

MP 02 Dynamique du solide en rotation

Sadek Al-Jibouri et Isabelle Safa

28 avril 2022

Commentaires du jury

Expériences

- ☞ Mesure du moment d'inertie d'un pendule pesant
- ☞ Vérification de la formule de Borda
- ☞ Vérification de la loi de précession d'un gyroscope
- ☞ Vérification de la loi de nutation d'un gyroscope.

Bibliographie

- ☞ *Jolidon vert* → Chapitre Gyroscope
- ☞ *Jolidon bleu* → Chapitre pendule pesant
- ☞ *Mécanique 1 et 2 BFR* → Théorie pour le gyroscope.
- ☞ *Duffait* → Pendule pesant

Table des matières

1 Pendule pesant	2
1.1 Aux petits angles	2
1.2 Grands angles	2
1.2.1 Formule de Borda	2
1.2.2 Etude énergétique	3
1.2.3 Enrichissement spectral	3
2 Le gyroscope	3
2.1 Nutation	3
2.2 Précession	4

Introduction

Contrairement à la dynamique du point, dans laquelle les seuls degrés de liberté sont les degrés de translation, les solides présentent des degrés de liberté de rotation qui rendent leurs mouvements plus complexes.

L'étude de ces mouvements de rotation est très importante pour la vie quotidienne puisque l'on fait face tous les jours à des solides en rotation. La roue, souvent utilisée comme exemple de très vieille invention, est omniprésente dans nos vies, sur les véhicules, dans les ventilations, sur les chaises etc...

Les dimensions spatiales d'un solide et l'idée de répartition de masse rend aussi le mouvement plus difficile à étudier, et demande d'identifier des axes de rotation propres autour desquels le solide peut tourner de façon stable.

En guise d'introduction, j'ai montré l'expérience avec un solide possédant des dimensions très différentes selon trois axes (en pratique, on utilise une cale en bois) : la rotation selon l'axe qui porte le moment d'inertie qui n'est ni le plus grand, ni le plus petit est instable.

Une meilleure introduction pourrait être d'utiliser une roue déséquilibrer pour montrer qu'elle ne tourne pas sur l'axe de rotation souhaité de façon stable, ce qui induit, quand on fixe l'axe, un couple sur la liaison d'axe. On peut alors orienter le montage sur le problème de l'équilibrage.

1 Pendule pesant

On commence par présenter un cas simple, celui du pendule pesant en rotation par rapport à un axe fixe. Il s'agit d'un cas où le déséquilibre est symétrique, de sorte que l'axe ne subit pas de couple pouvant l'abîmer, donc il ne serait pas très pertinent de l'étudier.

L'étude se fait plutôt sur la détermination des propriétés du pendule, son moment d'inertie et sa période en retrouvant la formule de Borda.

Étude du pendule pesant

🔗 Duffait p.264 et FLTCD p.479

⌚ 10 minutes

Demander 2 ordinateurs avec Latis ? Pour pouvoir faire les mesures en même temps ? Ou ne pas faire la manip en premier pour le MP2 ?

On veut dans un premier temps se placer dans le cas linéaire puis non linéaire (Formule de Borda et enrichissement fréquentielle).

En préparation : On étalonne le capteur en faisant des angles entre -60° et 60° , utiliser une barre horizontale montée sur un statif pour tenir le pendule quand on fixe l'angle.

Aux petits angles :

Préparation : On mesure la fréquence des oscillations pour différentes longueurs L (Distance axe - masse) pour réaliser la régression linéaire en fonction de L^2

$$\frac{MgL}{\omega_0^2} = ML^2 + J_0 \quad (1)$$

Live : On ajoute un point à une longueur de plus et on remarque une belle droite. Le coefficient de la droite devrait bien correspondre à la masse utilisée et J_0 est de l'ordre de $2,5 \text{ g/m}^2$

Aux grands angles :

Préparation : Préparer les feuilles de calcul Latis et Regressi et faire un ou plusieurs tests des manip Live.

Live : On réalise une longue acquisition pour de grandes oscillations du pendule. Pour trouver la formule de Borda, on trace la fréquence en fonction de l'enveloppe sur Latis, on l'exporte sur Regressi et on réalise une régression polynomiale selon

$$T(\theta_m) = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_m^2 + \frac{11}{3072} \theta_m^4 \right) \quad (2)$$

Le fit est meilleur aux grands angles, moins de bruit.

On constate l'enrichissement fréquentielle en réalisant des TFs quand le pendule oscille aux grands angles et on peut observer par ailleurs l'évolution des énergies ou le portrait de phase si on trouve ça pertinent.

1.1 Aux petits angles

Première expérience : calculer par régression linéaire le **moment d'inertie** d'un pendule pesant.

Formule (savoir d'où elle vient) :

$$\frac{MgL}{\omega_0^2} = ML^2 + J_0$$

On trouve $J_0 = 2,5 \pm 0,5 \text{ g.m}^2$. Cette valeur nous sera utile par la suite.

1.2 Grands angles

Lancer la manipulation et passer à la suite : acquisition de 5 min sous LatisPro

1.2.1 Formule de Borda

L'atténuation du pendule due aux frottements de l'air nous permet d'avoir accès à une large plage d'amplitude, ce qui est pratique pour la formule de Borda.

Feuille de calcul nous permet d'avoir accès à l'enveloppe. La période (calculée sur un pas de temps court) en fonction de l'enveloppe nous donne une courbe qu'on ajuste par un polynôme comme l'indique la **formule de Borda**, à laquelle on va comparer les coefficients obtenus :

$$T(\theta) = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16} + \frac{11}{3072} \theta^4 \right)$$

Ne pas hésiter à utiliser le Zoom plutôt que la calibration sous Regressi pour qu'on puisse voir toute la courbe.

Comment gérer quand Regressi donne de bons résultats mais des incertitudes énormes ? Essayer de réduire la zone d'ajustement à une zone plus petite et qui correspond mieux à ce qu'on veut, ici en réduisant aux zones de grande amplitude on diminue drastiquement les incertitudes.

1.2.2 Etude énergétique

On peut étudier l'évolution des énergies mécanique, cinétique et potentielle du pendule en traçant les bonnes fonctions en fonction du temps. On y voit alors bien l'alternance entre énergie cinétique et potentielle et la diminution de l'énergie mécanique à cause des frottements. Attention les couples frottements solides diminuent de façon exponentielle l'amplitude d'un pendule.

1.2.3 Enrichissement spectral

En observant la TF aux grandes amplitudes on voit un enrichissement spectral, qui est très rapidement confondu dans le bruit.

2 Le gyroscope

Définition : Gyroscope

Solide pouvant tourner selon ses trois axes propres.

Les gyroscopes classiques présentent une symétrie cylindrique qui font que deux des axes sont égaux. Le gyroscope permet d'illustrer facilement le problème d'équilibrage puisque l'étude de la précession est exactement l'étude d'un solide déséquilibré.

Le gyroscope présente 3 axes de rotation évidents : **la rotation propre** : la rotation du rotor sur lui même (axe lié au cadre intérieur), **la nutation** : rotation du cadre intérieur par rapport au cadre extérieur, et **la précession** : la rotation du cadre extérieur sur son axe. La précession et la nutation sont fortement couplées.

Gyroscope - Mesure de moments d'inertie

🔧 Jolidon Vert p 289- 320 ; Divers p 9

⊙ Préparation

En préparation : On veut mesurer les moments d'inertie selon les axes principaux du gyroscope, pour cela on utilise la même méthode qu'avec le pendule pesant en réalisant cette fois-ci une régression linéaire sur la masse.

Pour l'axe de symétrie cylindrique du rotor (mesure de C) on place la masse sur le rotor avec de la Patafix ou du Scotch double face, on mesure la période des oscillations libres au chronomètre ou au laser avec un jeu de miroir - photodiode (on peut coller un miroir sur la masse). Attention les oscillations sont vite amorties.

Pour l'axe de rotation du cadre intérieur on fait la même chose mais cette fois ci avec la masse sur le cadre.

2.1 Nutation

Gyroscope - Nutation

🔧 Jolidon Vert p 289- 320 ; Divers p 9

⊙ 5 min

On cherche à vérifier la loi de nutation du gyroscope (petites oscillations de l'angle de nutation quand on tape le gyroscope équilibré en rotation propre).

$$T_{\text{nutation}} = 2\pi \frac{A}{C\dot{\phi}} \quad (3)$$

On mesure au tachymètre ou avec un laser rasant le rotor la vitesse de rotation propre $\dot{\phi}$, et on mesure la période de nutation en plaçant un miroir sur la cadre extérieur, et une photodiode (diode à effet latéral permet d'avoir, si l'alignement est bon, des oscillations sinusoïdales donc simple à TF). Le miroir envoie le faisceau sur la photodiode donc la tension est l'image de la position du laser et donc de l'angle de précession (il est pertinent de noter que précession et nutations sont couplés avec la même période d'oscillation, mais la précession étant de plus grande amplitude c'est elle qu'on mesure facilement).

On peut illustrer le couple des deux oscillations en plaçant un écran à la place de la photodiode, on observe une ellipse tracée par le chemin du laser.

On réalise une régression linéaire entre les deux pulsations. Coefficient le rapport des moments d'inertie.

On utilise une diode à effet latéral, qui délivre une tension proportionnelle à la position d'un signal lumineux sur la diode (en l'occurrence, un laser). Elle nous permet d'obtenir la période de précession (la même que la période de nutation) lorsqu'on donne un petit coup sur le gyroscope après l'avoir lancé.

Il est possible d'observer le trajet du laser réfléchi par le miroir sur une écran et de voir qu'il s'agit d'une ellipse.

Faire attention à ne pas décaler le gyroscope quand on lui donne le petit coup. Éventuellement, le fixer à la table ? Faire l'alignement après l'avoir lancé.

On prend $A = J_x = 3,61\text{g.m}^2$, $B = J_z = 4,78\text{g.m}^2$ (obtenus en préparation).

2.2 Précession

Gyroscope - Precession

⚡ Jolidon Vert p 289- 320 ; Divers p 9

⊖ 5 - 10 minutes

On veut vérifier la loi de précession du gyroscope déséquilibré par une masse m accrochée sur le cadre intérieur à une distance l du centre de masse du gyroscope seul. Il faut mesurer à la fois la vitesse de rotation propre (qui diminue à cause des frottements et la période de précession.

$$\dot{\psi} = \frac{mgl}{C\dot{\phi}}$$

En préparation, placer sur le gyroscope 2 miroirs, un de chaque côté du cadre extérieur (cadre argenté). Placer d'un côté une diode à effet latéral, de telle sorte qu'un laser frappe la diode quand le gyroscope est aligné, et de l'autre un tachymètre, qui lit la vitesse du rotor à chaque fois que celui ci est dans l'alignement.

Globalement on veut réaliser un plan de lecture, tel que l'on puisse lire le passage du rotor et sa vitesse de rotation à chaque fois qu'il est dans ce plan.

En préparation, faire un code qui exploite les mesures à l'aide des formules du Jolidon Vert, comme les vitesses de rotation propre sont prises en même temps que les passages du rotor, il n'y a pas besoin de faire d'interpolation sur les vitesses, donc ça fait un calcul en moins.

En direct, on peut prendre les deux premières minutes de rotation, ça devrait faire une dizaine de points pour la régression, il suffit de lancer le gyroscope déséquilibré, de prendre la vitesse de rotation à chaque fois qu'il passe, et de la noter dans le programme fait.

L'analyse se fait pas mal sur Python.

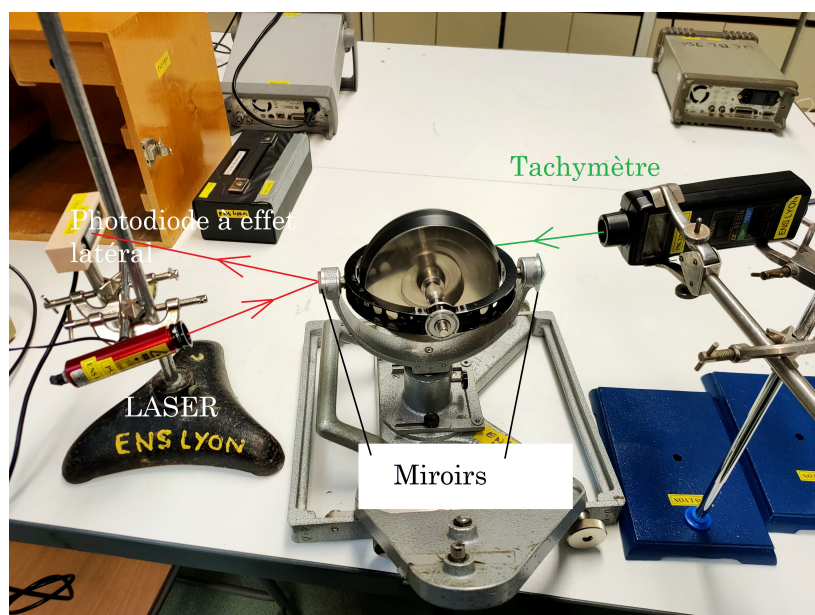


FIGURE 1 – Photo du montage pour le gyroscope.

Conclusion

La dynamique du solide en rotation est complexe et demande une étude bien plus poussée que celle d'un objet ponctuel. La répartition de la masse dans les objets en rotation est de plus très importante dans les problèmes d'équilibre. On a pu voir notamment que si la rotation ne s'effectue pas autour des axes propres, le solide libre montre un mouvement de précession. Ce mouvement n'est pas possible pour une roue fixée à une voiture par exemple, et est compensé grâce à un couple de réaction de la part de l'axe, qui subit alors lui même un couple égal et opposée qui peut l'endommager. Il s'agit donc d'un problème primordial à régler.

Compléments

Questions

- **Pourquoi on étudie la mécanique du point au lycée si la méca du solide est plus "complète" ?** Permet de poser les bases de la mécanique, et approche historique (sans compter que c'est plus simple, donc pas de raison de s'encombrer d'un formalisme plus lourd si pas nécessaire).
- **Tu as parlé des axes propres dans l'intro. C'est quoi ?** Axes qui permettent d'exprimer la matrice de moment d'inertie sous forme diagonale. Ce sont les axes selon lesquels les vecteurs de rotation sont des vecteurs propres : la rotation peut *rester* selon cet axe-là.
- **Est-ce que tu peux nous expliquer l'exp introductive ?**
- **Comment tu mesures la distance à l'axe de rotation pour le pendule pensant ? Il est très encombré.** Beaucoup d'astuces : premièrement, le pendule est à peu près équilibré lorsqu'il est à vide. On utilise ensuite la taille totale du pendule, le centre d'inertie de la
- **Pourquoi tu prends dix périodes ?** Simple à calculer, et permet de diminuer les incertitudes d'en prendre plusieurs.
- **Incertitude diminuée de combien lorsqu'on prend dix périodes ? J'ai envie de dire d'un facteur dix. Tu propages comment ? C'est sous Regressi directement ?** J'ai pris une incertitude-type de 5 mHz, propagée depuis l'incertitude-type sur la période (Δt). **Bien de s'éviter de faire des calculs à la calculatrice quand on a une feuille de calculs à disposition.** Pour les mesures prises en préparation, la période vient d'une TF sur une zone où l'atténuation est négligeable. On prend comme incertitude la largeur du pic dans la TF.
- **Quelles précautions lors de cette acquisition ?** Pas trop courte, pas trop longue pour éviter l'atténuation, rester dans l'approx des petits angles.
- **Regressi donne pour $a_t h \pm 15g$, mais tu écris 20. Pourquoi ?** J'arrondis les incertitudes au plus haut pour ne les avoir que sur un seul chiffre significatif. **Incertitudes grandes données par Regressi alors que la courbe passe bien par les points. Explication ?** Je pense que ça vient de la façon dont il les calcule : l'intervalle de confiance à 95%, c'est large.
- **Comment être sûr que le centre de masse de la masselotte est au bien sur l'axe** Mettre la vis au milieu d'un point de vue pédagogique pour que le pendule soit bien centré. Cela permet d'avoir le centre de masse du système masselotte + vis sur le plan perpendiculaire à celui du mouvement, ce qui ne change donc pas la position d'équilibre.
- **Comment est faite la calibration ?** . La calibration est faite par régression linéaire de la tension par rapport à l'angle.
- **Tu as dit que l'enveloppe décroissait de manière exponentielle. Lien avec les frottements fluides ?** Pas forcément des frottements fluides, les frottements solides aussi sont linéaires en la vitesse de rotation. Si on trace le log de l'enveloppe, au début, ça ressemble bien à une droite.
- **D'où vient la formule de Borda ?** DL des équations du mouvement. La formule qu'on a pour la période est globalement une intégrale de l'inverse de la vitesse de rotation par rapport à la position, et c'est sur elle qu'on réalise le DL.
- **Comment tu calcules l'enveloppe ?** Fonction de détection des maxima. Période obtenue par la différence de temps entre deux maxima. **Lissage ?** Oui, sur l'angle, avant.

- Tu peux réafficher la période en fonction de l'enveloppe ? Pourquoi il y a autant de bruit pour les petites périodes ? Ça correspond à des petites amplitudes, pour lesquelles le bruit devient non négligeable. Pour des amplitudes si faibles, en fait, ça devient plus judicieux de mesurer à la main. Si jamais tu exclues ces petits angles du Regressi ça diminue les incertitudes. Conclusion sur cette manip : il vaut mieux la lancer pour plus longtemps.
- Autres questions possibles pour lesquelles il y a plus le temps ; Comment marche le tachymètre ? Comment marche la diode à effet latéral ? Problèmes d'équilibrage ? D'abord statique ou dynamique ? Effet gyroscopique ? Exemples dans la vie de tous les jours : en moto il faut pousser du côté opposé alors qu'en vélo c'est l'inverse, pourtant on pourrait penser que c'est presque le même objet ?
- Attention à la masse pour la diode à effet latéral.

Manip surprise : mesurer la constante de raideur d'un ressort.

On peut mesurer la force qu'il exerce sur une masse. Fait la tare de la balance avec la masse par-dessus. Mesure la longueur à vide du ressort : 35,5 cm. Accroche le ressort à la potence.

Refait la tare sans la masse. Force obtenue par $F = k\Delta l$.

On peut aussi remonter à k à partir de la fréquence d'oscillation, ce serait sûrement plus précis, mais plus compliqué vu le matériel qu'on a.

Ne pas oublier les incertitudes dans la manip surprise !

On trouve $k = 19,7 \text{ N/m}$. **Cohérent comme valeur ? Incertitudes ?**

Grosse sur la longueur, toute petite sur la masse. On considère uniquement l'incertitude sur la longueur, donc par propagation, on a la même fraction de la valeur en incertitude : disons 0,5 cm d'incertitude, soit $0,3 \text{ N/m}$ pour sur la constante de raideur.

Mesures statiques : ce qui a été proposé, en mesurant la force avec sur la masse avec la différence de poids, ou dynamomètre qui fixe la longueur : permet de faire une régression, et mesures dynamiques : comme tu as dit, mesure de période.

Commentaires

Nouveau titre, pas trop de recul... Le pendule pesant, effectivement c'est attendu. Le gyroscope, difficile de faire une manip quantitative... Le mieux, ce serait de pouvoir parler équilibrage.

En questions : comment les théorèmes sont modifiés ? Le moment dynamique (analogue du moment cinétique mais pour l'accélération), où on applique les modèles... (plus pratique à un point fixe ou au centre de gravité).

Attention tableau : bien expliquer toutes les manips présentes au tableau. Mais on peut en évoquer rapidement pour introduire, montrer que la mécanique du solide c'est contre-intuitif (au sujet de l'expérience avec la cale en bois) ! Les ciseaux sont aussi un bon exemple de mouvement contre-intuitif.

Manip qui montrerait la différence entre la mécanique du point et la mécanique du solide ? Deux pendules différents ?

Nathan Berit : dans le TP, pour la rotation propre, on peut faire un ajustement exponentiel pour l'atténuation, plutôt que mesurer constamment la vitesse de rotation. C'est envisageable uniquement en faisant l'approximation que la précession ne change pas le profil de vitesse de rotation propre.

À partir de la force d'inertie : on peut déterminer la vitesse de rotation d'une solide en référentiel non galiléen. Et donc utiliser une manip de ce type dans ce montage.

Il y aura forcément une question sur l'équilibrage. Par exemple, une roue de voiture qui tourne : première chose à faire, c'est mettre le centre de gravité sur l'axe de rotation (équilibrage statique). Deuxième chose à faire : faire en sorte que l'axe de rotation soit l'un des axes principaux. Sinon, couple qui use l'axe de rotation...

Ce titre est nouveau, du coup on pourrait demander d'autres choses pour la collection...

Sinon ton plan est ok.

Vous avez le droit de faire des erreurs. Le plus important, c'est de rester lucide et d'essayer de les expliquer rationnellement.