LP52 : Ondes évanescentes, réflexion totale. Application

Alexandre Koessler (Guillaume Deplus)

Niveau : L2

Prérequis

- optique géométrique
- équations de Maxwell
- DLHI
- mécanique quantique ondulatoire

Expériences

- ondes évanescentes dans des blocs de parafine
-

Références

Plan

1 Ondes EM dans les plasmas **2**
1.1 Équation de propagation d'une onde dans un plasma 2
1.2 Relation de dispersion 2
1.3 Application à la télécommunication 3

2 Microscopie à effet tunnel **3**
2.1 Réflexion totale à une interface entre deux milieux diélectriques 3
2.2 Diélectrique de taille finie "effet tunnel" classique 3
2.3 Microscopie à effet tunnel 4

But

Introduction

Ces ondes sont caractérisées par une décroissance exponentielle et par le fait qu'elle ne transmettent pas d'énergie.

1 Ondes EM dans les plasmas

1.1 Équation de propagation d'une onde dans un plasma

Définition

Plasma :
Milieu ionisé composé de cations lourds et d'anions (électrons) légers.
La densité de courant $\mathbf{j}$ s'écrit alors dans ce milieu comme il est produit seulement par les électrons mobiles :

$$\mathbf{j} = -n\,e\,\mathbf{v}_e \tag{1}$$

De plus, il est localement neutre $\rho = 0$ et peu dense, donc on néglige les chocs.

On écrit le PFD sur un électron :

$$n\,m_e\left(\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}_e\right) = -n\,e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}) \tag{2}$$

On peut négliger la force en $\mathbf{B}$ car en OdG, on a

$$\frac{|\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} \approx \frac{v\,B}{E} \approx \frac{v}{c} \ll 1 \tag{3}$$

et on suppose les électrons non relativistes.

On en déduit alors avec la définition de $\mathbf{j}$:

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{n\,e^2}{m_e}\mathbf{E} \tag{4}$$

On déduit aussi des équations de Maxwell dans ce milieu une équation du type Klein-Gordon :

$$\Delta\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2\mathbf{E}\right) \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n\,e^2}{m_e\,\varepsilon_0} \tag{5}$$

Exemple

Ionosphère :
Avec $n \approx 10^{12}\,\mathrm{m}^{-3}$, on a $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \approx 9\,\mathrm{MHz}$.

1.2 Relation de dispersion

Avec une solution complexe $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\,e^{i(\omega t - kx)}$ avec $k \in \mathbb{C}$, on obtient la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \tag{6}$$

On a alors deux situations :

- Si $\omega > \omega_p$ alors $k^2 > 0$ et le plasma est transparent à l'onde EM.
- Si $\omega < \omega_p$ alors $k^2 < 0$ et le plasma est opaque à l'onde EM. Donc $k \in i\mathbb{R}$ de la forme $k = \frac{i}{\delta}$ où

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \tag{7}$$

On a alors $\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}) = \mathbf{E}_0\, e^{-x/\delta} \cos(\omega t)$ et c'est la forme d'une onde évanescente qui est caractérisée par une décroissance exponentielle de longueur caractéristique δ, c'est aussi une onde stationnaire. On peut aussi calculer que $\langle \Pi \rangle = \mathbf{0}$, donc il n'y a pas de propagation d'énergie.

1.3 Application à la télécommunication

Mise en évidence de l'ionosphère par réflexion totale des ondes EM su celle-ci en 1901.

2 Microscopie à effet tunnel

2.1 Réflexion totale à une interface entre deux milieux diélectriques

Condition de réflexion totale :

$$\sin(\theta_i) > \frac{n_2}{n_1} \quad \text{avec} \quad n_1 > n_2 \tag{8}$$

Par continuité du champ $\mathbf{E}$ à l'interface entre deux DLHI, on a

$$|\mathbf{k}_i| = \frac{n_1\,\omega}{c} \quad \text{et} \quad |\mathbf{k}_t| = \frac{n_2\,\omega}{c} \tag{9}$$

On a aussi pour tout vecteur $\mathbf{T}$ tangent à l'interface :

$$(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{T} = 0 \quad \text{donc} \quad \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t = \alpha\, \mathbf{e}_y \tag{10}$$

On en déduit le système :

$$n_1 \begin{pmatrix} \sin(\theta_i) \\ \cos(\theta_i) \end{pmatrix} - n_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\alpha\, c}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

On en déduit $x = \frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_i) > 1$ et comme $|x|^2 + |y|^2 = 1$ alors $y \in i\mathbb{R}$ et le champ transmis s'écrit

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t,0}\, e^{-x/\delta} \cos(\omega t - kx) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_i)\right)^2 - 1}} \tag{12}$$

2.2 Diélectrique de taille finie "effet tunnel" classique

Entre les deux blocs de paraffine, il existe une onde évanescente qui va alors nous servir de capteur de distance puisque l'intensité s'écrit :

$$I = I_0\, e^{-2L/\delta} \tag{13}$$

↓ Transition

On a ici un capteur de distance très précis utilisant des ondes EM évanescentes, on peut alors faire la même chose avec la mécanique quantique dans la microscopie à effet tunnel.

2.3 Microscopie à effet tunnel

On résout l'équation de Schrödinger stationnaire pour un électron de masse m et d'énergie $E = \hbar\omega$. Les solutions sont de la forme :

$$\Psi(x,t) = e^{-i\omega t}\,\phi(x) \tag{14}$$

avec ϕ solution de :

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2}(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\Big(E - V(x)\Big)\phi(x) = 0 \tag{15}$$

On va résoudre cette équation dans le cas d'une marche de barrière de potentiel, on obtient alors une onde $\phi(x) = \phi_0\, e^{ikx}$ avec $k \in \mathbb{C}$ tel que :

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0) \tag{16}$$

Dans la barrière, on montre enfin que l'onde est une onde évanescente et que l'intensité au bout de la pointe du microscope s'écrit de manière analogue au cas classique :

$$I = I_0 e^{-2L/\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}} = 6\,\text{Å} \tag{17}$$

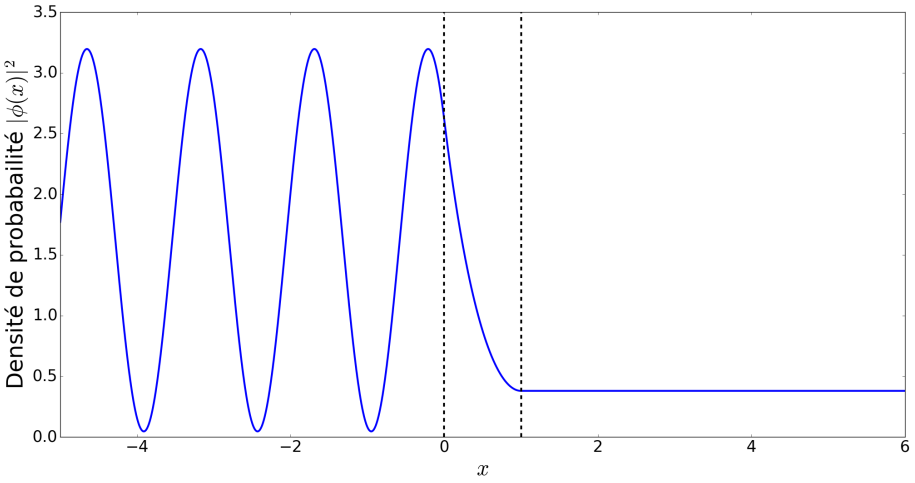

FIGURE 1 – Forme de la densité de probabilité pour l'effet tunnel

Conclusion

Compléments

Questions

- **Question ?** Réponse
-

Commentaires

-
-