MP9 : Viscosité

Alexandre Koessler

Expériences

- expérience de Stokes
- viscosimètre à chute de billes
- écoulement de Poiseuille

Références

[1] Michel Fruchart, Pierre Lidon, Étienne Thibierge, Maxime Champion, and Arnaud Le Diffon. *Physique expérimentale : optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique expériences*. LMD Physique. De Boeck supérieur, Louvain-la-Neuve, 2016.

Plan

1 Viscosimètre à bille **2**

2 Écoulement de Poiseuille **3**

Introduction

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent en toute généralité :

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla}P + \eta\,\Delta\mathbf{v} + \rho\,\mathbf{g} + \mathbf{f}_v \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dans le cas des petits nombre de Reynolds, les effets inertiels sont négligeables devant les effets de viscosité. De plus, on se place en régime permanent, les équations se réécrivent :

$$\begin{cases} 0 = -\boldsymbol{\nabla}P + \eta\,\Delta\mathbf{v} + \rho\,\mathbf{g} + \mathbf{f}_v \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Dans le cas particulier d'un écoulement de Couette cylindrique, soit un écoulement visqueux contraint entre deux cylindres coaxiaux dont l'un est mis en rotation, l'écoulement est seulement régi par l'équation de Stokes :

$$\eta\,\Delta\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

Cette équation est linéaire et est inchangée par renversement du temps $t \to -t$. Ainsi, on peut revenir à l'état initial du système en tournant le cylindre dans l'autre sens.

Expérience

Expérience de Stokes - [1]

On injecte une goutte de glycérol dans le dispositif décrit précédemment, puis on fait tourner doucement l'un des cylindres. On fait ensuite tourner ce même cylindre dans l'autre sens, la goutte coloré va alors globalement se reformer et retrouver un état proche de l'état initial. On ne retrouve pas exactement l'état initial car l'écoulement réalisé n'est pas forcement stationnaire et à cause de la lente diffusion du colorant dans le milieu.

1 Viscosimètre à bille

Nous allons étudier la chute d'une bille sphérique de rayon r et de masse volumique ρ_b dans une éprouvette cylindrique de rayon R remplie d'un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ_f . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\mathbf{g} + \Pi + \mathbf{F} \tag{4}$$

avec Π la poussée d'Archimède et $\mathbf{F}$ la force de frottement fluide. On considère que l'écoulement est laminaire, c'est-à-dire que le nombre de Reynolds est petit devant 1, et que le régime stationnaire est atteint. Pour une chute dans un milieu infini, on modélise la force de frottement fluide par la formule de Stokes :

$$\mathbf{F} = -6\pi\,\eta\,r\,\mathbf{v} \tag{5}$$

Dans le cas d'une chute dans une éprouvette, la présence des parois n'est pas totalement négligeable car une recirculation du fluide apparaît. Il faut alors ajouter une correction à la formule de Stokes, que l'on exprimera :

$$\mathbf{F} = -6\pi\,\eta\,\frac{r}{1 - 2.1\,\frac{r}{R}}\,\mathbf{v} \tag{6}$$

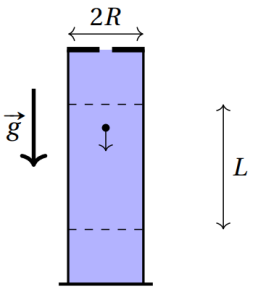
Au final, la vitesse de la bille en régime permanent s'exprime :

$$v = \frac{2}{9}\,\frac{\rho_b - \rho_f}{\eta}\,r^2\,g\left(1 - 2.1\,\frac{r}{R}\right) \tag{7}$$

Si la bille est lâchée avec une vitesse initiale nulle, le régime permanent sera atteint au bout d'un temps :

$$\tau \approx \frac{2}{9}\frac{\rho_b}{\eta} r^2 \tag{8}$$

Soit une distance caractéristique d'établissement du régime permanent de l'ordre de $v\tau \approx 1\,\text{cm}$ pour les billes utilisées.



Expérience

Mesure de la viscosité d'une huile de silicone - [1]

On peut déterminer tout d'abord la masse volumique du fluide d'étude en mesurant la masse d'un volume précis extrait à l'éprouvette graduée. On a

$$\rho_f = (967 \pm 2)\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} \tag{9}$$

Pour des billes de différentes tailles, on remesure leur diamètres d et leurs masses m, on peut ainsi vérifier qu'elle sont bien toutes en acier et vérifier leur masse volumique en faisant la régression $Y = m$ en fonction de $X = \frac{\pi}{6} d^3$, on a comme coefficient directeur :

$$\rho_b = (7830 \pm 90)\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} \tag{10}$$

Pour ces différentes billes, on mesure le temps de chute libre τ entre les deux mêmes points de l'éprouvette (séparé d'une distance D). On prend le premier point à environ 10 cm de la surface pour être sûr d'atteindre le régime permanent. On ajuste alors le modèle $Y \equiv v = \frac{D}{\tau}$ en fonction de $X \equiv r = \frac{d}{2}$ par $Y = a\,X^2 - b\,X^3$. Le coefficient a nous permet de retrouver la viscosité dynamique de l'huile η. Tandis que le rapport $\frac{b}{a}$ nous donne le coefficient $\frac{2{,}1}{R}$. On note que ce rapport donne un coefficient numérique un peu supérieur à 2.1 ce qui est cohérent avec le fait qu'il d'autres termes correctifs non pris en compte.

2 Écoulement de Poiseuille

On s'intéresse à l'écoulement de Poiseuille d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η dans un cylindre horizontal de diamètre $D = 2R$. On considère que l'écoulement est stationnaire et laminaire. La symétrie cylindrique impose une vitesse du fluide de la forme $\mathbf{v} = v(r)\,\mathbf{e}_x$, avec r la distance à l'axe central. Le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est alors identiquement nul, et l'équation se réduit donc à celle d'un écoulement rampant de la forme :

$$-\boldsymbol{\nabla} P + \eta\,\Delta\mathbf{v} = 0 \tag{11}$$

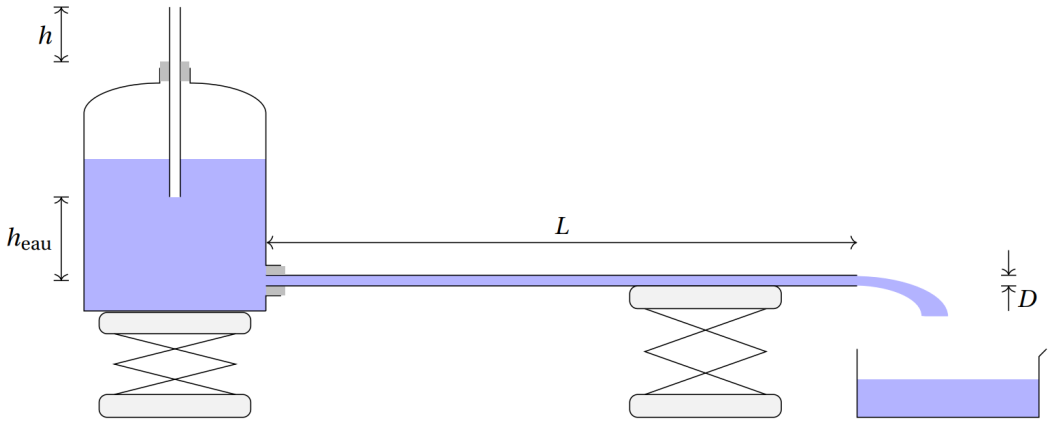
Sa résolution aboutit à un profil parabolique de la vitesse :

$$v(r) = \frac{R^2}{4\,\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{12}$$

Le débit volumique Q_V à travers une section du cylindre est alors donné par la loi de Hagen-Poiseuille :

$$Q_V = -\frac{\pi D^4}{128\,\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \tag{13}$$

Nous allons réaliser un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique de longueur L reliée à un vase de Mariotte rempli d'eau.



Un vase de Mariotte est un récipient fermé à l'intérieur duquel est inséré un tube en contact avec l'air libre. Par continuité de la pression, le bas du tube reste à la pression atmosphérique P_{atm}. Le gradient de pression résultant dans le fluide impose une pression au niveau du trou de vidange en bas du vase :

$$P = P_{\text{atm}} + \rho\, g\, h_{\text{eau}} \tag{14}$$

Au cours de la vidange, le niveau de l'eau dans le vase descend, mais la pression au niveau du trou de vidange reste la même tant que le bas du tube reste immergé, c'est l'intérêt du vase de Mariotte. De plus, il est assez simple de modifier la pression au niveau du trou car il suffit de monter ou de descendre le tube vertical.

Le profil de vitesse du fluide à l'entrée de la conduite n'est pas parabolique mais plutôt uniforme. L'établissement du régime de Poiseuille n'est obtenu qu'à partir d'une certaine distance d'écoulement, dépendant du nombre de Reynolds et du diamètre de la conduite. Nous considérons cependant pour la suite que cette longueur d'établissement est négligeable devant la longueur L de la conduite utilisée, le débit volumique s'exprime alors :

$$Q_V = \frac{\pi D^4}{128\,\eta}\frac{\rho\, g\, h_{\text{eau}}}{L} \tag{15}$$

Expérience

Mesure de la viscosité dynamique de l'eau - [1]

Pour différentes hauteurs h, on mesure le débit volumique Q_V en sortie du capillaire. Pour cela, on mesure le temps τ durant lequel s'écoule toujours la même masse m (on peut prendre 20 g par exemple) d'eau mesuré grâce à une balance électronique. On réalise alors l'ajustement affine $Q_V = \frac{m}{\rho\tau} = a(h - h_0)$ étant donné que h et h_{eau} sont reliés par une relation du type $h_{\text{eau}} = h - h_0$. On peut alors en déduire la viscosité dynamique de l'eau η à la température ambiante grâce au coefficient a. La valeur obtenue dépend fortement de la température et si l'on veut la comparer à une valeur théorique il faut la prendre ou la calculer à la bonne température (une formule théorique de la dépendance en température est donné dans [1]).

On veut ensuit voir l'influence de la longueur d'établissement du régime de Poiseuille sur le débit volumique. Pour des capillaires de longueur L trop petite devant la longueur d'établissement, le débit volumique calculé à partir de la formule précédente n'est plus valable et on observe un débit volumique plus faible.

Expérience

Influence de la longueur d'établissement du régime de Poiseuille - [1]

Dans [1], un tracé de Q_V en fonction de $1/L$ est effectué pour des ΔP et D constants. On voit alors que pour des L trop petits le débit volumique s'écarte de la droite théorique et sont plus faibles.

Le problème est que l'on a accès a très peu de capillaires de même diamètre mais de longueurs différentes. Si on trouve deux de même D, dont un est de longueur suffisante et dont l'autre et de longueur inférieure à $\approx 30\,\text{cm}$, on peut calculer pour le plus petit le débit volumique $Q_{V,\text{th}}$ avec la formule précédente et le comparer au débit volumique mesuré $Q_{V,\text{mes}}$. On doit avoir $Q_{V,\text{th}} > Q_{V,\text{mes}}$.

Conclusion

Compléments

Questions

Les notes des questions ont été perdues :(

Commentaires

Pareil :'(