosité peut être négligée **uniquement aux échelles considérées pour évaluer** R_e

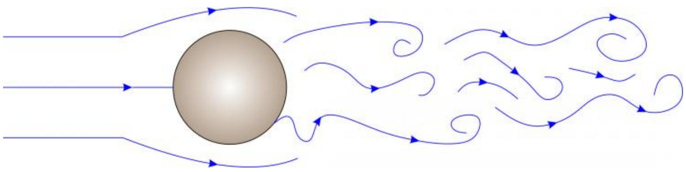

Figure 4 – Exemple d'écoulement turbulent autour d'un obstacle : on a perdu la symétrie

ODG :

- un jet d'eau en sortie de robinet : $U \approx 0.1 ms^{-1}$, $L \approx 0.01 m$ et $\nu = 10^{-6} m^2 s^{-1}$ donne $Re = 10^2 \gg 1$
- L'air autour d'une voiture : $U \approx 10 ms^{-1}$, $L \approx 1m$ et $\nu = 10^{-5} m^2 s^{-1}$ donne $Re \gg 1$

En réalité, c'est bien plus complexe que cela et certains écoulements avec des Reynolds de 100 peuvent être considérés laminaires. **On se restreindra dans la suite uniquement au cas laminaire**

2.3 Notion de couche limite

Ici :

- On s'intéresse à un objet profilé qui pénètre un écoulement
- A la surface du solide, la vitesse relative du fluide est nulle $\rightarrow$ une couche apparaît où la viscosité a significativement modifié la vitesse du fluide : on parle de **couche limite**.
- on cherche à estimer l'épaisseur de la couche limite à "l'arrière" de l'objet.

Comme vu en diffusion, de particules/thermique on relie à un temps τ une taille caractéristique δ sur laquelle le phénomène diffusif a significativement impacté la grandeur sur laquelle il agit :

$$\frac{\tau \nu}{\delta^2} \sim 1$$

Ici $\tau = L/U$ et on aboutit à :

$$\delta \simeq \frac{L}{\sqrt{R_e}}$$

Ca se montre aussi en recherchant l'epaisseur à laquelle les termes de transport convectifs et diffusifs sont du même ordre

Des lors qu'on envisage une interface, il est important de se rappeler que cette couche limite existe dans **tout type d'écoulements**, même à haut Reynolds ! En cas d'interface, les effets visqueux ne sont donc jamais complètement négligeables !

3 Applications

3.1 Ecoulement de Poiseuil

Page pédagogique epfl : https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/131/loi-de-poiseuille-parabole

Hypothèses On suppose :

- un écoulement dans une conduite cylindrique d'axe $\overrightarrow{e_x}$ (horizontal), dans le repère $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_x})$
- profil de vitesse : $\overrightarrow{v} = v_x(r)\overrightarrow{e_x} \rightarrow (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
- régime permanent $\rightarrow \dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$
- la composante du gradient de pression $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -K$ uniforme (l'invariance du problème par translation l'impose)

Calcul (*GHP p165*) En projetant NS sur $\overrightarrow{e_x}$ on trouve :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \triangle v_x = 0$$

soit en cylindrique :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) v_x = 0$$

on trouve par intégration $\dfrac{\partial v_x}{\partial r} = \dfrac{-Kr}{2\eta} + \dfrac{C_1}{r}$. On pose $C_1 = 0$ pour éviter que ça diverge en $r = 0$ et finalement :

$$v_x(r) = \frac{-Kr^2}{4\eta} + C_2 = V_{max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

avec $V_{max} = \dfrac{KR^2}{4\eta}$. On déduit du profil de vitesse le débit volumique :

$$Q_v = \int_0^R v_x(r) 2\pi r dr = \frac{K\pi R^4}{8\eta} = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{pi}{128\eta}\frac{\triangle p}{L} d^4$$

Interprétation Le gradient de pression joue le rôle de moteur, et la condition de vitesse nulle sur les parois impose que celles ci exercent une force opposée à la force "motrice" de pression.

3.2 Expérience : Poiseuil cylindrique

Expérience

Référence : FLTCLD p 442
Matériel, description :
Vase de Mariotte avec capillaires (le 2.2mm était Ok en test). Règles ou Pied à coulisse. Balance + chrono, support boys et niveau à bulle pour assurer l'horizontalité du capillaire

Présentation du dispositif

- Vase de Mariotte
- Pression hydrostatique calculable à l'entrée du capillaire
- pression en sortie du tube égale à P_0

Longueur d'établissement la loi de Poiseuil suppose une invariance par translation suivant $\overrightarrow{e_x}$ *ie* un cylindre de longueur infinie. Comme ça n'est pas le cas expérimentalement on doit se poser la question de la longueur d'établissement du régime de Poiseuil. **Lien intéressant avec la couche limite**. On estime le régime établi lorsque l'épaisseur de la "couche limite" vaut R.

Nombre de Reynolds dans le capilaire $\frac{\rho D v_x}{\eta}$ à calculer en faisant une manip sur le débit. Vérifier en live qu'on est bien en régime d'écoulement laminaire.

Calcul de η_{eau} : prendre un point de mesure du débit pour une hauteur donnée. En déduire par RL la valeur de η_{eau}

Conclusion

En somme dans cette leçon on a vu que

Message clé

le message est

Compléments

Questions

- **Question 1 :** Réponse 1.
- **Question 2 :** Réponse 2.

Commentaires

But

Ce la leçon doit montrer et faire retenir, c'est que ...

Attention

Il faut faire attention !

Définition

Ceci est une définition.

Remarque

Ceci est une remarque inutile.

Important

Ceci n'est pas important.

Message clé

Ceci est un message clé