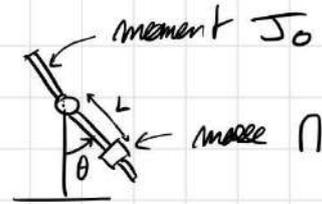


Non-linéarités : pendule pesant : grands angles

MP51

* Références :
 → Solidon bleu
 → Fascicule TP Agrég.

* Matériel :
 → Pendule pesant + potentiomètre (installé dessus).
 → boîtier "Pendule mécanique grand angle" P79. 14
 → boîtier d'alim P42. 39
 → Carte d'acquisition Labis pro.



* Système : pendule pesant { barre + masselotte }

$$\text{Equation : TNC} \Rightarrow (J_0 + mL^2)\ddot{\theta} + MgL \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J}}, \quad J = J_0 + mL^2$$

1) Perte d'isochronisme : formule de Borda.

→ On commence par calibrer le capteur : pour différents angles mesurés au rapporteur, noter la tension U délivrée par le potentiomètre. Régression linéaire $\theta = aU + b$ pour avoir les paramètres de conversion.

On prend $U_{\text{en}} + \theta$ et en - θ pour diminuer les incertitudes.

Incertitudes :
 • mesure de l'angle.
 • dernier digit du capteur.

Préciser que la linéarité du capteur est importante pour mettre en évidence la non-linéarité du système

→ laisser le système évoluer à partir d'une amplitude importante (≈ 100 (120°)) et acquérir le signal du potentiomètre sur Labis-pro (qq minutes, le pos se choisit de sorte à respecter largement Shannon pour la période du pendule $\Rightarrow \approx 10$ ms).

→ Traitement des données via Labis / Régressi (cf fascicule).

→ Modélisation de la forme : $T = T_0 (1 + a \theta_m^2 + b \theta_m^4)$

→ Comparaison aux valeurs théoriques ($T \approx T_0 (1 + \frac{1}{16} \theta_m^2 + \frac{11}{3072} \theta_m^4)$)

θ_m en radians

2) Enrichissement spectral

→ On reprend l'acquisition précédente.

→ Faire des TF des différences parties du signal.

Le compromis à faire pour segmenter le signal : grande plage \Rightarrow bonne précision pour le calcul de la TF MAIS élargissement spectral à cause de l'amortissement qui réduit l'amplitude au fur et à mesure.

→ On doit observer une composante spectrale en $f = 3f_0$ qui est d'autant plus marquée que l'amplitude est grande.

Peut-être préciser que dans ton cas, les harmoniques étaient parfois difficiles à voir...

• Remarques :

Pour Besda : traitement sur Labis avec la tension.

Expectation sur Regressi et conversion en angle pour avoir les incertitudes
 Δ Pour le fit, donner des valeurs proches pour l'aider à faire le modèle.

• Pendule double puits mécanique

Manip qualitative

On reprend le pendule pesant précédent et on le place entre 2 aimants en U.
Le potentiel créé est en $V(\theta) = a\theta^2 + b\theta^4$

↳ la force est donc en : $F(\theta) = 2a\theta + 4b\theta^3$: non linéaire

On peut tracer le portrait de phase et/ou l'évolution des oscillations jusqu'au piégeage dans un puits grâce à l'avis pro.

La manip est décrite dans le folio bleu. Elle sert de transition entre les deux parties.

Pendule double puits électronique

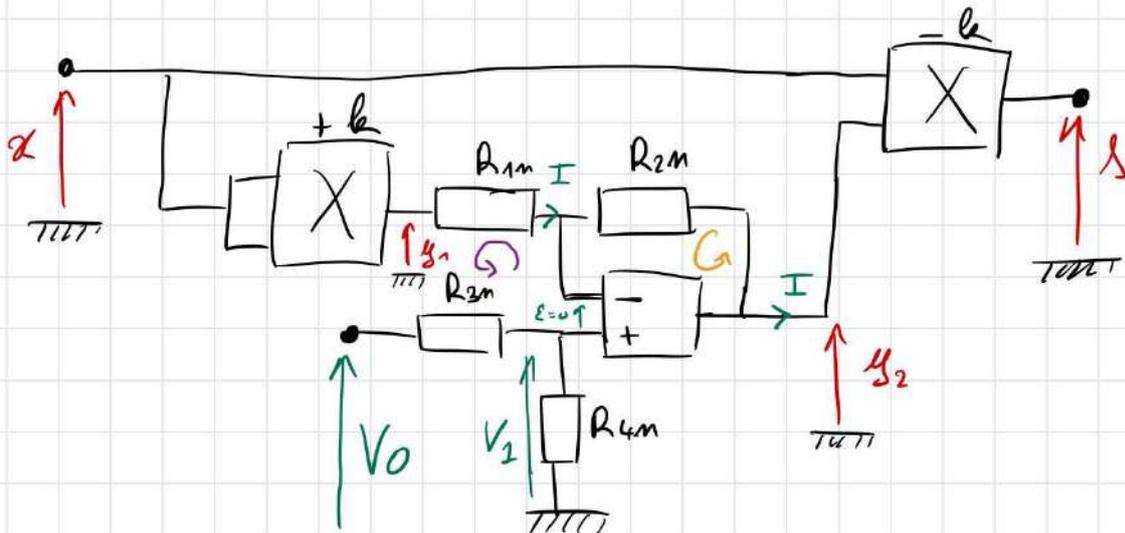
NP51

- * Références :
- Solidon vert.
 - fascicule TP élec
 - KROB : "Électronique expérimentale"

* Matériel : → de quoi monter les circuits suivants
(il existe en boîtier "élément non linéaire")

Circuit électrique :

→ Élément non linéaire :



On a $y_1 = k x^2$ * loi des mailles au niveau de G :

$$y_1 = R_{2m} I + V_1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{R_{2m}} (y_1 - V_1) \text{ avec } V_1 = \frac{R_{4m}}{R_{2m} + R_{4m}} V_0$$

* Pour loi des mailles en G : $V_1 = R_{2m} I + y_2 \Rightarrow y_2 = -\frac{R_{2m}}{R_{2m}} (y_1 - V_1) + V_2$

$$= -k \frac{R_{2m}}{R_{1m}} x^2 + \left(1 + \frac{R_{2m}}{R_{1m}}\right) V_1$$

* Et finalement : $s = -k u_2 \alpha = +k^2 \frac{R_{2m}}{R_{1m}} \alpha^3 - k \left(1 + \frac{R_{2m}}{R_{1m}}\right) V_1 \alpha$

$$= +k^2 \frac{R_{2m}}{R_{1m}} \alpha^3 - k \frac{R_{1m}}{R_{2m} + R_{1m}} \frac{R_{1m} + R_{2m}}{R_{1m}} V_0 \alpha$$

$= \beta > 0$ $= \alpha$

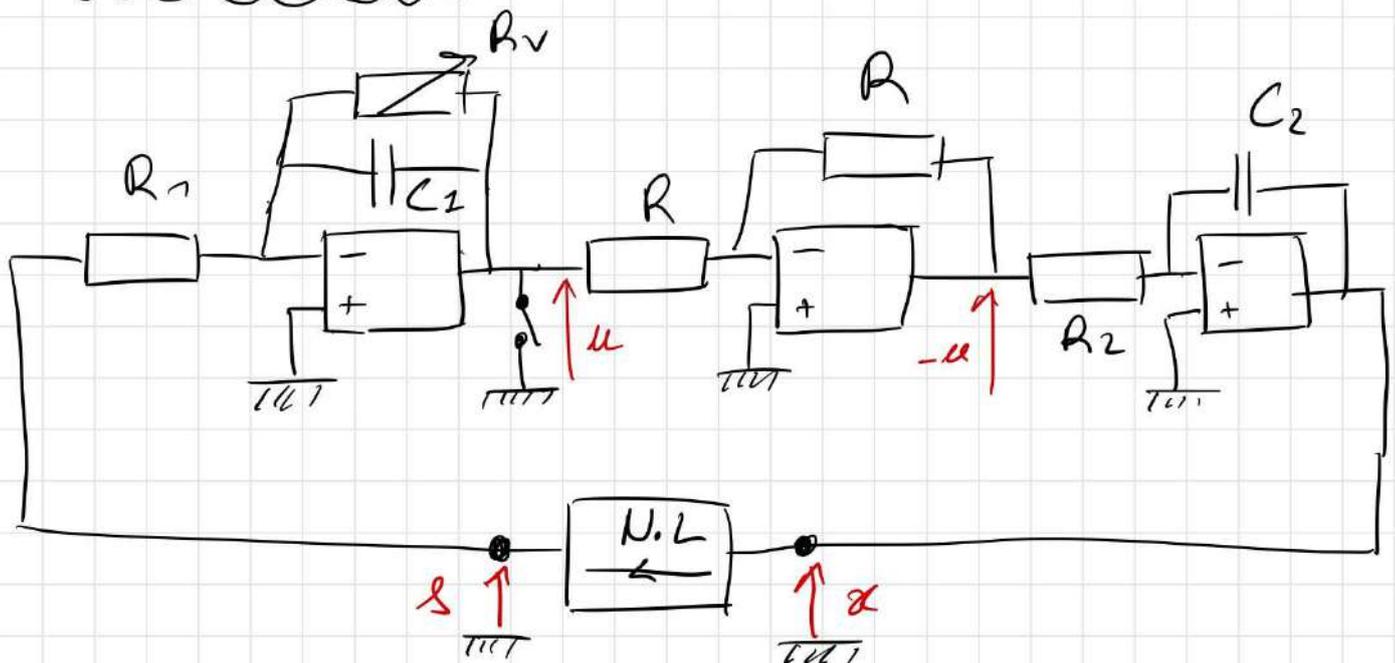
D'où $s = \alpha \alpha + \beta \alpha^3$

avec

$$\alpha = -k \frac{R_{1m}}{R_{2m} + R_{1m}} \frac{R_{1m} + R_{2m}}{R_{1m}} V_0$$

$$\beta = k^2 \frac{R_{2m}}{R_{1m}}$$

→ Circuit global :



• $\frac{1}{Z_{eq1}} = \frac{1}{R_v} + C_1 j\omega \Rightarrow Z_{eq1} = \frac{R_v}{1 + jR_v C_1 \omega}$. On a $s = R_1 I$ et $u = -Z_{eq} I$

$$\Rightarrow u = -\frac{Z_{eq}}{R_1} s$$

$$\Rightarrow u + R_v C_1 \dot{u} = -\frac{R_v}{R_1} s \quad \text{AO1}$$

• AO2 = ampli inverseur de gain 1 \Rightarrow On a $-u$ en sortie.

• AO3: $-u = R_2 I = R_2 C_2 \frac{d}{dt} (-x) \Rightarrow u = R_2 C_2 \dot{x}$

D'où $R_2 C_2 \dot{x} + R_2 C_2 R_V C_1 \ddot{x} = -\frac{R_V}{R_1} s \Rightarrow \alpha x + \beta x^3$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{R_V C_1} \dot{x} + \frac{\alpha}{R_1 C_1 R_2 C_2} x + \frac{\beta}{R_1 C_1 R_2 C_2} x^3 = 0$$

Contrôle
de l'amortissement

$$\tau_{dolo} = R_V C_1$$

Estimation de la
période des oscillations:

$$T = \sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

1) Caractérisation de l'élément non linéaire

\rightarrow Appliquer en entrée de l'élément non linéaire une tension sinusoïdale de 10Hz (doit être faible devant la fréquence de coupure des AOs, qui est ~ 10 Hz), de l'ordre de 5V (saturation des multiplieurs à ~ 10 V).

\rightarrow Pour plusieurs ^{valeurs} de V_0 entre -2 V et 2 V, mesurer s et x sur l'osc.

\rightarrow Régression affine $s/x = a x^2 + b \Rightarrow a = \beta$
 $b = \alpha(V_0)$

\rightarrow Tracer $\alpha(V_0)$ pour obtenir la relation entre α et V_0 .

\rightarrow En théorie, besoin de 1 couple pour β mais le faire plusieurs fois permet de réduire l'incertitude.

2) Etude de la dynamique

- Choisir le circuit. Il faut choisir R_1, R_2, R_V, C_1 et C_2 de sorte à ce que :
- 1) T soit tel que la fréquence des oscillations soit dans la bande passante des AOs (typiquement 10 Hz).
 - 2) τ_{relax}/T soit tel qu'on puisse observer plusieurs oscillations avant de converger vers une position d'équilibre. (typiquement $\tau_{relax}/T \sim 10$).

→ On a $u = R_2 C_2 \dot{x} \Rightarrow u = \text{vitesse}$.

→ On peut représenter : $x = f(t) \rightarrow \text{oscillations}$.

* $u = g(x) \rightarrow \text{portrait de phase}$.

→ On retrouve la même chose que pour le double puit mécanique.

3) Diagramme de bifurcation

Les positions d'équilibre valent

$$x_{\pm}^* = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

→ Pour V_0 , choisir une rampe triangulaire symétrique de période T_R de l'ordre de 10s.

→ Fixer R_V de sorte à avoir $\tau_{relax} \ll T_R$
 \Rightarrow Evolution quasi-statique du système.

→ Réduire autant que possible la tension de décalage de l'AO3.

Questions

- **Quelles sont les caractéristiques des phénomènes non linéaires qui ont été mises en évidence dans le montage ?** On perd le principe de superposition, on ne peut plus reconstruire les solutions à partir d'une base (analyse de Fourier). On peut également avoir apparition de fréquences supplémentaires dans le signal de sortie (enrichissement spectral). Le phénomène de ralentissement critique et la pluralité des positions d'équilibre stables sont également caractéristiques des PNL.
- **Comment obtient on la formule de Borda ?** On effectue un développement perturbatif en poussant le DL du sinus aux ordres supérieurs dans l'équation du mouvement.
- **Est-ce qu'on aurait pu modifier le montage pour que les frottements jouent moins de rôle ?** On aurait pu fixer une masse plus grosse pour que l'inertie du pendule soit plus grande. Le problème est plus d'ordre pratique/de gestion du temps car il faut une petite masse pour le pendule double puits mécanique (les aimants ne sont pas très puissants) donc cela nécessite de changer de masse au cours du montage.
- **Quel autre paramètre que la force des aimants influe sur la symétrie du pendule double puits mécanique ?** La distance des aimants par rapport à l'axe de rotation.
- **Exemple d'élément non linéaire qui aurait pu permettre d'illustrer le phénomène ?** Une diode.
- **Par quoi aurait pu on remplacer le boitier « élément non linéaire » dans le montage du double puits électrique ?** Par une résistance négative.
- **Que vouliez-vous dire par « on court circuite la tension u » ?** On relie la sortie du premier AO à la masse, c'est à dire on impose une tension nulle en sortie de celui-ci.
- **Réexpliquer comment la tension x se modifie lorsqu'on impose $u=0$?** La tension u se retrouve (au signe près) en entrée du dernier AO du montage, qui est un intégrateur. Lorsqu'on impose $u = 0$, l'intégrateur va donc intégrer sa tension d'offset, ce qui implique la tension x en sortie dérive au cours du temps jusqu'à saturation de l'AO.