

# LP-57 - Symétries

. Niveau : L3

---

. Prérequis :

- . transitions de phase
- . électromag<sup>i</sup> - eq<sup>o</sup> Maxwell
- . mécanique analytique - eq<sup>o</sup> de Euler-Lagrange

. Sivardière - Symétries

. Dictionnaire de physique - Tailler

. Thieberger

---

---

---

---

- La difficulté de cette leçon réside dans le lien que l'on peut faire entre les symétries genre Curie et celles que l'on définit après. Pour faire un lien propre, il faudrait l'électrodynamique de M1 qui traduit l'EM de manière tensorielle et pour laquelle on retrouve bien les liens entre symétrie "au sens de Curie" et celles sur un Lagrangien que l'on peut définir dans ce cas.

⇒ dire en ccl qu'un lien propre sera fait en cours de M1 où on définit l'électrodynamique

- Attention aux hypothèses dans les systèmes d'étude !

- Une approche historique se tient :

- Principe de Curie (1894 - sur l'em.) ↗ Lien ??
- Théorème de Noether (1918)
- Lien transition de phase (1937)

- Revoir la partie I et mettre Noether sur slides, pour gagner un peu de temps pour la dernière partie.

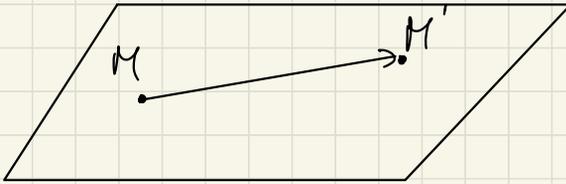
## I.2) Principe de Conie

Les invariances et symétries des causes se retrouvent dans leurs effets  $\Rightarrow$

où ici: • invariance: t'fx continue qui laisse inchangée  $\mathcal{D}$

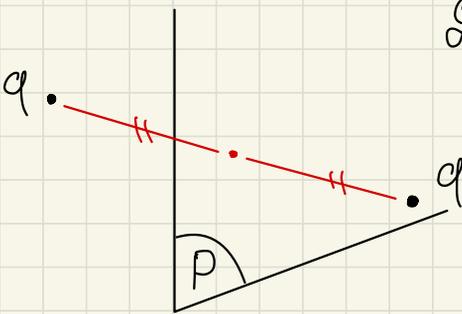
$\hookrightarrow$  ex: plan infini.

$$\tau(M) = \tau(M')$$



• symétrie: t'fx discrète qui laisse inchangée

$\mathcal{D}$ : ex: autour d'un plan



## I.3) Application à l'électromagnétisme

repris du cours de JASON.

• On a vu: 
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Vecteur  
polaire

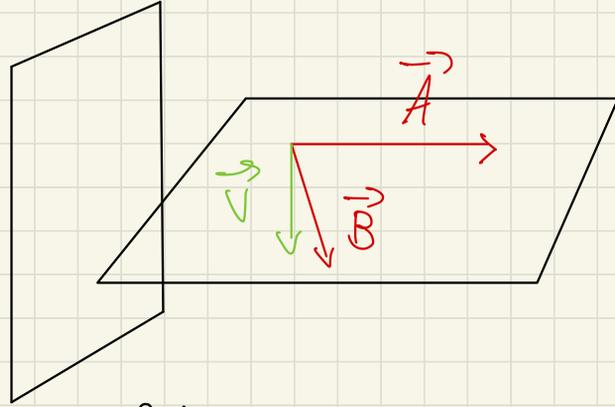
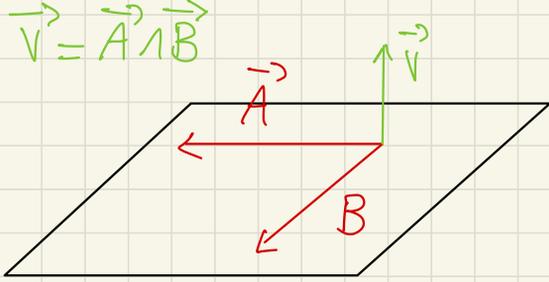
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'$$

Vecteur  
axial

$\vec{B}$  s'exprime comme un produit vectoriel donc ses transformations par opération de symétrie sont étranges:

on peut s'en convaincre sur un exemple :

$$\vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$



ici,  $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$  par cette opérat<sup>o</sup> de symétrie.

On retiendra les critères suivants pour les vecteurs

et les pseudo-vecteurs :

À mettre sur slides

- Application : le fil infini en magnétostatique considéré comme fili forme

# I. Principe de Cuié

## I.1) Symétrie : définition

On dit d'un système physique qu'il possède une symétrie s'il reste inchangé par une transformation.

Exemple : rotation de  $\pi/2$ ,  $\pi/4$  pour le carré et le cercle

rem : voir dico Tailler : on distingue :

- symétries internes : interne au système

- symétries externes : espace et temps

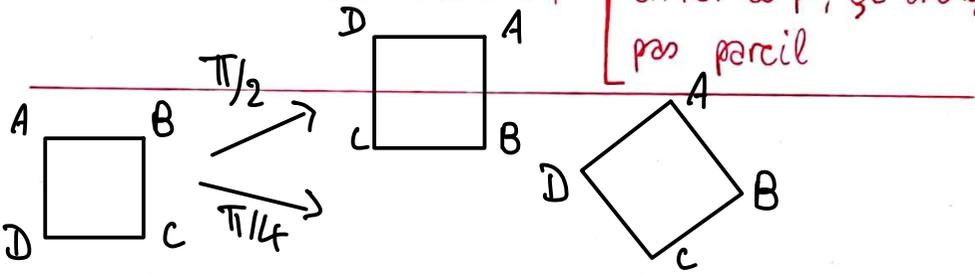
mélange des 2 = super symétrie

elles forment des groupes et peuvent être discontinues ou continues, on distingue aussi les symétries :

- globales : variables partout  $\Rightarrow$  conservation Noether

- locales : invariance de jauge :

$$\begin{cases} V \rightarrow V - \partial_t \phi \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \phi \end{cases} \left[ \begin{array}{l} \text{donne les m\^em eq\^os mais} \\ \text{en fct du pt, \phi change} \\ \text{pas pareil} \end{array} \right]$$



# I.2) Principe de Cuié système

$\Upsilon$  Les effets ont les symétries des causes qui leur ont donné naissance  $\Upsilon$   
= propriété physique étudiée

rem : pas de réciproque.

valable que si l'effet est unique (BUP 689)

$\hookrightarrow$  équilibre d'une bille au fond d'une bouteille creuse

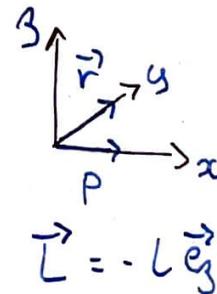
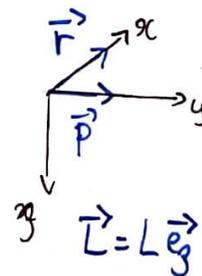
Le principe est super stylé : on simplifie grandement le problème avant m\^em d'avoir commencé \^a le résoudre

## I.3) Applicat\^o \^a l'électromagnétisme

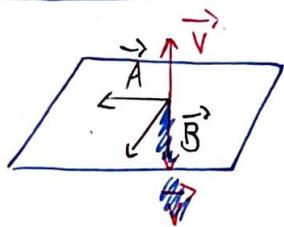
pour des des du monde, on a besoin de conventions : orientat\^o espace / temps  $\Rightarrow$

- grandeur polaire : signe ind. des conventions :  $\vec{p}$ ,  $\vec{r}$

- grandeur axiale (pseudo vecteur) : signe dépendant des conventions :  $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$  dépend orientat\^o d'espace car définit\^o produit vectoriel avec  $\pm$  repère.



• transformation :



! tout pseudo vecteur s'écrit  
cô | produit vectoriel

- C.C.I. : • vecteur polaire : contenu dans l plan de symétrie des causes ( $\vec{B}$ )  
•  $\perp$  plan d'antisymétrie des causes
- vecteur axial : •  $\perp$  plan de symétrie des causes  
• contenu plan d'antisymétrie des causes

Application : électromagnétisme, fil parcouru par  $I$   
courant infini



①  $(\pi, \vec{e}_r, \vec{e}_3)$  plan symétrique  
 $\Rightarrow \vec{B}(\pi) \parallel \vec{e}_3$

② distribut° courant inv. rot  $\vec{B} / \text{travail}$   
 $\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = B(r) \times 2\pi r \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_3}$$

Ok on simplifie les calculs mais à quoi ça sert sinon?  
on aurait pu faire le calcul par Biot et Savart.

ici, B.S. :  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

## II - lois de conservation

on prend l'exemple du problème

### II.1) Symétrie en mécanique analytique

on décrit un système par un lagrangien  $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$

$\Rightarrow$  on choisit une tfx  $q \mapsto f(q, t)$  qui transforme les

coordonnées. par def°, le nouveau lagrangien vérifie

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

opérat° de symétrie si  $\boxed{\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}}$

[càd ce sont les mêm fonctions à une dérivée totale près.

donc on doit finalement vérifier

$$\boxed{\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dG}{dt}}$$

cas d'une tfx continue : on paramétrise  $f_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$\rightarrow$  op° de symétrie si  $\forall \alpha$ ,  $f_\alpha$  est symétrie de  $\mathcal{L}$ .

fo identité  $\Rightarrow$  DL :  $q' = f_\alpha(q, t) \simeq f_0(q, t) + \alpha g(q, t)$   
 $= q + \alpha g(q, t)$

dans ce cas, on peut faire un DL au 1er ordre sur  $F_\alpha$ :

$$F_\alpha(q, t) = \alpha G(q, t) + O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \alpha \frac{dG}{dt}$$

## II. 2) Théorème de Noether

on considère une tfx infinitésimale :  $q' = q + \delta q$

donc  $\delta \mathcal{L} = \alpha \frac{dG}{dt}$

mais  $\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] \quad \swarrow \text{Euler Lagrange}$$

$$\text{d'où } \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} q_i - G \right] \alpha = 0$$

charge conservée de Noether

pas le temps

## II. 3) Exemple du problème à deux corps

Ponige - Lemj

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\vec{A} = \vec{L} \times \vec{p} - m k \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}$$

translation spatiale :

$$\vec{r}_i \mapsto \vec{r}_i + \vec{a} \quad ; \quad \dot{\vec{r}}_i \mapsto \dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{a}}$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

donc  $\frac{d}{dt} (m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2) \cdot \vec{a} = 0$  : conservat° impulsion

rotation : on décrit une rotation par  $\vec{r}_i \mapsto R \vec{r}_i$  où

$$R^T R = I_3$$

: on préserve le produit scalaire

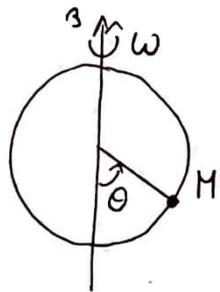
donc  $\delta \mathcal{L} = 0$  et  $\frac{d}{dt} [m_1 \dot{\vec{r}}_1 \cdot R \vec{r}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \cdot R \vec{r}_2] = 0$

généralisat° du thm avec tfx sur temps : on mq invariance par translat° temporelle  $\Rightarrow$  conservat° de l'énergie

Où mais est-ce que les symétries sont toujours vérifiées ?  
 que se passe-t-il quand il y a une brisure de symétrie ?

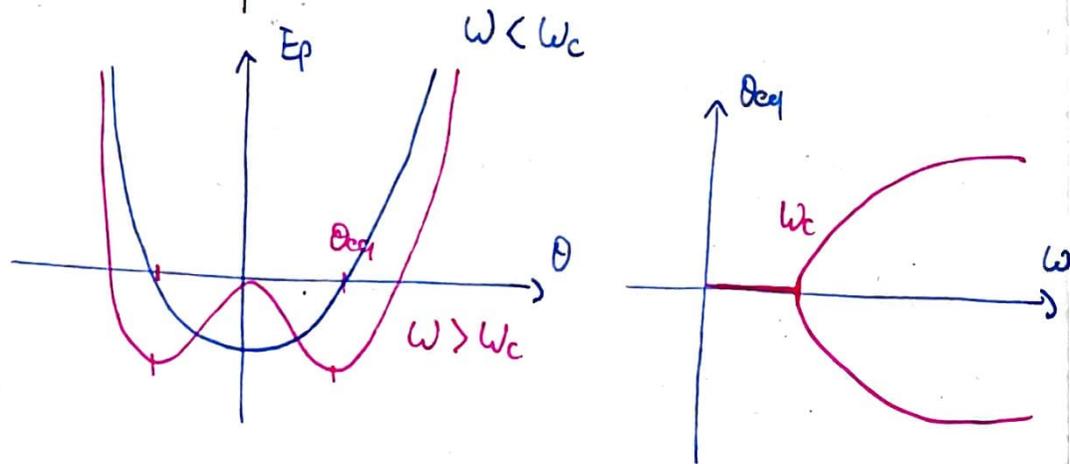
### III - Brisure de symétrie

#### III.1) Bifurcation mécanique



$$E_p(\theta) = -mgR \cos\theta \left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \frac{\cos\theta}{2} \right]$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2g}{R}}$$



on perd la symétrie autour de l'axe de rot° en apparence  $\Rightarrow$  plus locale? Non! on perd l'unicité des solutions.

l'ensemble des solutions respecte encore ce principe.

#### III-2) Transition de phase

• Trans° liquide solide : on a bep + de symétries de phase liquide que solide (rotat° ...)

$\Rightarrow$  Landau mq bep de transi° marchent comme ça

$\Rightarrow$  paramètre pertinent : température

ici perte sym sphérique des interactions intermédiaires pour  $T < 0^\circ\text{C}$

• Équilibre caractérisé par un paramètre d'ordre : nul de phase la plus symétrique et non nul de phase la moins symétrique

$\Rightarrow$  exemple : transit° Para-ferro, aimantation

#### CCI : RETENIR :

- sym imposent contraintes  $\rightarrow$  lois physiques
- — simplifiait° problèmes (locale)
- q<sup>tes</sup> conservées

# Démo Noether - Slides:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{on a } q \mapsto q' = q + \delta q \text{ où } \delta q \equiv \alpha g(q, t), \underline{\alpha \ll 1}. \\ \text{donc } \delta \mathcal{L} = \alpha \frac{dG}{dt}(q, t) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{de } \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \stackrel{DL}{=} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \\ &= 0 \text{ par Euler-Lagrange} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} q_i - G \right) \alpha = 0}$$

Charge de Noether