Méthode : Diagonalisation

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K}$ pouvant être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple).

Rappel de vocabulaire

Polynôme caractéristique Le polynôme $\det(A - XI_n)$;

Vecteur propre Un vecteur $v \in M_n(\mathbb{K})$ **non-nul** pour lequel il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Av = \lambda v$;

Valeur propre Une racine du polynôme caractéristique ;
(ou de manière équivalente un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe $v \in M_n(\mathbb{K})$ **non-nul** tel que $Av = \lambda v$)

Polynôme scindé Un polynôme est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il est ou bien constant ou bien un produit de polynômes de degré 1, *i.e.* s'écrit sous la forme $P = (X - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \cdots (X - \lambda_l)^{m_{\lambda_l}}$.
Par exemple $P := (X-1)^2(X-2)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. En revanche $Q := (X^2+1)(X-2)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (car X^2+1 n'a pas de racines réelles) mais est scindé sur $\mathbb{C}$ car $X^2+1 = (X+i)(X-i)$ et donc Q s'écrit $Q = (X+i)(X-i)(X-2)$.

Racines simples Une racine λ_i de multiplicité 1, ie. telle que $m_{\lambda_i} = 1$.

Racines multiples Une racine λ_i telle que $m_{\lambda_i} \geqslant 2$.

Étudier la diagonalisabilité d'une matrice

Étape 1 : Polynôme caractéristique On cherche les racines de $\det(A - XI_n)$.

1. Calculer le polynôme caractéristique :
   — Ou bien en développant directement par rapport à une ligne/un colonne ;
   — Ou bien en faisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes avant de développer (ce qui simplifie généralement les calculs et permet d'avoir un polynôme factorisé beaucoup plus facilement).
2. Factoriser le polynôme au maximum et déterminer ses racines :
   — Ou bien en trouvant des racines évidentes ;
   — ou à l'aide d'identités remarquables ;
   — ou avec le calcul de discriminant et expression des racines, etc.
3. Une fois le polynôme factorisé au maximum :
   — Si le polynôme n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable.
   Par exemple $Q = (X^2+1)(X-2)$ n'admet qu'une racine réelle (et pas 3) donc n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
   — Si le polynôme est scindé, *i.e.* se factorise sous la forme

$$\chi_A = (X - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \cdots (X - \lambda_l)^{m_{\lambda_l}} \tag{1}$$

➤ Les λ_i sont les valeurs propres de A
➤ le m_{λ_i} et la multiplicité de λ_i.

— Si $m_{\lambda_i} = 1$ pour tout i, *i.e.* le polynôme est à racine simple : la matrice est diagonalisable.
— S'il existe au moins un i tel que $m_{\lambda_i} \geqslant 2$, alors on va devoir étudier les sous-espace propres.

Étape 1 : Récapitulatif
— Si le polynôme n'est **pas scindé** sur $\mathbb{K}$, alors la matrice n'est **pas diagonalisable sur** $\mathbb{K}$.
— Si le polynôme est **scindé à racines simples** sur $\mathbb{K}$, alors la matrice est diagonalisable.
— Si le polynôme est **scindé mais avec au moins une racine qui n'est pas simple**, alors **on ne peut pas conclure sur la diagonalisabilité** : il faut **étudier la dimension des sous-espaces propres** *i.e.* des $\ker(A - \lambda_i I_n)$.
➤ Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.

On suppose donc maintenant qu'on est dans le dernier cas : le polynôme est scindé (comme dans (1)) et admet une racine multiple (un $m_i \geqslant 2$). Pour déterminer si la matrice est diagonalisable, on utilise :

Rappel de cours
La matrice est diagonalisable
si et seulement si $\dim\left(\ker(A-\lambda_i I_n)\right) = m_{\lambda_i}$ pour tout i.

Étape 2 : Sous-espaces propres On cherche donc à déterminer pour tout i, si la dimension de $\ker(A-\lambda_i I_n)$ est égale à m_i.

1. Si $m_{\lambda_i} = 1$ on a automatiquement $\dim\left(\ker(A-\lambda_i I_n)\right) = 1$.
2. Si $m_{\lambda_i} \geqslant 2$, on calcule la dimension de $\ker(A-\lambda_i I_n)$:
   — Ou bien en **échelonnant** la matrice $A-\lambda_i I_n$:
   (avec la méthode du pivot, vue en L1)
   le **rang** de $A-\lambda_i I_n$ est le nombre de lignes non-nulles dans la forme échelonnée. On on trouve alors la **dimension du noyau** avec le **théorème du rang**[1] :
   $$\dim\left(\ker(A-\lambda_i I_n)\right) = n - \mathrm{rg}(A-\lambda_i I_n).$$
   — Ou bien en déterminant **une base** de $\ker(A-\lambda_i I_n)$
   c'est à dire en trouvant tous les vecteurs v tels que $(A-\lambda_i I_n)v = 0$:
   cf. « *7.2. Comment trouver une base d'un sous-espace vectoriel donné par un système d'équations ?* » dans le poly de MEU152.
   La **dimension est donnée par le nombre de vecteurs de base**.

Étape 2 : Récapitulatif
— Si pour une valeur propre λ_i on obtient
$\dim\left(\ker(A-\lambda_i I_n)\right) < m_{\lambda_i}$ alors la matrice n'est pas diagonalisable.
— Si on obtient que $\dim\left(\ker(A-\lambda_i I_n)\right) = m_{\lambda_i}$ **pour toutes les valeurs propres** λ_i, alors la matrice est diagonalisable.

1. Rappel : le théorème du rang donne $\dim(\mathbb{K}^n) = \dim\ker(M) + \mathrm{rg}(M)$. Et on a $\dim(\mathbb{K}^n) = n$. On l'applique ici à $M = A - \lambda_i I_n$.

Diagonaliser une matrice

Rappel de cours Diagonaliser une matrice A c'est déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que
$$A = PDP^{-1}.$$

Diagonalisabilité Déterminer si A est diagonalisable :

1. Avec l'Étape 1 ci-dessus, calculer le polynôme caractéristique et déterminer ses racines.
   ➤ **Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.**
2. Avec l'Étape 2 ci-dessus, déterminer si A est diagonalisable et **calculer la dimension des sous-espaces propres.**
   Si $m_{\lambda_i} = \dim\left(\ker(A-\lambda_i A)\right)$ pour tout i, la matrice est diagonalisable.
   Chaque valeur propre apparaîtra m_{λ_i} fois dans la matrice diagonale.
   Rq. Si l'on vous demande de diagonaliser la matrice, il est plus judicieux dans l'étape 2 de calculer la dimension de $\ker(A-\lambda_i I_n)$ en exhibant une base. Vous obtenez ainsi à la fois la dimension (pour vérifier que c'est diagonalisable) et une base vecteurs propres

Base de sous-espaces propres Déterminer, pour toute valeur propre λ_i, une base de $\ker(A-\lambda_i I_n)$
cf. « *7.2. Comment trouver une base d'un sous-espace vectoriel donné par un système d'équations ?* » dans le poly de MEU152.
Dans la suite on note $v_1^i, \dots, v_{j_i}^i$ une base de vecteurs propres de $\ker(A-\lambda_i I_n)$.

Déterminer la matrice de passage La matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres est la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs propres que l'on vient de déterminer, *i.e.* les $v_1^1, \dots, v_{m_{\lambda_1}}^1, v_1^2, \dots, v_{m_{\lambda_2}}^2, v_1^l, \dots, v_{m_{\lambda_l}}^l$. On a alors $A = PDP^{-1}$.
➤ Voir l'exemple en fin de fiche méthode pour une remarque sur les différentes écritures possibles.

RECAP : DIAGONALISER

Faire les étapes pour **déterminer si** la matrice A **est diagonalisable.**

Si elle l'est :

— Les valeurs propres sont exactement les racines de χ_A.

— Une valeur propre λ_i apparaît sur la diagonale m_{λ_i} fois.

— Pour chaque espace propre : calculer une base de vecteurs propres.

— La matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de base des sous-espaces propres.

On vous demandera parfois de calculer P^{-1}. Si on vous le demande

Calculer l'inverse de P Pour calculer l'inverse d'une matrice

— Ou bien avec la méthode du pivot où les opérations sur les lignes sont aussi effectuées sur l'identité.
cf. Exemple 22 du poly de MEU152.

— Ou bien avec la formule $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t\mathrm{Com}(P)$.

Récapitulatif général

DIAGONALISATION : RÉCAPITULATIF

Pour diagonaliser une matrice A

1. **Calculer le polynôme caractéristique et déterminer ses racines :**
   — Si le polynôme n'est **pas scindé** sur $\mathbb{K}$,
   alors la matrice n'est **pas diagonalisable sur** $\mathbb{K}$.
   Et donc on s'arrête là.
   — Si le polynôme est **scindé** : on étudie les sous-espaces propres.
   ➤ Les valeurs propres de A sont exactement les racines de χ_A.
2. **Étudier la dimension des sous espaces propres et déterminer une base de vecteurs propres :**
   — Pour chaque espace propre $\ker(A - \lambda_i I_n)$: calculer une base de vecteurs propres.
   — Si pour une valeur propre λ_i on obtient
   $\dim(\ker(A - \lambda_i I_n)) < m_{\lambda_i}$ alors la matrice n'est pas diagonalisable.
   — Si on obtient que $\dim(\ker(A - \lambda_i I_n)) = m_{\lambda_i}$ **pour toutes les valeurs propres** λ_i, alors la matrice est diagonalisable.
   On calcule alors pour chaque valeur propre une base du sous-espace propre $(\ker(A - \lambda_i I_n))$
3. **Matrice de passage** La matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de base des sous-espaces propres.

Un exemple

Diagonalisons $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Polynôme caractéristique Calculons $\det(A - XI_3)$.

$$\chi_A = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 3 & -1 \\ 2 & -1-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$
$$= -(2-X)^2(3+X)$$
$$= -(2-X)^2(X-(-3)).$$

Donc les valeurs propres sont :

— $\lambda_1 = 2$ de multiplicité $m_{\lambda_1} = m_2 = 2$;

— $\lambda_2 = -3$ de multiplicité $m_{\lambda_2} = m_{-3} = 1$.

Sous-espaces propres Déterminons les sous-espaces propres.

1. Déterminons $\ker(A - 2I_3)$.

$$(A-2I_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

Le système est donc de rang 1 dans $\mathbb{R}^3$. C'est à dire $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1$ et donc $\dim(\ker(A - 2I_3)) = 3 - 1 = 2$.

➤ Remarque : On a bien $\dim(\ker(A - 2I_3)) = m_2$. Comme de plus -3 est une valeur propre de multiplicité 1, à ce stade, on a montré que A était diagonalisable.

On vérifie que les vecteurs $v_1 := (0, 1, 3)$ et $v_2 := (1, 0, -2)$ vérifient bien cette dernière équation et forment bien une famille libre. Donc (v_1, v_2) est une base de $\ker(A - 2I_3)$.

2. Déterminons $\ker(A - (-3)I_3) = \ker(A + 3I_3)$.

Remarque : Comme -3 est une racine de multiplicité 1, pour déterminer une base de $\ker(A+3I_3)$ il suffit de déterminer un vecteur *non-nul* de cet espace $\ker(A + 3I_3)$.

On a $A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

On remarque [2] que $v_3 := (1, -1, 0)$ est dans le noyau de $A + 3I_3$. Comme -3 est une racine de multiplicité 1 de χ_A, on a $\dim\ker(A + 3I_3) = 1$ et donc $\{v_3\}$ est une base du sous-espace propre $\ker(A + 3I_3)$.

La matrice de passage La matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (v_1, v_2, v_3) est

$$P := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

➤ **Remarque sur l'ordre des valeurs propres** Vous pouvez bien sûr choisir de changer l'ordre des valeurs propres sur la diagonale :

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mais dans ce cas il faut aussi changer l'ordre des colonnes de la matrice de passage : pour obtenir la matrice diagonale la plus à droite ci-dessus, il faut considérer la matrice de passage de la base canonique à (v_3, v_2, v_1) c'est à dire la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_3, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Si on ne le remarque pas immédiatement, on peut bien évidemment poser le système et chercher à le résoudre comme d'habitude, en faisant un pivot.