Matrices d'une application linéaire et changement de base : exemples et méthodes

Soient E et F des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Rappels : Coordonnées d'un vecteur dans une base

Lorsqu'on écrit les coordonnées d'un vecteur, le plus souvent ces coordonnées sont exprimées dans la base canonique. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, écrire $v = (1, 1, 0)$ signifie que l'on considère le vecteur v ayant pour coordonnées dans la base canonique $(1, 1, 0)$. Cette idée s'étend à d'autres bases.

Définition. Soit $v \in E$ et soit $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_m)$ une base de E. Les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ sont les scalaires $v_1, \dots, v_m$ tels que $v = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_m u_m$. On note $v = (v_1, \cdots, v_m)_{\mathcal{B}}$.

S'il n'y a pas d'ambiguité concernant la base avec laquelle on travaille, on écrira souvent $v = (v_1, \dots, v_m)$. (C'est par exemple le cas lorsqu'on travaille uniquement avec la base canonique.)

Exemple 1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

— Soit $v \in E$ ayant pour coordonnées dans la base canonique $(1, 1, 0)$. C'est à dire, tel que $v = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$.

— On considère maintenant la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ définie par

$$u_1 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}} \quad u_2 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \quad u_3 = (-2, 0, 0)_{\mathcal{B}}.$$

Comme $v = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}} - (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = u_1 - u_2$, les coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$ sont donc $v = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}'}$.

— Soit $\mathcal{B}'' = (v, u_2, u_3)$. Le vecteur v vérifie $v = 1 \cdot v + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$, donc dans cette base $v = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}''}$.

Différence entre un vecteur et ses coordonnées

— Un vecteur de E est un élément de cet espace. Si l'on dispose d'une base de E on peut décrire ce vecteur en exprimant ses coordonnées dans cette base.

— Changer la base dans laquelle on le décrit s'apparente à changer la langue utilisée pour décrire l'objet. Décrire un objet dans une langue différente ne change pas l'objet, seulement les mots employés pour le décrire. De la même manière, exprimer un vecteur dans une nouvelle base ne change pas l'élément de l'espace E considéré. Seulement ses coordonnées.

En résumé : choisir une base pour écrire les coordonnées d'un vecteur, c'est choisir une langue pour décrire ce vecteur.

Matrices d'une application linéaire

Soient $\mathcal{B}_E = (u_1, \cdots, u_m)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (v_1, \dots, v_m)$ une base de F.

Définition. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(u_i)$ dans la base v_i. C'est à dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_m) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array}$$

où $f(u_i) = a_{1,i} v_1 + \cdots + a_{n,i} v_n$.

Remarque La matrice obtenue est de taille $n \times m$ (elle possède n lignes et m colonnes). Si $m \neq n$, ie. $\dim(E) \neq \dim(F)$, la matrice n'est donc pas carrée (cf. Exemple 2).

Méthode : Déterminer la matrice d'une application linéaire dans les bases canoniques

On suppose que $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ sont les bases canoniques de E et F et on cherche à déterminer la matrice de $f : E \to F$ dans ces bases.
- On calcule **les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}_E$**, c'est-à-dire les valeurs de $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)$.
- Les vecteurs obtenus **donnent les colonnes de** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f)$.

Exemple 2 (Cas d'une matrice non carrée). Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ leurs bases canoniques. C'est-à-dire $\mathcal{B}_E = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{B}_F = (v_1, v_2, v_3)$ où

$$u_1 = (1,0),\ u_2 = (0,1) \quad \text{et} \quad v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1).$$

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x, 3y, x+y)$. Calculons les images de u_1 et u_2.

$$f(u_1) = f(1,0) = (2,0,1) \quad \text{et} \quad f(u_2) = f(0,1) = (0,3,1).$$

Comme $\mathcal{B}_F$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ a pour première colonne les coordonnées de $f(u_1)$ (dans $\mathcal{B}_F$) et pour deuxième colonne les coordonnées de $f(u_2)$ (dans $\mathcal{B}_F$). C'est à dire, la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(u_1) & f(u_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

Exemple 3 (Homothétie). Soit $E = F = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E = (e_1, e_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y) = (2x, 2y)$. On a : $f(1,0) = (2,0)_{\mathcal{B}_F}$ et $f(0,1) = (0,2)_{\mathcal{B}_F}$.

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y) = (2x+y, x+2y)$.

Dans la base canonique Soit $\mathcal{B}_F = \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, on a

$$f\left((1,0)_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\right) = (2,1)_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \text{ et } f\left((0,1)_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\right) = (1,2)_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dans une nouvelle base Soient $v_1 = (1,-1)_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ et $v_2 = (1,1)_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ et soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$. Les vecteurs v_1, v_2 forment une base de $\mathbb{R}^2$. On peut donc chercher à déterminer la matrice de f dans cette base, ie. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'}(f)$. Pour cela, déterminons $f(v_1), f(v_2)$ et **écrivons leurs coordonnées dans** $\mathcal{B}'$. On a

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f\left((1,-1)_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\right) = (1,-1)_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = v_1 = 1v_1 + 0v_2, \\ f(v_2) &= f\left((1,1)_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\right) = (3,3)_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = 3v_2 = 0v_1 + 3v_2. \end{aligned}$$

Autrement dit, dans la base $\mathcal{B}'$ on a : $f(v_1) = (1,0)_{\mathcal{B}'}$ et $f(v_2) = (0,3)_{\mathcal{B}'}$.

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On renvoie à la page 6 pour une description des différentes méthodes pour déterminer la matrice de f dans des bases qui ne sont pas les bases canoniques.

Pour retenir la différence entre application linéaire et matrice dans une base :
- Une application linéaire f, c'est une recette de cuisine qui associe à chaque élément de E un élément de F.
- Pour décrire ce que fait cette recette de cuisine, on peut écrire la matrice de f dans des bases données. Souvent, on choisit de l'exprimer dans les bases canoniques de E et F. Mais on peut choisir de décrire ce que fait f dans d'autres bases que les bases canoniques.
- Pour reprendre l'analogie vue plus haut : imaginez qu'à chaque base correspond un langage. Changer la base dans laquelle on écrit la matrice de f revient à changer la langue utilisée pour décrire ce que fait f.

En résumé : choisir une base pour écrire la matrice de f c'est choisir une langue pour décrire ce que fait f.
Décrire un objet dans une autre langue ne change pas ce à quoi il ressemble. C'est la même chose pour les applications linéaires : on peut décrire ce que fait f dans des bases différentes, cela ne change pas ce que fait f.

Matrices de passage

Définition. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$. On la note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Une matrice de passage est toujours inversible. Elle vérifie :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

On a vu que changer de base revient à changer la langue utilisée pour décrire nos objets. **Une matrice de passage peut être vue comme une traductrice de la langue de la première base vers la deuxième.**

De la base canonique vers une nouvelle base

Méthode : Déterminer la matrice de passage de la base canonique à une autre base
Dans le cas où $\mathcal{B}$ **est la base canonique**, la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ **est la matrice ayant pour colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$.**

Exemple 5 (En dimension 2)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$ et posons $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$. Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Explications : On écrit les vecteurs de la nouvelle base (la base $\mathcal{B}'$) en fonction des vecteurs de la première (la base canonique). On doit donc écrire les coordonnées de v_1 et v_2 en fonction de e_1 et e_2. Les coordonnées de v_1 et v_2 étant déjà données dans la base canonique, on lit immédiatement

$$v_1 = (1, 1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \quad \text{et} \quad v_2 = (1, -1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2.$$

Exemple 6 (En dimension 3)**.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{B}' = ((1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 2))$, alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 7 (Polynômes)**.** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. La base canonique de E est $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$. Soit $\mathcal{B}' = (X + 1, X - 1, 2X^2 + X + 1)$ une autre base. Écrivons les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$:

$$X + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2 \quad \text{et} \quad X - 1 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot X + 0 \cdot X^2,$$
$$2X^2 + X + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot X + 2 \cdot X^2.$$

Donc $X + 1 = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ et $X - 1 = (-1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ et $2X^2 + X + 1 = (1, 1, 2)_{\mathcal{B}}$. Ainsi, la matrice de passage est $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Interprétation en terme de matrice de l'identité

Les matrices de passages peuvent s'interpréter comme des matrices de l'application identité dans différentes bases. On a :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\mathrm{Id}_E.$$

Exemple 8 (En dimension 2). Par exemple, prenons $E = \mathbb{R}^2$. Soient $v_1 = (1,2)$ et $v_2 = (0,3)$. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$. L'application Id_E vérifie (par définition de l'application identité) :

$$\mathrm{Id}_E(v_1) = v_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_E(v_2) = v_2$$

Revenons à la définition de matrice d'une application linéaire (cf. page 1). Pour déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\mathrm{Id}_E$, il nous faut écrire les coordonnées de $\mathrm{Id}_E(v_1)$ et $\mathrm{Id}_E(v_2)$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_E(v_1) &= v_1 = (1,2)_{\mathcal{B}} = 1\cdot e_1 + 2\cdot e_2,\\ \mathrm{Id}_E(v_2) &= v_2 = (0,3)_{\mathcal{B}} = 0\cdot e_1 + 3\cdot e_2.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'}\mathrm{Id}_E = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

Exemples, hors de la base canonique

Tous les exemples vus jusqu'à présent portaient sur des passages de la base canonique à une autre base. On illustre maintenant les notions précédentes dans des cas où ni la base de départ ni la base d'arrivée ne sont la base canonique.

Formule. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ trois bases de E.

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}.$$

En particulier, si $\mathcal{B}$ est la base canonique de E et que l'on vous demande de déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$ vous avez deux possibilités

- Ou bien chercher à exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}''$ en fonctions de ceux de $\mathcal{B}'$.
- Ou bien déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et celle de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et utiliser la formule encadrée ci-dessus.

Exemple 9. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On définit les vecteurs suivants (les coordonnées sont données dans la base canonique)

$$u_1 = (2,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} \quad u_2 = (0,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} \qquad v_1 = (2,2)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} \quad v_2 = (2,0)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}.$$

On pose $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{B}'' = (v_1, v_2)$. Déterminons $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Avec la première méthode Pour cela, écrivons les coordonnées de v_1 et v_2 en fonction de u_1 et u_2. On a

$$\begin{aligned}v_1 &= (2,2)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = (2,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} + (0,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = 1\cdot u_1 + 1\cdot u_2,\\ v_2 &= (2,0)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = (2,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} - (0,1)_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = 1\cdot u_1 + (-1)\cdot u_2.\end{aligned}$$

C'est à dire $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_2 = (1,-1)_{\mathcal{B}'}$. Donc

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}''}\mathrm{Id}_E = \begin{array}{cc} \begin{matrix} v_1 & \;\; v_2 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\end{array}$$

Avec la deuxième méthode On note $\mathcal{B}$ la base canonique et on détermine les deux matrices de passages $P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}''}$:

$$P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Afin d'utiliser la formule encadrée, il nous faut maintenant déterminer l'inverse de $P_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'}$ (cf. méthode vue au cours du premier semestre). On a :

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$ est donc :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''} = P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}''} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRICE DE PASSAGE : RÉCAPITULATIF

Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Si $\mathcal{B}$ est la base canonique Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ **est la matrice ayant pour vecteurs colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$.**

Sinon Deux possibilités :

1. Exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonctions de ceux de $\mathcal{B}$.
   ➤ $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ **est la matrice ayant pour vecteurs colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}$.**
2. Ou bien, en passant par la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$
   (a) Déterminer $P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'}$
   (b) Calculer l'inverse de $P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$
   ➤ $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ **s'obtient avec la formule** $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'}$.

Changement de base

Nous venons de voir que les matrices de passages jouent le rôle de **traductrices** d'une base à une autre. Étudions maintenant comment les utiliser en pratique pour traduire les coordonnées d'un vecteurs dans une nouvelle base, ou encore traduire la matrice d'une application linéaire dans des nouvelles bases.

Changement de base pour les coordonnées d'un vecteur

Il n'est pas toujours évident de voir directement comment s'écrit un vecteur donné dans une nouvelle base. La propriété suivante permet de passer d'une base à une autre à l'aide d'une matrice de passage.

Propriété. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et soit $v \in E$. On note $(v_1, \cdots, v_m)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et $(v'_1, \cdots, v'_m)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_m \end{pmatrix}$$

Remarque. La formule précédente donne en particulier la relation (en multipliant par $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ à gauche et à droite) :

$$P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_m. \end{pmatrix}$$

Souvent, dans les exercices, on notera $\mathcal{B}$ la base canonique, on vous donnera les coordonnées de v dans la base canonique $\mathcal{B}$ et on vous demandera de calculer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. C'est donc cette dernière formule qu'il faudra utiliser pour déterminer la valeur de $(v'_1, \cdots, v'_m)$.

Exemple 10. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique. Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ où u_1, u_2 sont les vecteurs ayant pour coordonnées dans la base canonique :

$$u_1 = (1, 2)_{\mathcal{B}} \qquad u_2 = (3, 0)_{\mathcal{B}}.$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et son inverse est } P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $v = (-5, 2)_{\mathcal{B}}$, alors dans la base $\mathcal{B}'$, ce vecteur a pour coordonnées

$$P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & -3\\-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

Interprétation Dans la base $\mathcal{B}'$, le vecteur v s'écrit donc $(1, -2)$. Ceci signifie

$$v = 1 \cdot u_1 + (-2) \cdot u_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad v = (1, -2)_{\mathcal{B}'}.$$

Changement de base pour une matrice d'application linéaire

Dans l'Exemple 4, nous avions calculé « à la main » la matrice de l'application f dans une nouvelle base. Comme pour les vecteurs, il n'est pas toujours évident de voir directement comment s'écrit la matrice de f dans une nouvelle base. On dispose ici aussi d'une formule :

Propriété. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et soient $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On note,

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f) \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(f)$$

$$\text{Alors} \quad A' = P^{-1}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F} A P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E} = P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F} A P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$$

Pour s'en souvenir : La matrice A' s'applique à un vecteur aux coordonnées X' dans la base $\mathcal{B}'_E$ et rend un vecteur Y' dans la base $\mathcal{B}'_F$. Pour l'obtenir il faut donc

1. Traduire les coordonnées du vecteur données dans la base $\mathcal{B}'_E$ en des coordonnées dans $\mathcal{B}_E$. On applique donc $P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ au vecteur X'
2. Ensuite, il faut apliquer la recette de cuisine f. On applique donc la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On applique donc A à $P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}X'$. Ceci donne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$.
3. Enfin, il faut traduire ces coordonnées dans la base $\mathcal{B}'_F$ c'est à dire appliquer $P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F}$ à $(AP_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}X')$. Ce qui donne la formule précédente. Avec un schéma :

$$\begin{tikzcd}
\text{Coordonnées dans } \mathcal{B}_E \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(f)"] & \text{Coordonnées dans } \mathcal{B}_F \arrow[d, "P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F}"', "\text{Traduction}"] \\
\text{Coordonnées dans } \mathcal{B}'_E \arrow[u, "\text{Traduction}", "P^{-1}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}"'] \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(f)"] & \text{Coordonnées dans } \mathcal{B}'_F
\end{tikzcd}$$

Exemple 11. On reprend l'Exemple 4. On avait $E = F = \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = 2x+y, x+2y$ (dans la base canonique) et $\mathcal{B}' = ((1, -1), (1, 1))$. Donc

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}}(f) = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'}$ est alors $P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} = 1/2\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

(Notons que dans cet exemple $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F = \mathcal{B}_{\text{can}}$ et $\mathcal{B}'_E = \mathcal{B}'_F = \mathcal{B}'$ donc $P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F} = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E} = P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'}$). Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'}(f) = P^{-1}_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} A P_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$$

DÉTERMINER LA MATRICE DE f DANS DE NOUVELLES BASES : RÉCAP

1. On écrit la matrice de f dans les bases de départ (souvent les bases canoniques).
2. On détermine les matrice de passages $P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F}, P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$.
3. On calcule l'inverse de $P_{\mathcal{B}'_F,\mathcal{B}_F}$.
4. On calcule A' avec la formule $A' = P^{-1}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F} A P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$.