

# Équivalence orbitale quantitative

Amandine Escalier

*Ces notes sont un support supplémentaire au mini-cours donné durant la conférence « Équivalence orbitale » de juillet 2024. Elles sont en cours de complétion et comportent très certainement de nombreuses fautes de frappes et typos. L'auteure fera de son mieux pour les corriger d'ici la fin de la conférence.*

## Table des matières

Conventions et notations	2
Introduction	2
<b>1 Équivalence orbitale quantitative : panorama</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions et exemples	3
1.1.1 Équivalence orbitale	3
1.1.2 Quantification	4
1.2 Géométrie et quantification	6
1.2.1 Croissance	6
1.2.2 Isopérimétrie	6
1.3 Rigidité $L^1$	7
1.3.1 Actions de $\mathbb{Z}$	7
1.3.2 Cadre non-moyennable	8
<b>2 Suites pavantes et quantification</b>	<b>8</b>
2.1 Suite pavant un Følner	8
2.1.1 Définition	8
2.1.2 Exemples de suites pavantes	9
2.2 Quantification et pavages	10
2.2.1 Critère de quantification	10
2.2.2 Exemples d'applications et limitations	12
<b>3 Produits graphés : une aventure hors du monde moyennable</b>	<b>13</b>
3.1 Équivalence mesurée quantitative	14
3.1.1 Équivalence mesurée	14
3.1.2 Quantification	16
3.2 Produits graphés	18
3.2.1 Le cas des groupes d'Artin à angles droits	18
3.2.2 Quantification et produits graphés	19
Bibliographie	25

## Conventions et notations

Étant donné un graphe fini simple<sup>1</sup>  $\Gamma$ , on note  $V\Gamma$  l'ensemble de ses sommets et  $E\Gamma \subseteq V\Gamma \times V\Gamma$  l'ensemble de ses arêtes. On munit  $\Gamma$  de la distance usuelle fixant à 1 la longueur d'une arête.

Soient  $G$  un groupe de type fini et  $S_G$  une partie génératrice finie (symétrique) de  $G$ . On note  $(G, S_G)$  le **graphe de Cayley** de  $G$  associé à la partie génératrice  $S_G$ , ie. le graphe  $\Gamma$  tel que  $V\Gamma = G$  et  $E\Gamma := \{(g, gs) : g \in G, s \in S_G\}$ . Si  $g, g' \in G$ , on note

$$|g|_{S_G} := \min \{k \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, \dots, s_k \in S_G : g = s_1 \cdots s_k\} \quad d_{S_G}(g, g') := |g^{-1}g'|_{S_G}$$

On note  $B_{S_G}(e, R) = \{g \in G : d_{S_G}(e, g) \leq R\}$  la boule de rayon  $R$  dans le graphe  $(G, S_G)$ . Enfin, pour tout  $F \subset G$ , on définit le **bord de  $F$  relativement à  $S_G$**  par

$$\partial_{S_G} F := \{g \in F \mid \exists s \in S_G : gs \notin F\}.$$

Soit  $m \in \mathbb{N}$ . On note  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$  le **produit en couronne** de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  avec  $\mathbb{Z}$ . Il s'agit du groupe  $G$  défini par  $G = (\oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ , où le produit semi-direct est pris en faisant agir un élément  $z \in \mathbb{Z}$  sur un élément  $(\varepsilon_i)_i$  de  $\oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  via

$$z \cdot (\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (\varepsilon_{i+z})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles croissantes, on note  $f \preceq g$ , s'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $f(n) = O(g(Cn))$  quand  $n$  tend vers l'infini. On note  $f \sim g$  si  $f \preceq g$  et  $g \preceq f$ . On dira alors que  $f$  et  $g$  sont **asymptotiquement équivalents**.

## Introduction

[À écrire]

---

1. ie. un graphe sans arête multiple, sans boucle sur un sommet.

# I Équivalence orbitale quantitative : panorama

## I.1 Définitions et exemples

### I.1.1 Équivalence orbitale

**Définition I.1.** On dit que  $G$  et  $H$  sont **orbitalement équivalents (OE)** s'il existe un espace de probabilité  $(X, \mu)$  sur lequel  $G$  et  $H$  agissent librement, en préservant la mesure et avec les mêmes orbites (à ensemble de mesure nulle près).

**Exemple I.2** (Odomètre dyadique). Considérons  $G = \mathbb{Z}$  et  $H = \mathbb{Z}^2$ .

**Espace de probabilité** Soit  $\{0, 1\}$  muni de la probabilité uniforme et soit  $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  muni de la mesure produit. Un élément de  $X$  est donc de la forme  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $x_i \in \{0, 1\}$ .

**Action de  $\mathbb{Z}$**  Soit  $(x_i)_i \in X$ . Si  $x_i = 1$  pour tout  $i$ , alors on pose  $1 \cdot (x_i)_i = (0, 0, \dots)$ . Sinon, soit  $i_0$  le premier indice  $i$  tel que  $x_i = 0$ , c'est-à-dire tel que  $(x_i)_i$  s'écrit  $(1, \dots, 1, 0, x_{i_0}, x_{i_0+1}, \dots)$ . On définit alors l'action de  $1 \in \mathbb{Z}$  sur  $(x_i)_i$  (notée aussi «  $T(x_i)$  ») par

$$1 \cdot (1, \dots, 1, 0, x_{i_0+1}, \dots) = T(1, \dots, 1, 0, x_{i_0+1}, \dots) := (0, \dots, 0, 1, x_{i_0+1}, \dots).$$

► Penser à l'addition de 1 en base 2. Le coefficient  $x_{i_0}$  correspond au chiffre qui absorbe la retenue.

**Action de  $\mathbb{Z}^2$**  Soit  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$  et définissons l'action de  $(1, 0)$  sur  $(x_i)_i$ .

On pose (voir aussi figure 1)

$$(1, 0) \cdot (1, x_1, 1, x_3, \dots, 1, x_{2i-1}, 0, x_{2i+1}, \dots) = (0, x_1, 0, x_3, \dots, 0, x_{2i-1}, 1, x_{2i+1}, \dots).$$

L'action de  $(0, 1)$  est définie de manière analogue sur les coefficients impairs

$$(0, 1) \cdot (x_0, 1, x_2, 1, x_4, \dots, 1, x_{2i}, 0, x_{2(i+1)}, \dots) = (x_0, 0, x_2, 0, x_4, \dots, 0, x_{2i}, 1, x_{2(i+1)}, \dots).$$

Les deux actions ainsi définies sont orbitalement équivalentes : deux éléments de  $X$  sont dans la même orbite si et seulement s'ils diffèrent d'un nombre fini de coefficients.

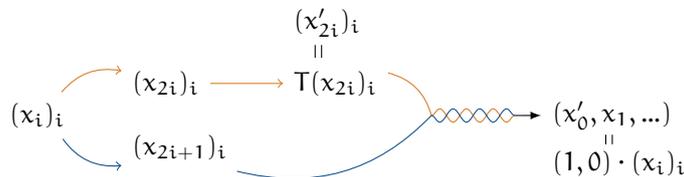


FIGURE 1 – Action de  $(1, 0)$  sur  $X$

**Remarque I.3** (Odomètres plus généraux). Étant donnée une suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers supérieurs ou égaux à 2, posons  $\Omega := \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, \dots, k_n\}$ . Comme précédemment, on peut définir une action de  $\mathbb{Z}$  et une action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\Omega$ . Ainsi, soit  $i \in \mathbb{N}$  et  $x_i < k_i$ , on a

$$1 \cdot (k_0, k_1, \dots, k_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots) = (0, \dots, 0, x_i + 1, x_{i+1}, \dots).$$

L'action de  $\mathbb{Z}^2$  est définie de manière analogue à l'exemple 1.2. Ceci donne à nouveau une équivalence orbitale entre  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}^2$ .

Ces groupes sont des cas particuliers de groupes moyennables.

**Groupes moyennables** On dit que  $G$  est **moyennable** s'il existe une suite  $F_n \subset G$  de parties finies de  $G$  tq.  $|\partial_{S_G} F_n|/|F_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . La suite  $(F_n)_n$  est appelée **suite de Følner**. La famille des groupes moyennables est – du point de vue de la géométrie – une famille très riche, présentant des groupes aux comportements très variés. À titre d'exemple, on y trouve aussi bien des groupes à croissance<sup>2</sup> polynomiale – tels que  $\mathbb{Z}^d$  ou le groupe de Heisenberg – que des groupes à croissance exponentielle – comme les groupes d'allumeur de réverbères  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$  ou les groupes de Baumslag-Solitar  $BS(1, n)$ .

À l'inverse, du point de vue de l'équivalence orbitale, cette famille ne présente qu'une seule classe d'équivalence :

**Théorème 1.4** (Ornstein-Weiss [OW87]). Tout groupe moyennable infini dénombrable est orbitalement équivalent à  $\mathbb{Z}$ .

Ainsi la relation d'équivalence orbitale n'est-elle pas sensible à la géométrie. Dans le but d'affiner cette relation, afin de distinguer les groupes moyennables, Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera [DKLMT20] ont introduit sa version quantitative.

### 1.1.2 Quantification

**Idée** Représenter l'action de  $G$  sur  $X$  par un graphe et munir ainsi  $X$  d'une distance.

**Définition 1.5.** Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$  et soit  $S_G$  une partie génératrice finie (symétrique) de  $G$ . Le **graphe de Schreier** associé, noté  $(X, S_H)$ , est le graphe ayant pour :

- Ensemble de sommets  $X$
- Ensemble d'arêtes  $\{(x, s \cdot x) \mid x \in X, s \in S_G\}$ .

En fixant à 1 la longueur d'une arête on munit  $(X, S_G)$  d'une distance notée  $d_{S_G}$ , où la distance  $d_{S_G}(x, x')$  entre deux sommets  $x$  et  $x'$  est la longueur du plus court chemin les reliant.

**Exemple 1.6.** Soit  $X = G$  où  $G$  agit sur  $X$  par translation à gauche. Alors le graphe de Schreier associé est le graphe de Cayley  $(G, S_G)$ .

**Quantification** Soit  $h \in H$  et  $x \in X$ . Par définition du graphe de Schreier, les sommets  $x$  et  $h \cdot x$  sont à distance 1 dans  $(X, S_H)$ . En revanche dans  $(X, S_G)$  la distance entre ces deux sommets n'est pas nécessairement égale à 1. Par exemple, dans la figure 2 les sommets  $x$  et  $h \cdot x$  sont à distance 1 dans le graphe de droite  $(X, S_H)$ . En revanche ces mêmes sommets, c'est-à-dire ces mêmes éléments de  $X$ , sont à distance 2 dans  $(X, S_G)$ .

Lorsque  $G$  et  $H$  sont OE sur  $(X, \mu)$  la valeur de  $d_{S_G}(x, h \cdot x)$  est finie pp.  $x \in X$  (à chaque orbite correspond une composante connexe dans le graphe de Schreier). Dans le but d'affiner cette relation d'équivalence Bader, Furman et Sauer [BFS13] ont introduit la notion d'équivalence orbitale **intégrable**. Ceci correspond au cas où les applications distances  $x \mapsto d_{S_G}(x, h \cdot x)$

2. Voir définition 1.10

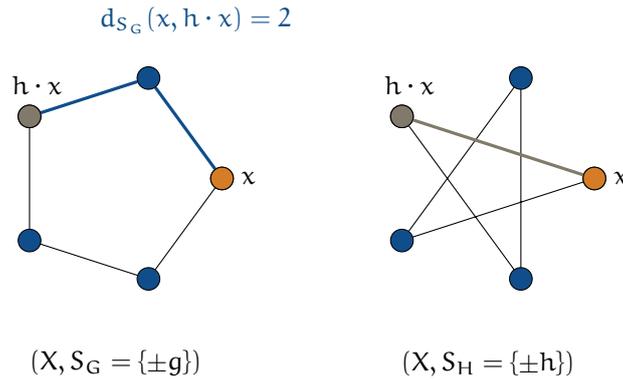


FIGURE 2 – Vers la définition de la quantification : comparaison de graphes de Schreier

et  $x \mapsto d_{S_H}(x, g \cdot x)$  sont  $L^1$  pour tout  $g \in G$  et  $h \in H$ . Cette définition a été étendue par Delabie, Koivisto, Le Maître et Tessera [DKLMT20] à un plus large panel d'intégrabilités.

Soient  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  deux fonctions croissantes.

**Définition 1.7** ([DKLMT20]). Soient  $G, H$  deux groupes OE sur un espace de probabilités  $(X, \mu)$ . On dit que l'équivalence orbitale est  **$(\varphi, \psi)$ -intégrable** de  $G$  vers  $H$  si pour tout  $g \in G$  et  $h \in H$  il existe  $C_g, C_h > 0$  tels que

$$\int_X \varphi(C_g d_{S_H}(x, g \cdot x)) d\mu < \infty \quad \int_X \psi(C_h d_{S_G}(x, h \cdot x)) d\mu < \infty.$$

Si  $d_{S_H}(x, g \cdot x)$  est bornée presque partout, on dira que l'OE est  **$(L^\infty, \psi)$ -intégrable**.

#### Notation 1.8.

- Lorsque  $\varphi(x) = x^p$  on remplacera  $\varphi$  par  $L^p$ .  
En particulier, pour ne requérir aucune condition d'intégrabilité sur une application distance on la supposera  $L^0$ . Ainsi, si l'on s'intéresse seulement à l'intégrabilité de la première distance, on parlera de  $(\varphi, L^0)$ -intégrabilité.
- Si  $\varphi \sim \psi$  on parlera d'OE  $\varphi$ -intégrable – au lieu de  $(\varphi, \varphi)$ -intégrable.
- On abrégera parfois « l'équivalence orbitale est  $(\varphi, \psi)$ -intégrable de  $G$  vers  $H$  » en «  $G$   $(\varphi, \psi)$ -OE  $H$  ».

#### Remarque 1.9.

- Toute OE  $(\varphi, \psi)$ -intégrable de  $G$  vers  $H$  est  $(\psi, \varphi)$ -intégrable de  $H$  vers  $G$ .
- Plus  $\varphi$  croît vite plus la condition est forte. Par exemple :  
 $(L^1, L^0)$ -intégrable implique  $(L^{1/2}, L^0)$ -intégrable qui implique  $(\log, L^0)$ -intégrable.
- Si  $\varphi \preceq \psi$  alors toute OE  $(\varphi, \psi)$ -intégrable est  $\varphi$ -intégrable.

**Cocycles et quantification** Soit  $(X, \mu)$  un couplage d'équivalence orbitale entre  $G$  et  $H$ . Les actions de  $G$  et  $H$  sur  $X$  étant libres, pour tout  $g \in G$  et presque tout  $x \in X$  il existe un unique élément  $c(g, x) \in H$  tel que  $g \cdot x = c(g, x) \cdot x$ . De manière analogue, pour tout  $h \in H$  et p.p.  $x \in X$  il existe un unique élément  $c'(h, x) \in G$  tel que  $h \cdot x = c'(h, x) \cdot x$ . Ceci définit donc deux applications :

$$c : G \times X \rightarrow H \quad \text{et} \quad c' : H \times X \rightarrow G,$$

qui sont les **cocycles** associés au couplage.

Notons que  $d_{S_H}(x, g \cdot x) = |c(g, x)|_{S_G}$ . Ainsi, l'équivalence orbitale est  $(\varphi, \psi)$ -intégrable (de  $G$  vers  $H$ ) si pour tout  $g \in G$  et tout  $h \in H$  il existe  $C_g, C_h > 0$  tels que les applications

$$x \mapsto \varphi(C_g c(g, x)) \quad \text{et} \quad x \mapsto \psi(C_h c(h, x))$$

sont intégrables.

## 1.2 Géométrie et quantification

On s'intéresse maintenant au comportement, sous OE quantitative, des données géométriques que sont la croissance et le profil isopérimétrique des groupes.

### 1.2.1 Croissance

**Définition 1.10.** La **croissance** du groupe  $G$  est la fonction définie par

$$V_G(\mathbb{R}) := |B_{S_G}(e, \mathbb{R})|.$$

**Exemple 1.11.** —  $V_{\mathbb{Z}^d}(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^d$

- Si  $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$  alors  $V_G(\mathbb{R}) \sim \exp$ .
- Si  $G$  est non-moyennable, alors  $V_G \sim \exp$ .

Bowen montre en annexe de [Aus16] que la croissance est invariante par équivalence orbitale  $L^1$ -intégrable. Ce résultat est étendu aux OE  $(\varphi, \psi)$ -intégrables par [DKLMT20].

**Théorème 1.12** ([DKLMT20, Théorème 3.1]). Soit  $\varphi$  une fonction croissante, sous-additive telle que  $\varphi(0) = 0$ . S'il existe une OE  $(\varphi, L^0)$ -intégrable de  $G$  vers  $H$  alors

$$V_G(\mathbb{R}) \preceq V_H(\varphi^{-1}(\mathbb{R})).$$

**Application 1.13.** Soit  $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$  et  $H = \mathbb{Z}$ . Dans ce cas  $V_G(\mathbb{R}) \sim \exp(\mathbb{R})$  et  $V_H(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$ . S'il existe une OE  $(\varphi, L^0)$ -intégrable de  $G$  vers  $H$ , le théorème implique alors :

$$\exp(\mathbb{R}) \sim V_G(\mathbb{R}) \preceq \varphi^{-1}(\mathbb{R}).$$

Ainsi  $\varphi$  ne peut pas croître plus rapidement que  $\log$ .

### 1.2.2 Isopérimétrie

**Définition 1.14.** Le **profil isopérimétrique** de  $G$  est défini comme

$$I_G(x) := \sup_{|A| \leq x} |A|/|\partial A|.$$

**Exemple 1.15.**

- Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ , alors  $I_{\mathbb{Z}^d}(x) \sim x^{1/d}$ .
- Plus généralement, si  $G$  est un groupe à croissance polynomiale de degré  $d$  – c'est-à-dire si  $V_G(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^d$  – alors  $I_G(x) \sim x^{1/d}$  [Cou00].

- Si  $G = \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) alors  $I_G(x) \sim \log(x)$ .
- Pour des groupes à profil prescrit, voir les produits diagonaux de [BZ21].

**Remarque 1.16.**  $G$  est moyennable si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_G(x) = +\infty$ .

**Théorème 1.17** ([DKLMT20]). Si  $G$   $(\varphi, \psi)$ -OE  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

**Remarque 1.18** (Intégrabilité à croissance rapide).

- ▶ Ce théorème ne s'applique pas si  $\varphi$  croît plus rapidement que l'identité.
- ▶ Cependant si  $\varphi' \preceq \varphi$ , alors toute OE  $(\varphi', L^0)$ -intégrable est  $(\varphi, L^0)$ -intégrable  
En particulier  $(L^2, L^0)$ -intégrable  $\Rightarrow (L^1, L^0)$ -intégrable  $\Rightarrow I_H \preceq I_G$ .

**Exemple 1.19** (Obstruction de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$ ). Si  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  alors  $I_G(n) \sim n^{1/2}$  et  $I_H(n) \sim n$ . Supposons qu'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$ .

D'après la remarque précédente, si  $\text{id} \preceq \varphi$  alors l'OE est  $(L^1, L^0)$ -intégrable. Le théorème 1.17 implique alors  $n \sim I_H(n) \preceq I_G(n) \sim n^{1/2}$ , ce qui est absurde. Donc  $\varphi \preceq \text{id}$ .

Si  $\varphi \preceq \text{id}$ , alors le théorème précédent donne qu'une équivalence orbitale  $(\varphi, L^0)$ -intégrable de  $G$  vers  $H$  doit vérifier  $\varphi(x) \preceq x^{1/2}$ .

**Conclusion :** Une OE  $(\varphi, L^0)$ -intégrable de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$  vérifie  $\varphi \preceq L^{1/2}$ .

De manière analogue, si  $n > m$  alors une OE  $(\varphi, L^0)$ -intégrable de  $\mathbb{Z}^n$  vers  $\mathbb{Z}^m$  vérifie  $\varphi(x^{1/m}) \preceq x^{1/n}$  et donc  $\varphi(x) \preceq x^{m/n}$ .

**Remarque 1.20** (Asymétrie). Si  $I_H \preceq I_G$ , alors toute fonction croissante  $\varphi$  telle que  $t/\varphi(t)$  croît, vérifie  $\varphi \circ I_H \preceq I_G$ . Ainsi, le théorème ne donne aucune obstruction sur l'intégrabilité du groupe au profil le plus rapide vers le groupe au profil le plus lent.

Par exemple, dans le cas où  $G = \mathbb{Z}$  et  $H = \mathbb{Z}^2$ , on a bien  $I_H(x) = x^{1/2} \preceq x = I_G(x)$ . Le théorème ne fournit donc aucune borne à l'intégrabilité de  $\mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}^2$ .

**Remarque 1.21** (Groupes non-moyennables). Si  $G$  et  $H$  sont des groupes non-moyennables, alors leur profil isopérimétrique est borné. Ainsi  $I_G$  et  $I_H$  sont asymptotiquement équivalents à une constante. Dans le cas **non-moyennable**, le théorème précédent ne donne aucune obstruction, (pour l'instant...)

### 1.3 Rigidité $L^1$

On vient de voir que le type de croissance ainsi que le profil isopérimétrique étaient préservés par équivalence orbitale  $L^1$ -intégrable. On termine ce panorama sur d'autres phénomènes illustrant la rigidité de l'équivalence orbitale  $L^1$ .

#### 1.3.1 Actions de $\mathbb{Z}$

Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux transformations ergodiques, préservant la mesure sur  $(X, \mu)$ .

**Définition 1.22.** On dit que  $T_1$  et  $T_2$  sont

- **conjuguées**, s'il existe  $S$  une transformation préservant la mesure définie sur  $(X, \mu)$  telle que  $ST_1 = T_2S$ .
- **flip conjuguées**, si ou bien  $T_1$  est conjuguée à  $T_2$ , ou bien  $T_1$  est conjuguée à  $T_2^{-1}$ .

**Théorème 1.23** (Belinskaya [Bel68], Carderi-Joseph-Le Maître-Tessera [CJLMT]). Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux transformations ergodiques, préservant la mesure sur  $(X, \mu)$ .  
**Belinskaya** S'il existe  $S$  une transformation préservant la mesure définie sur  $(X, \mu)$  telle que il existe un  $(L^1, L^0)$ -OE de  $ST_1S^{-1}$  vers  $T_2$ , alors  $T_1$  et  $T_2$  sont *flip* conjuguées.  
**[CJLMT]** Ce résultat est optimal.

Plus précisément, dans [CJLMT] les auteurs montrent le résultat suivant.

**Théorème 1.24** (Carderi-Joseph-Le Maître-Tessera [CJLMT]). Soit  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction sous-linéaire et soit  $T_1$  une transformation ergodique de  $(X, \mu)$ , préservant la mesure.

Alors il existe

- $T_2$ , une transformation ergodique de  $(X, \mu)$ , préservant la mesure ;
- et  $S$  une transformation de  $(X, \mu)$  préservant la mesure ;

telles que

- il existe une équivalence orbitale  $(\varphi, L^0)$ -intégrable de  $ST_1S^{-1}$  vers  $T_2$
- et telle que  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas *flip* conjuguées.

### 1.3.2 Cadre non-moyennable

**Théorème 1.25** ([BFS13]). Soit  $n \geq 2$ . Tout groupe  $G$  qui est  $L^1$ -OE à un réseau de  $SO(n, 1)$ , est virtuellement isomorphe à un réseau de  $SO(n, 1)$ .

Pour le cas des groupes d'Artin à angles droits voir la section 3.2.1, page 18.

## 2 Suites pavantes et quantification

Dans cette section  $G$  et  $H$  désignent des groupes moyennables. Ce qui suit repose principalement sur [DKLMT20, Section 6].

### 2.1 Suite pavant un Følner

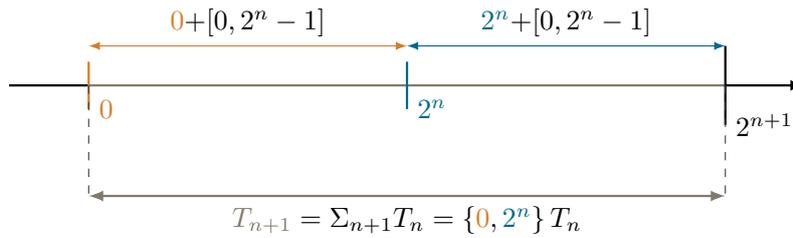
#### 2.1.1 Définition

**Exemple introductif** Soit  $G = \mathbb{Z}$  et soit  $T_n := [0, \dots, 2^n - 1] \in \mathbb{Z}$ . Alors

- La suite  $(T_n)_n$  est une suite de Følner de  $\mathbb{Z}$ .  
On a  $\partial T_n = \{0, 2^n - 1\}$  donc  $|\partial T_n|/|T_n| = 2/2^n \rightarrow 0$ .
- De plus  $T_{n+1}$  se décompose en deux copies disjointes de  $T_n$  (voir aussi figure 3) :

$$T_{n+1} = [0, \dots, 2^n - 1] \sqcup [2^n, 2^{n+1} - 1] = T_n \sqcup (2^n + T_n)$$

En notant  $\Sigma_{n+1} := \{0, 2^n\}$ , ceci se réécrit  $T_{n+1} = \Sigma_{n+1} + T_n$ . La suite  $(\Sigma_n)_n$  est une *suite pavant un Følner*, dont la définition pour n'importe quel groupe moyennable est la suivante.

FIGURE 3 – Suite pavant un Følner de  $\mathbb{Z}$ 

**Définition 2.1.** Soit  $\Sigma_n \subset G$  fini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $T_0 := \Sigma_0$  et  $T_{n+1} := \Sigma_{n+1} T_n$ .

On dit que  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **suite pavant un Følner (à droite)**, ou suite pavante, si

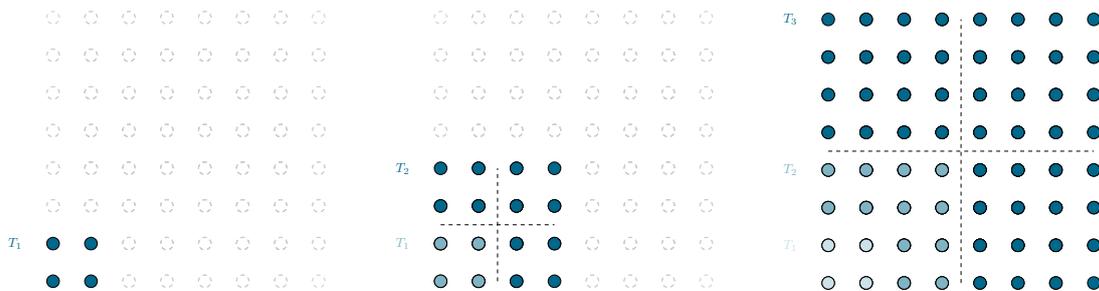
- $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Følner à droite, ie.  $|\partial_{S_G} T_n|/|T_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,
- Et  $T_{n+1} = \sqcup_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} \sigma T_n$ .

Dans la suite, on appellera  $T_n$  une **tuile**.

**Remarque 2.2** (Unicité de la décomposition). Pour tout élément  $g \in T_n$  il existe une *unique* suite  $(\sigma_i)_{i=0, \dots, n}$  telle que  $g = \sigma_n \cdots \sigma_0$  et  $\sigma_i \in \Sigma_i$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ .

### 2.1.2 Exemples de suites pavantes

**Exemple 2.3.** Si  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $G = \mathbb{Z}^d$  alors la suite  $(\Sigma_n)_n$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $\Sigma_n := \{0, 2^n\}^d$  est une suite pavante. Les tuiles associées vérifient  $T_n = \{0, \dots, 2^{n+1} - 1\}^d$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

FIGURE 4 – Suite pavant un Følner de  $\mathbb{Z}^2$ 

**Exemple 2.4** (Allumeur de réverbères). Soit  $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_i \mathbb{Z}$ .

Un élément de  $G$  est donc de la forme  $((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t)$  avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

On définit  $\Sigma_0 := \{((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, 0) \in G \mid \text{supp}(\varepsilon_i) = \{0\}\}$ . Et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on note

$$\begin{aligned} \Sigma_{n+1} := & \{((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, 0) \in G \mid \text{supp}(\varepsilon_i) \subseteq [2^n, 2^{n+1} - 1]\} \\ & \sqcup \{((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, 2^n) \in G \mid \text{supp}(\varepsilon_i) \subseteq [0, 2^n - 1]\}. \end{aligned}$$

Ainsi  $T_{n+1} = \{((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t) \in G \mid \text{supp}(\varepsilon_i) \subseteq [0, 2^{n+1} - 1] \text{ et } t \in \{0, \dots, 2^{n+1} - 1\}\}$ . Illustrons ce pavage dans le cas où  $n = 1$  (représenté en figure 5). Soit  $((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t) \in T_1$  et  $((\varepsilon'_i)_{i \in \mathbb{Z}}, u) \in \Sigma_2$

et notons  $g$  l'élément de  $T_2$  défini par

$$g = ((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathbf{t}) ((\varepsilon'_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \mathbf{u}).$$

- Si  $\mathbf{u} = 0$  alors (par définition de  $\Sigma_2$ ) on a  $\text{supp}(\varepsilon'_i) \subseteq [2, 3]$ . Dans ce cas, l'élément  $g$  est représenté sur la figure 5a et son curseur appartient à l'intervalle hachuré en bleu.
- Sinon,  $\mathbf{u} = 2$  et dans ce cas  $\text{supp}(\varepsilon'_i) \subseteq [0, 1]$  et l'élément  $g$  est représenté sur la figure 5b et son curseur appartient à l'intervalle hachuré en bleu.



FIGURE 5 – Représentation d'un élément de  $T_2$  dans l'exemple 2.4.

## 2.2 Quantification et pavages

Utilisons maintenant ces suites pavantes pour construire et quantifier des équivalences orbitales.

### 2.2.1 Critère de quantification

**Définition 2.5.** Soient  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que  $R_n \geq 0$  et  $\varepsilon_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(\Sigma_n)_n$  est une suite pavante vérifiant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{diam}(T_n) = R_n \quad \text{et} \quad |\partial_{S_G} T_n|/|T_n| = \varepsilon_n$$

on dira que  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner.

**Exemple 2.6** ([DKLMT20]).

- Soit  $G = \mathbb{Z}^d$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  posons  $\Sigma_n := \{0, 2^n\}^d$ . Alors  $(\Sigma_n)_n$  est une  $(d2^{n+1}, 2^{-(k+1)})$ -suite pavant un Følner.
- Soit  $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_i \mathbb{Z}$ . La suite  $(\Sigma_n)_n$  définie en exemple 2.4 est une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner avec  $R_n = (m+1)2^n$  et  $\varepsilon_n = 2/2^n = 2^{-n+1}$ .

**Propriété 2.7** ([DKLMT20]). Soient  $G$  et  $H$  deux groupes moyennable. Soient

- $(\Sigma_n)_n$  une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner de  $G$  et
- $(\Sigma'_n)_n$  une  $(R'_n, \varepsilon'_n)$ -suite pavant un Følner de  $H$ .

Si  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $G$  et  $H$  sont OE sur  $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ . Si de plus

$$(\varphi(2R'_n)(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

est sommable, alors l'OE de  $G$  vers  $H$  est  $(\varphi, L^0)$ -intégrable.

*Démonstration. Action de  $G$*  Soit  $(\Sigma_n)_n$  une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner de  $G$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on munit  $\Sigma_n$  de la mesure de comptage normalisée. Soit  $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$  muni de la mesure produit, notée  $\mu$ .

On rappelle que si  $(x_n)_n \in X$ , alors  $x_k \cdots x_0 \in T_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Soit maintenant  $g \in G$ . Comme  $(T_n)_n$  est une suite de Følner à droite, il existe  $k_g \in \mathbb{N}$  tel que  $x_{k_g} \cdots x_0 g \in T_{k_g}$ . Prenons  $k_g$  minimal pour cette propriété. Il existe  $(x'_i)_{0 \leq i \leq k_g}$  telle que

$$x_{k_g} \cdots x_0 g = x'_{k_g} \cdots x'_0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \dots, k_g\} \quad x'_i \in \Sigma_i$$

Pour presque tout  $(x_n)_n \in X$ , on définit alors  $g \cdot ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (x'_0, \dots, x'_{k_g}, x_{k_g+1}, \dots)$ . Enfin, cette action est libre et préserve la mesure  $\mu$ . Enfin, deux éléments sont dans la même orbite si et seulement s'ils diffèrent d'un nombre fini de coefficients.

*Action de  $H$*  Si  $(\Sigma'_n)_n$  est une  $(R'_n, \varepsilon'_n)$ -suite pavant un Følner de  $H$ , on définit  $X' := \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma'_n$  qu'on munit de la mesure produit. L'action de  $H$  sur  $X'$  est définie de manière analogue à celle de  $G$  sur  $X$ .

**Équivalence orbitale** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , fixons deux bijections

$$\nu_n : \Sigma_n \rightarrow \{0, \dots, |\Sigma_n| - 1\} \quad \text{et} \quad \nu'_n : \Sigma'_n \rightarrow \{0, \dots, |\Sigma'_n| - 1\}.$$

Un tel choix fournit alors deux bijections  $\iota_G : X \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n| - 1\}$  et  $\iota_H : X' \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma'_n| - 1\}$ . On note  $\iota := \iota_H^{-1} \circ \iota_G$ .

Si  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $H$  agit librement et en préservant la mesure sur  $X$  via l'identification fournie par  $\iota$ . Les actions de  $G$  et  $H$  sur  $X$  sont donc libres, préservent la mesure et ont les mêmes orbites.

**Quantification** Soit  $k \in \mathbb{N}$  et soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ . Si  $x_k \cdots x_0 \in T_k \setminus \partial T_k$  alors  $x_k \cdots x_0 s \in T_k$ . Donc  $\iota(x_k \cdots x_0)$  et  $\iota(x_k \cdots x_0 s)$  appartiennent à  $T'_k$ . Ainsi

$$\begin{aligned} d_{S_H}(x_k \cdots x_0, x_k \cdots x_0 s) &= d_{S_H}(\iota(x_k \cdots x_0), \iota(x_k \cdots x_0 s)) \\ &= \left| \iota(x_k \cdots x_0)^{-1} \iota(x_k \cdots x_0 s) \right|_{S_H} \\ &\leq \text{diam}(T'_k) \leq R'_k \end{aligned}$$

De plus,  $\mu \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X \mid x_k \cdots x_0 \in T_k \setminus \partial T_k \} = 1 - \varepsilon_k$ .

Soit maintenant  $Y_k := \{ (x_n)_n \in X \mid x_k \cdots x_0 \in T_k \setminus \partial T_k \text{ et } x_{k-1} \cdots x_0 \in \partial_{S_G} T_{k-1} \}$ . En notant d'abord que si  $x_{k-1} \cdots x_0 \in \partial_{S_G} T_{k-1}$  alors  $x_k \cdots x_0 \in \Sigma_k \partial_{S_G} T_{k-1}$ , puis que  $\partial_{S_G} T_k \subseteq$

$\Sigma_k \partial_{S_G} T_{k-1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} Y_k &= \{(x_n)_n \in X \mid x_k \cdots x_0 \in T_k \setminus \partial T_k \text{ et } x_{k-1} \cdots x_0 \in \partial_{S_G} T_{k-1}\} \\ &= \{(x_n)_n \in X \mid x_k \cdots x_0 \in (T_k \setminus \partial_{S_G} T_k) \cap (\Sigma_k \partial_{S_G} T_{k-1})\} \\ &= \{(x_n)_n \in X \mid x_k \cdots x_0 \in (\Sigma_k \partial_{S_G} T_{k-1}) \setminus \partial_{S_G} T_k\} \\ &= (\Sigma_k \partial_{S_G} T_{k-1}) \setminus \partial_{S_G} T_k. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mu(Y_k) &= \mu((\Sigma_k \partial_{S_G} T_{k-1}) \setminus \partial_{S_G} T_k) = \mu(\Sigma_k \partial_{S_G} T_{k-1}) - \mu(\partial_{S_G} T_k) \\ &= |\Sigma_k| \cdot |\partial_{S_G} T_{k-1}| / |T_k| - \varepsilon_{k-1}. \end{aligned}$$

Mais  $|T_k| = |\Sigma_k| \cdot |T_{k-1}|$  et donc  $|\Sigma_k| \cdot |\partial_{S_G} T_{k-1}| / |T_k| = |\partial_{S_G} T_{k-1}| / |T_{k-1}| = \varepsilon_{k-1}$ .

Ainsi  $\mu(Y_k) = \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(d_{S_H}(x, s \cdot x)) d\mu(x) &\leq \varphi(R'_0) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{Y_k} \varphi(d_{S_H}(x, s \cdot x)) d\mu(x), \\ &\leq \varphi(R'_0) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi(R'_k) (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k). \end{aligned}$$

□

### 2.2.2 Exemples d'applications et limitations

Les exemples suivants proviennent de [DKLMT20, Sections 6.2 et 6.3].

**Exemple 2.8** (Couplage entre  $\mathbb{Z}^n$  et  $\mathbb{Z}^m$ ). Soient  $m, n \geq 1$  et soient  $G = \mathbb{Z}^n$  et  $H = \mathbb{Z}^m$ . On considère les suites suivantes (sous-suites de celles présentées en exemple 2.3)

$$\begin{aligned} \text{Dans } \mathbb{Z}^n : \quad & \Sigma_{i+1} := \{0, 2^{im}, 2 \cdot 2^{im}, \dots, (2^m - 1)2^{im}\}^n \\ & T_i := [0, 2^{im} - 1]^n \\ \text{Dans } \mathbb{Z}^m : \quad & \Sigma'_{i+1} := \{0, 2^{in}, 2 \cdot 2^{in}, \dots, (2^n - 1)2^{in}\}^m \\ & T'_i := [0, 2^{in} - 1]^m \end{aligned}$$

Ces suites vérifient  $|\Sigma_i| = |\Sigma'_i|$ . Ainsi,  $G$  et  $H$  sont orbitalement équivalents sur  $X = \prod_i \Sigma_i$ . De plus,

$$\begin{aligned} R_i &= n2^{mi} & \varepsilon_i &= 1/2^{mi} \\ R'_i &= m2^{ni} & \varepsilon'_i &= 1/2^{ni} \end{aligned}$$

Donc, d'après le critère d'intégrabilité donné dans la proposition 2.7, cette équivalence orbitale est  $(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ -intégrable pour tout  $\varepsilon > 0$ , où

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{x^{m/n}}{\log(x)^{1+\varepsilon}}, \quad \psi_\varepsilon(x) = \frac{x^{n/m}}{\log(x)^{1+\varepsilon}}$$

En particulier, l'OE est  $(L^p, L^q)$ -intégrable, pour tout  $p < n/m$  et tout  $q < m/n$ .

**Remarque 2.9** (Lien avec les odomètres). Dans le cas où  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  on a  $|\Sigma_i| = 4$  pour tout  $i$ . On retrouve ainsi l'odomètre décrit dans la remarque 1.3 avec  $k_i = 3$  pour tout  $i$ .

**Exemple 2.10** (Couplage entre  $\mathbb{Z}$  et un allumeur de réverbère). Posons  $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$  et  $H = \mathbb{Z}$  et prenons comme suite pavante  $(\Sigma_n)_n$  la suite définie dans exemple 2.4. Cette suite vérifie  $|\Sigma_0| = 2$  et  $|\Sigma_{n+1}| = 2 \cdot 2^{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit alors  $(\Sigma'_n)_n$  telle que  $\Sigma'_0 := \{0, 1\}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Sigma'_{n+1} = \{i \cdot 2^n 2^{2^n} : 0 \leq i \leq 2 \cdot 2^{2^n}\}$$

Alors  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$  pour tout  $n$ . De plus  $T'_n = \{0, \dots, 2^n 2^{2^n} - 1\}$  et

$$R_n \sim 3 \cdot 2^n, \quad \varepsilon_n = 2^{-n}, \quad R'_n \leq 2^n \cdot 2^{2^n}, \quad \varepsilon'_n = 2^{-n+1} 2^{-2^n}.$$

En appliquant la proposition 2.7 on obtient qu'il existe une équivalence orbitale qui, pour tout  $\varepsilon > 0$ , est  $(\varphi_\varepsilon, \exp)$ -intégrable  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}$  où

$$\varphi_\varepsilon(x) = \log(x) / (\log \circ \log(x))^{1+\varepsilon}.$$

**Remarque 2.11** (Optimalité des quantifications). D'après le théorème 1.17, les quantifications  $\varphi_\varepsilon$  des deux exemples précédents sont presque optimales.

- En effet, nous avons vu dans l'exemple 1.19 que si  $n > m$ , alors toute  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $\mathbb{Z}^n$  vers  $\mathbb{Z}^m$  vérifie  $\varphi \preceq x^{m/n}$ .
- Dans le cas d'une OE entre  $\mathbb{Z}$  et un allumeur de réverbères, le théorème 1.17 implique que si l'on a une  $(\varphi, \psi)$ -OE de  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$  vers  $\mathbb{Z}$  alors  $\varphi = \varphi \circ \text{id} \preceq \log$ .

Enfin, comme évoqué dans la remarque 1.20, le théorème sur le profil isopérimétrique ne donne aucune borne à l'intégrabilité dans l'autre sens (ie. du groupe au profil le plus rapide vers le groupe au profil le plus lent).

### Limites des suites pavantes

► Condition de récursivité : Le fait que  $T_{n+1}$  doit être pavé par des translatés disjoints de  $T_n$  est assez restrictif et ne paraît pas toujours possible à satisfaire.

**Exemple 2.12.** Il n'est pas clair que  $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}$  admet des suites pavantes, où  $A$  est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

► Condition  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$  : Selon les groupes avec lesquels on travaille, il n'est pas toujours évident d'obtenir deux suites pavantes ayant même nombre d'éléments à chaque étape.

Une nouvelle technique permettant de palier ces problèmes figure(ra) dans [CDK<sup>+</sup>].

## 3 Produits graphés : une aventure hors du monde moyennable

On présente dans cette partie les résultats de classification de produits graphés obtenus dans [EH24]. Notre résultat principal est un résultat de classification à équivalence mesurée près des produits graphés. Nous en déduisons d'une part une classification en quantitatif et d'autre part une classification à commensurabilité près.

### 3.1 Équivalence mesurée quantitative

#### 3.1.1 Équivalence mesurée

**Définition 3.1.**  $G$  et  $H$  sont **mesurablement équivalents** s'il existe un espace mesuré  $(\Omega, \mathfrak{m})$  sur lequel  $G$  et  $H$  agissent :

- ▶ librement et en préservant la mesure, et tq.
- ▶ les deux actions commutent, et
- ▶ chacune admet un domaine fondamental de mesure *finie*.

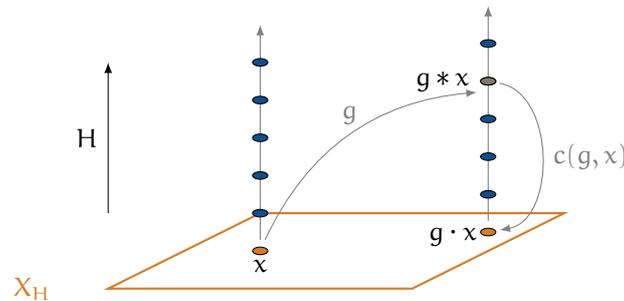
#### Exemple 3.2.

- Deux réseaux dans un même groupe localement compact sont ME.  
En effet soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux réseaux d'un même groupe localement compact  $\mathcal{G}$ . Considérons  $(\Omega, \mathfrak{m}) := (\mathcal{G}, \text{Haar})$ , espace sur lequel  $\Gamma_1$  agit par multiplication à gauche et  $\Gamma_2$  par multiplication à droite. Ceci fournit une ME entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .
- Si  $H \leq G$  est un sous-groupe d'indice fini, alors  $G$  et  $H$  sont ME.

Soient  $G$  et  $H$  deux groupes mesurablement équivalents sur  $(\Omega, \mathfrak{m})$ , avec domaines fondamentaux respectifs  $X_G, X_H$ . On note «  $*$  » les actions de  $G$  et  $H$  sur  $\Omega$ . Pour tout  $g \in G$  et presque tout  $x \in X_G$ , on note  $c(g, x)$  l'unique élément de  $H$  tel que  $c(g, x) * g * x \in X_H$  (voir figure 6) et  $g \cdot x$  l'élément  $c(g, x) * g * x \in X_H$ . De manière analogue, pour tout  $h \in H$  et presque tout  $x \in X_G$  on note  $c'(h, x)$  l'unique élément de  $G$  tel que  $c'(h, x) * h * x \in X_G$ . Ceci définit deux applications

$$c : G \times X_H \rightarrow H \quad c' : H \times X_G \rightarrow G,$$

appelées **cocycles d'équivalence mesurée**.



- $g * x$
- Elements de  $X_H$
- Autres éléments de l'orbite

FIGURE 6 – Définition du cocycle  $c$

Notons que ces cocycles dépendent du choix de domaine fondamentaux. Ainsi, si  $G$  et  $H$  sont mesurablement équivalents sur  $(\Omega, \mathfrak{m})$ , avec domaines fondamentaux respectifs  $X_G, X_H$ , on appellera **couplage d'équivalence mesurée** (de  $G$  vers  $H$ ) le quadruplet  $(\Omega, \mathfrak{m}, X_G, X_H)$ , afin garder trace du choix de domaines fondamentaux.

**Lien avec l'équivalence orbitale** Le résultat suivant montre que l'équivalence orbitale est une notion plus forte que l'équivalence mesurée.

**Propriété 3.3** (voir [Gabo5] ou [Furi]).  $G$  et  $H$  sont OE si et seulement s'ils admettent une équivalence mesurée où les deux domaines fondamentaux peuvent être pris identiques.

**Exemple 3.4.** Les groupes libres  $F_3$  et  $F_2$  sont ME mais ne sont pas OE

*Démonstration de la proposition 3.3.* Soit  $(\Omega, m, X_G, X_H)$  un couplage d'équivalence mesurée de  $G$  vers  $H$ . Supposons que  $X_G = X_H$ .

- On considère  $X := X_G = X_H$  muni de la mesure de probabilité  $\mu := \frac{1}{m(X_G)}m$ .
- Définissons l'action de  $G$  sur  $X = X_H$  (on la notera «  $\cdot$  »).  
Pour tout  $g \in G$  et presque tout  $x \in X = X_H$ , on définit  $g \cdot x$  comme étant l'unique élément de  $X_H$  contenu dans la même  $H$ -orbite que  $g * x$ , ie.  $\{g \cdot x\} = X_H \cap H * (g * x)$  (cf. figure 6).
- De manière analogue, pour tout  $h \in H$  et presque tout  $x \in X = X_G$  on définit  $h \cdot x$  comme étant l'unique élément de  $X_G$  contenu dans la même  $G$ -orbite que  $h * x$ .
- Pour tout  $g \in G$  et presque tout  $x \in X$  on a  $c(g, x) * g * x \in X_H$ . Ainsi, par définition des actions sur  $X$ :

$$c(g, x) \cdot x = g \cdot x \quad \text{et} \quad c'(h, x) \cdot x = h \cdot x.$$

Les actions ont donc les mêmes orbites.

- L'action obtenue n'est pas nécessairement libre. Pour obtenir une action libre, on peut prendre le produit de  $\Omega$  avec décalage de Bernouilli <sup>3</sup>.  
Plus précisément, considérons  $(Z, \nu)$  un espace de probabilité muni d'une action libre et p.m.p. de  $G$ . On pose  $\Omega' := \Omega \times Z$ . Alors  $G$  agit sur  $\Omega'$  diagonalement, ie. l'action est définie pour  $g \in G$  et pp.  $(\omega, z) \in \Omega \times Z$  par  $g * (\omega, z) = (g * \omega, g * z)$ . On définit l'action de  $H$  sur  $\Omega'$  par  $h * (\omega, z) := (h * \omega, z)$ . Ces actions admettent un domaine fondamental commun  $X' = X \times Z$ . La construction de l'OE sur  $X$  réalisée en remplaçant  $\Omega$  par  $\Omega'$  et  $X$  par  $X'$  produit des actions induites sur  $X'$  libres et qui ont les mêmes orbites.

Supposons maintenant que  $G$  et  $H$  sont OE sur  $(X, \mu)$ .

- On note  $m_H$  la mesure de comptage sur  $H$  et on définit  $\Omega := X \times H$  et on le munit de la mesure  $m := \mu \times m_H$ .
- Pour  $g \in G$  et  $h \in H$  on pose

$$g * (x, k) = (g \cdot x, c(g, x)k) \quad h * (x, k) = (x, kh^{-1}).$$

Ces actions sont libres, préservent la mesure  $m$ , commutent et  $X \times \{1\}$  est un domaine fondamental commun. □

**Remarque 3.5** (Cocycles OE et cocycles ME). D'après la preuve précédente, les cocycles d'équivalence mesurée et les cocycles d'équivalence orbitales coïcident si les domaines fondamentaux sont identiques. Ainsi, si  $c(g, x)$  désigne l'unique élément de  $H$  tel que  $c(g, x) * h * x$  appartient à  $X_H = X_G$ , alors  $c(g, x) \cdot x = g \cdot x$ . Donc  $c(g, x)$  est l'unique élément de  $H$  qui envoie  $x$  sur  $g \cdot x$ .

<sup>3</sup>. Soit  $G$  un groupe dénombrable et  $(Y, \nu)$  un espace de probabilité. On note  $X := Y^G$  et on munit  $X$  de la mesure de probabilité produit. Le **décalage de Bernouilli** associé est l'action de  $G$  sur  $X$  définie par  $g \cdot (x_\gamma)_{\gamma \in G} := (x_{g^{-1}\gamma})_{\gamma \in G}$ . Cette action est libre et préserve la mesure de probabilité sur  $X$ .

**Lien avec la quasi-isométrie** L'équivalence mesurée a été introduite par Gromov, comme un analogue mesuré de la notion de quasi-isométrie. Plus précisément, une application  $f : G \rightarrow H$  est une **quasi-isométrie** s'il existe  $L \geq 1$  et  $C \geq 0$  tels que

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \frac{1}{L} d_{S_G}(g_1, g_2) - C \leq d_{S_H}(f(g_1), f(g_2)) \leq L d_{S_G}(g_1, g_2) + C.$$

Dans [GNR93], Gromov montre le critère suivant.

**Théorème 3.6** ([GNR93, 0.2.C<sub>2</sub>]). Soient  $G$  et  $H$  deux groupes de type fini.

$G$  et  $H$  sont quasi-isométriques ssi il existe un espace localement compact  $\Omega$  sur lequel  $G$  et  $H$  agissent :

- ▶ proprement discontinument et tq.
- ▶ les deux actions commutent, et
- ▶ chacune des actions admet un domaine fondamental compact.

Ainsi, le critère requiert que les deux actions préservent la structure de l'espace, commutent et admettent chacune un domaine fondamental « petit ». En traduisant ce critère dans le langage mesuré, on obtient ainsi, par analogie, la notion d'équivalence mesurée.

Mais l'analogie s'arrête là : il existe des groupes qui sont ME mais qui ne sont pas QI, comme  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}^2$ , et des groupes QI qui ne sont pas ME, par exemple  $(\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) * \mathbb{F}_2$  et  $(\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) * \mathbb{F}_3$ , cf [Gabo2a, page 39]. Pour plus de détails sur ce sujet, voir par exemple [Gabo2b, Section 2.3].

**Lien avec la commensurabilité**

**Définition 3.7.** On dit que  $G$  et  $H$  sont **commensurables** (resp. **fortement commensurables**) s'il existe  $G' \leq G$  et  $H' \leq H$  tels que

- ▶  $G'$  et  $H'$  sont d'indice fini (resp. et de même indice);
- ▶ et  $G'$  est isomorphe à  $H'$ .

**Propriété 3.8.** Deux groupes de type fini  $G$  et  $H$  sont commensurables (resp. fortement commensurables) ssi il existe un espace dénombrable  $\Omega$  sur lequel  $G$  et  $H$  agissent :

- ▶ librement et tq.
- ▶ les deux actions commutent, et
- ▶ chacune des actions admet un domaine fondamental fini (resp. fini commun).

On retrouve ici la même structure de critère que dans le théorème 3.6 : les deux actions doivent préserver la structure de l'espace, commuter et admettre chacune un domaine fondamental « petit ».

**Remarque 3.9.** Commensurables  $\Rightarrow$  mesurablement équivalents.

Le tableau 1 met en parallèle la définition d'équivalence mesurée avec les critères de commensurabilité et quasi-isométrie précédents.

### 3.1.2 Quantification

Comme pour l'équivalence orbitale, on peut définir une version quantitative de l'équivalence mesurée. Comme précédemment, on note  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  deux fonctions croissantes.

Deux groupes $G$ et $H$ sont		
commensurable	mesurablement équivalents	quasi-isométriques
ssi il existe un espace $\Omega$ qui est		
dénombrable	mesuré	loc compact
tq. les actions $G$ et $H$ sur $\Omega$ commutent et sont		
libres	libres et préservant la mesure	proprement discontinues
et toutes deux admettent un domaine fonda		
fini	de mesure finie	compact

TABLE 1 – Récapitulatif

**Définition 3.10** ([DKLMT20]). Soit  $(\Omega, m, X_G, X_H)$  un couplage d'équivalence mesurée de  $G$  vers  $H$ . On dit que le couplage est  $(\varphi, \psi)$ -intégrable de  $G$  vers  $H$  si pour tout  $g \in G$  et  $h \in H$  il existe  $C_g, C_h > 0$  tels que

$$\int_X \varphi(C_g |c(g, x)|_{S_H}) d\mu < \infty \quad \int_X \psi(C_h |c'(h, x)|_{S_G}) d\mu < \infty.$$

**Propriété 3.11** ([DKLMT20, Proposition 2.42]). S'il existe  $(\Omega, m, X_G, X_H)$ , un couplage d'équivalence mesurée  $(\varphi, \psi)$ -intégrable tel que  $X_G = X_H$ , alors il existe une équivalence orbitale  $(\varphi, \psi)$ -intégrable de  $G$  vers  $H$ .

**Remarque 3.12.** C'est le même choix de domaines fondamentaux qui doit donner l'intégrabilité et le fait que les domaines fondamentaux coïncident. Ainsi, deux groupes à la fois OE et  $(\varphi, \psi)$ -ME ne sont pas nécessairement  $(\varphi, \psi)$ -OE.

*Démonstration de la proposition 3.11.* Soit  $(\Omega, m, X_G, X_H)$ , un couplage d'équivalence mesurée tel que  $X_G = X_H$  et qui est  $(\varphi, \psi)$ -intégrable. D'après la démonstration de la proposition 3.3, quitte à prendre un produit avec un décalage de Bernouilli, on peut supposer que les actions induites de  $G$  et  $H$  sur  $X := X_G = X_H$  sont libres. D'après cette même démonstration, ces actions ont les mêmes orbites. De plus les cocycles d'équivalence mesurée et d'équivalence orbitale coïncident (cf. remarque 3.5). Si le couplage d'équivalence mesurée est  $(\varphi, \psi)$ -intégrable, alors l'équivalence orbitale correspondante l'est aussi.  $\square$

Les obstructions vues en section 1.2 restent vraies si les groupes sont ME :

**Théorème 3.13** ([DKLMT20]). Soit  $\varphi$  est une fonction croissante.

Soient  $G$  et  $H$  tq. il existe une  $(\varphi, L^0)$ -ME de  $G$  vers  $H$ .

- Si  $\varphi$  est sous-additive et telle que  $\varphi(0) = 0$ , alors  $V_G(\mathbb{R}) \preceq V_H(\varphi^{-1}(\mathbb{R}))$ .
- Si  $t/\varphi(t)$  est croissantes, alors  $\varphi \circ I_H \preceq I_G$ .

### 3.2 Produits graphés

On rappelle que, étant donné un graphe simple<sup>4</sup> fini  $\Gamma$ , on note  $V\Gamma$  l'ensemble de ses sommets et  $E\Gamma$  l'ensemble de ses arêtes.

**Définition 3.14.** Soit  $\Gamma$  un graphe fini simple et soit  $(G_v)_{v \in V\Gamma}$  une famille de groupes. Le **produit graphé** sur  $\Gamma$  avec **groupes de sommets**  $(G_v)_{v \in V\Gamma}$  est le groupe  $G$  défini par

$$G := *_{v \in V\Gamma} G_v / \langle\langle [g, h] \mid g \in G_v, h \in G_w, (v, w) \in E\Gamma \rangle\rangle.$$

Ces objets ont été introduits par Green [Gre90] et généralisent les produits libres de groupes (lorsque  $\Gamma$  ne contient aucune arête), les produits directs (lorsque  $\Gamma$  est complet) mais aussi les groupes de **Coxeter à angles droits** (lorsque  $G_v = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  pour tout  $v \in V\Gamma$ ) et les **groupes d'Artin à angles droits** (lorsque  $G_v = \mathbb{Z}$  pour tout  $v \in V\Gamma$ ).

#### 3.2.1 Le cas des groupes d'Artin à angles droits

Si  $\Gamma$  est un graphe fini simple, on note  $A_\Gamma$  le groupe d'Artin à angles droit associé.

**Théorème 3.15** (Horbez-Huang, [HH22]). Soient  $A_{\Gamma_1}, A_{\Gamma_2}$  deux groupes d'Artin à angles droits tels que  $\text{Out}(A_{\Gamma_i})$  est fini pour tout  $i \in \{1, 2\}$ .

$$A_{\Gamma_1} \text{ ME } A_{\Gamma_2} \quad \text{ssi} \quad \Gamma_1 \simeq \Gamma_2.$$

Ainsi, deux groupes d'Artin à angles droits ayant groupe d'automorphismes extérieurs fini ne peuvent être mesurable équivalents que s'ils sont isomorphes. Un fait remarquable est que cette classification est identique à celle à quasi-isométrie près :

**Théorème 3.16** (Huang [Hua18]). Soient  $A_{\Gamma_1}, A_{\Gamma_2}$  deux groupes d'Artin à angles droits tels que  $\text{Out}(A_{\Gamma_i})$  est fini pour tout  $i \in \{1, 2\}$ . Alors

$$A_{\Gamma_1} \text{ QI } A_{\Gamma_2} \quad \text{ssi} \quad \Gamma_1 \simeq \Gamma_2$$

Ces deux théorèmes montrent donc la rigidité des groupes d'Artin à angles droits, au sein de la classe des RAAGs ayant groupe d'automorphismes extérieurs finis. Cette rigidité s'étend au delà de cette classe dès-lors que l'on ajoute une hypothèse de quantification  $L^1$  :

**Théorème 3.17** ([HH23]). Soit  $A_\Gamma$  un groupe d'Artin à angle droit tel que  $\text{Out}(A_\Gamma)$  soit fini. Soit  $H$  un groupe dénombrable à torsion bornée.

S'il existe une équivalence mesurée  $(L^1, L^0)$ -intégrable de  $H$  vers  $A_\Gamma$ , alors  $H$  est de type fini et est quasi-isométrique à  $A_\Gamma$ .

4. ie. un graphe sans arête multiple, sans boucle sur un sommet.

### 3.2.2 Quantification et produits graphés

Le but est maintenant d'obtenir un résultat de classification dans le cadre plus général des produits graphés. La première étape est de traduire l'hypothèse sur les groupes d'automorphismes extérieurs en des conditions portant uniquement sur le graphe  $\Gamma$ .

**Out fini** Les travaux de Laurence [Lau95] et Servatius [Ser89] montrent que  $\text{Out}(A_\Gamma)$  est fini si et seulement si  $\Gamma$  vérifie les deux conditions suivantes :

- Si  $v \neq w \in V\Gamma$  alors  $\text{lk}(v) \not\subseteq B(w, 1)$  (on dit que  $\Gamma$  est **sans transvection**);
- Pour tout  $v \in V\Gamma$ , le sous-graphe induit par  $V\Gamma \setminus B(v, 1)$  est connexe (on dit que  $\Gamma$  est **sans conjugaison partielle**).

C'est le cas par exemple lorsque  $\Gamma$  est un pentagone. La figure 7 représente des graphes ayant des transvections; la figure 8, des graphes ayant des conjugaisons partielles. Dans chacune, le sommet  $v$  considéré est représenté en marron et  $\text{lk}(v)$  en bleu.

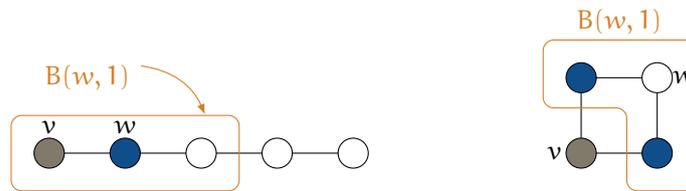


FIGURE 7 – Exemples de graphes ayant des transvections.

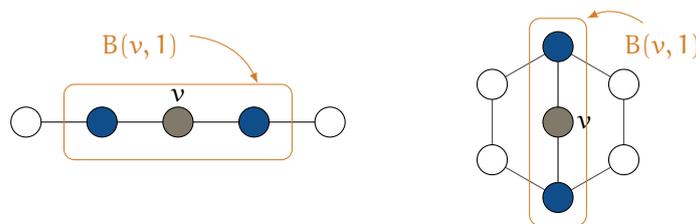


FIGURE 8 – Exemples de graphes ayant des conjugaisons partielles.

**Exemple 3.18** (Applications du critères sur des exemples connus). Soit  $\Gamma$  un graphe fini simple, possédant au moins deux sommets distincts.

- Dans le cas où  $\Gamma$  n'a aucune arête, alors  $\text{lk}(v) = \emptyset$  pour tout  $v \in V\Gamma$ . Ainsi, pour tout  $w \neq v$  on a  $\text{lk}(v) \subseteq B_\Gamma(w, 1)$  et le graphe a donc des transvections. Pour un tel  $\Gamma$ ,  $A_\Gamma$  est un groupe libre et on retrouve bien que  $\text{Out}(A_\Gamma)$  est infini.
- De même, dans le cas où  $\Gamma$  est un graphe complet, le graphe possède des transvections et on retrouve que  $\text{Out}(\mathbb{Z}^d)$  est infini.

**Classification** Le résultat principal de [EH24] est le théorème suivant.

**Théorème 3.19** (Horbez-E. [EH24]). Si

- ▶  $\Gamma, \Lambda$  sont deux graphes sans transvection ni conjugaison partielle et ayant au moins 2 sommets;
- ▶  $G_v, H_w$  sont des groupes infini dénombrables  $\forall v \in \Gamma, w \in \Lambda$ ;

alors,

- $G_\Gamma \stackrel{\text{ME}}{\sim} H_\Lambda$ ;
- $\Leftrightarrow G_\Gamma \stackrel{\text{OE}}{\sim} H_\Lambda$ ;
- $\Leftrightarrow$  Il existe un isomorphisme de graphes  $\sigma : \Gamma \rightarrow \Lambda$  tq  $G_v \stackrel{\text{OE}}{\sim} H_{\sigma(v)}$  pour tout  $v \in V\Gamma$ .

**Exemple 3.20.** Soient  $G_\Gamma$  et  $H_\Lambda$  les deux groupes représentés en figure 9.

Ces deux groupes ne sont pas mesurablement équivalents. En effet, s'ils l'étaient, il existerait un isomorphisme de graphe envoyant tout groupe de sommet de  $G$  sur un groupe de sommet de  $H$  qui lui est orbitalement équivalent. Or, aucun de ces derniers n'est OE à  $F_2$

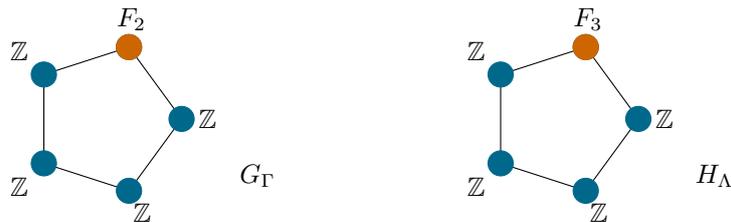


FIGURE 9 – Groupes de l'exemple 3.20

On renvoie à [EH24, Section 10] pour d'autres exemples et des illustrations des différentes variations autour du théorème 3.19. On déduit de ce théorème ainsi que de la proposition 3.8 le corollaire suivant.

**Corollaire 3.21** ([EH24]). Si

- ▶  $\Gamma, \Lambda$  sont deux graphes sans transvection ni conjugaison partielle et ayant au moins 2 sommets;
- ▶  $G_v, H_w$  sont des groupes infini dénombrables  $\forall v \in \Gamma, w \in \Lambda$ ;

alors,

- $G_\Gamma$  et  $H_\Lambda$  sont commensurables;
- $\Leftrightarrow G_\Gamma$  et  $H_\Lambda$  sont fortement commensurables;
- $\Leftrightarrow$  Il existe un isomorphisme de graphes  $\sigma : \Gamma \rightarrow \Lambda$  tq  $G_v$  et  $H_{\sigma(v)}$  sont fortement commensurables, pour tout  $v \in V\Gamma$ .

**Classification en quantitatif** – Tournons-nous maintenant vers la version quantitative de la classification. Dans [EH24] nous montrons les deux résultats suivants.

**Théorème 3.22** ([EH24]). Supposons que

- ▶  $\Gamma, \Lambda$  sont deux graphes sans transvection ni conjugaison partielle et ayant au moins 2 sommets;
- ▶  $G_v, H_w$  sont des groupes infini de type fini  $\forall v \in \Gamma, w \in \Lambda$ ;

Si il existe une équivalence mesurée  $(\varphi, \psi)$ -intégrable de  $G_\Gamma$  vers  $H_\Lambda$ ,

Alors il existe un isomorphisme de graphes  $\sigma: \Gamma \rightarrow \Lambda$  tq il existe une ME  $(\varphi, \psi)$ -intégrable de  $G_v$  vers  $H_{\sigma(v)}$ , pour tout  $v \in V\Gamma$ .

**Remarque 3.23** (Obstruction). Nous avons vu précédemment (remarque 1.21) que le théorème 1.17 donnait une borne supérieure à l'intégrabilité que l'on pouvait obtenir entre deux groupes moyennables, mais qu'il ne fournissait aucune obstruction si les groupes étaient non-moyennables.

Le théorème 3.22 ci-dessus fournit la première obstruction hors du cadre moyennable. Considérons par exemple, les produits graphés  $G_\Gamma$  et  $H_\Lambda$  représentés en figure 10. Toute ME  $(\varphi, \psi)$ -intégrable de  $G_\Gamma$  vers  $H_\Lambda$  doit vérifier  $\varphi(x) \preceq x^{1/2}$ .

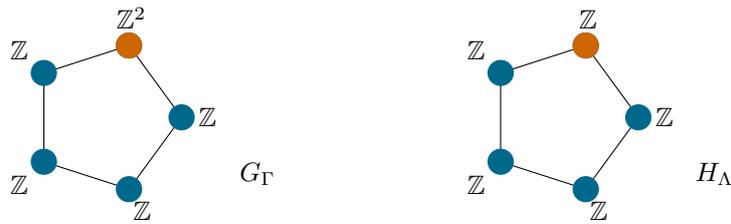


FIGURE 10 – Groupes de la remarque 3.23

**Remarque 3.24** (Comparaison ME/OE). On a vu (proposition 3.11) que pour passer d'une ME  $(\varphi, \psi)$ -intégrable à une OE avec la même intégrabilité, il fallait trouver un domaine fondamental commun tout en préservant l'intégrabilité.

D'après le théorème 3.19, on sait que  $G_v$  et  $H_{\sigma(v)}$  sont orbitalement équivalents, pour tout  $v \in V\Gamma$ . Cette OE s'obtient en trouvant un domaine fondamental commun aux actions de  $G_\Gamma$  et  $H_\Lambda$  sur  $(\Omega, \mathfrak{m})$ . On ne sait pas si les cocycles correspondant à ce choix de domaine fondamental sont eux aussi  $(\varphi, \psi)$ -intégrable. On ne sait donc pas si la conclusion de théorème précédent peut-être améliorée en une équivalence orbitale  $(\varphi, \psi)$ -intégrable.

**Théorème 3.25** ([EH24]). Supposons que

- ▶  $\Gamma$  est un graphe fini
- ▶  $G_v, H_v$  sont des groupes infinis de type fini  $\forall v \in \Gamma$ .

Si  $G_v$   $(\varphi, \psi)$ -OE  $H_v$  pour tout  $v \in V\Gamma$

Alors il existe une équivalence orbitale  $(\varphi, \psi)$ -intégrable de  $G_\Gamma$  vers  $H_\Gamma$ .

**Remarque 3.26** (Nécessité de l'hypothèse OE). L'hypothèse d'équivalence orbitale ne peut pas être affaiblie en une hypothèse d'équivalence mesurée. En effet, si l'on considère les deux produits graphés de l'exemple 3.20, alors pour tout sommet  $v$  les groupes de sommets  $G_v$

et  $H_v$  sont mesurablement équivalents, mais pas tous orbitalement équivalents. D'après le théorème 3.19 les produits graphés  $G_\Gamma$  et  $H_\Gamma$  ne sont donc pas mesurablement équivalents.

La démonstration du théorème 3.25 se base sur une construction développée dans [Gabo2b] pour les produits libres, et étendue aux produits graphés dans [HH22].

*Démonstration de théorème 3.25.* Soit  $\Gamma$  un graphe fini simple et fixons une énumération  $\{v_1, \dots, v_n\}$  des sommets de  $\Gamma$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $(Y_i, \nu_i)$  un espace de probabilité sur lequel  $G_{v_i}$  et  $H_{v_i}$  admettent une équivalence orbitale  $(\varphi, \psi)$ -intégrable.

**Définition de l'espace  $X$**  Soit  $Z$  un espace de probabilité muni d'une action libre et p.m.p. de  $G_\Gamma$ . On note

$$X := Z \times Y_1 \times \dots \times Y_n$$

et on le munit de la mesure de probabilité produit, notée  $\mu$ .

**Action de  $G$**  On note  $r_i : G \rightarrow G_{v_i}$  la rétraction sur  $G_{v_i}$ , c'est-à-dire l'application qui vaut l'identité en restriction à  $G_{v_i}$  et qui envoie tous les autres groupes de sommets sur  $\{1\}$ . On définit alors pour tout  $g \in G$  et pp.  $x = (z, y_1, \dots, y_n) \in X$

$$g \cdot (z, y_1, \dots, y_n) = (g \cdot z, r_1(g) \cdot y_1, \dots, r_n(g) \cdot y_n).$$

**Action de  $H$**  Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  et définissons d'abord l'action d'un élément de  $G_{v_i}$ . On note

$$c_i : G_{v_i} \times Y_i \rightarrow H_{v_i} \quad \text{et} \quad c'_i : H_{v_i} \times Y_i \rightarrow G_{v_i}$$

les cocycles d'équivalence orbitale. On définit, pour tout  $h \in H$  et pp.  $(z, y_1, \dots, y_n) \in X$

$$\begin{aligned} h \cdot (z, y_1, \dots, y_n) &:= c'_i(h, y_i) \cdot (z, y_1, \dots, y_n), \\ &= (c'_i(h, y_i) \cdot z, y_1, \dots, y_{i-1}, c'_i(h, y_i) \cdot y_i, y_{i+1}, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que cette action s'étend à tout le groupe  $H_\Gamma$ . Soit donc  $h_i \in H_{v_i}$  et  $h_j \in H_{v_j}$ , tels que  $(v_i, v_j) \in E_\Gamma$ . Comme  $c'_i(h_i, y_i) \in G_{v_i}$  et  $c'_j(h_j, y_j) \in G_{v_j}$ , ces deux éléments commutent dans  $G_\Gamma$ . Alors

$$\begin{aligned} h_i \cdot (h_j \cdot (z, y_1, \dots, y_n)) &= h_i \cdot \left( c'_j(h_j, y_j) \cdot z, y_1, \dots, y_{j-1}, c'_j(h_j, y_j) \cdot y_j, y_{j+1}, \dots, y_n \right), \\ &= c'_i(h_i, y_i) \cdot \left( c'_j(h_j, y_j) \cdot z, y_1, \dots, y_{j-1}, c'_j(h_j, y_j) \cdot y_j, y_{j+1}, \dots, y_n \right), \\ &= c'_i(h_i, y_i) c'_j(h_j, y_j) \cdot (z, y_1, \dots, y_n), \\ &= c'_j(h_j, y_j) c'_i(h_i, y_i) \cdot (z, y_1, \dots, y_n), \\ &= h_j \cdot \left( c'_i(h_i, y_i) \cdot (z, y_1, \dots, y_n) \right), \\ &= h_j \cdot \left( h_i \cdot (z, y_1, \dots, y_n) \right). \end{aligned}$$

L'action ainsi définie s'étend donc bien à tout le groupe  $H_\Gamma$ .

On dispose donc d'une action de  $G$  et d'une action de  $H$  sur  $X$ . Ces deux actions sont libres et ont les mêmes orbites.

Montrons maintenant l'intégrabilité du couplage. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  notons  $S_G^i$  une partie génératrice de  $G_{v_i}$  et  $S_H^i$  une partie génératrice de  $H_{v_i}$ . Alors  $S_G := \sqcup S_G^i$  est une partie génératrice de  $G_\Gamma$  et  $S_H := \sqcup S_H^i$  une partie génératrice de  $H_\Gamma$ . Soient  $c : G \times X \rightarrow H$  et

$c' : H_\Gamma \times X \rightarrow G_\Gamma$  les cocycles d'équivalence orbitales. Montrons que pour tout  $s \in S_G$  et tout  $s' \in S_H$  on a

$$\int_{x \in X} \varphi \left( |c(s, x)|_{S_H} \right) d\mu(x) < +\infty, \quad (1)$$

$$\int_{x \in X} \psi \left( |c'(s', x)|_{S_G} \right) d\mu(x) < +\infty. \quad (2)$$

**$\varphi$ -intégrabilité** Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $s \in S_G^i$ . Par définition de l'action de  $H$  sur  $X$  et comme  $c_i(s, y_i)$  appartient à  $H_{v_i}$ , pour presque tout  $x = (z, y_1, \dots, y_n) \in X$  on a  $c_i(s, y_i) \cdot x = c'_i(c_i(s, y_i), y_i) \cdot x$ . Mais, par définition des cocycles  $c'_i(c_i(s, y_i), y_i) = s$ . Ainsi

$$c_i(s, y_i) \cdot x = c'_i(c_i(s, y_i), y_i) \cdot x = s \cdot x$$

et donc on a  $c(s, x) = c_i(s, y_i)$ . Mais, par choix de  $S_H$

$$|c(s, x)|_{S_H} = |c_i(s, y_i)|_{S_H} = |c_i(s, y_i)|_{S_H^i}.$$

Comme  $c_i$  est  $\varphi$ -intégrable, l'équation (1) est vérifiée.

**$\psi$ -intégrabilité** Soit  $s' \in S_H$  et  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $s \in S_H^i$ . Par définition de l'action de  $H$ , pp.  $x = (z, y_1, \dots, y_n) \in X$  on a  $s' \cdot x = c'_i(s', y_i) \cdot x$ , donc  $c'(s', x) = c'_i(s', y_i)$ . Comme  $c'_i(s', y_i) \in G_{v_i}$

$$|c'(s', x)|_{S_G} = |c'_i(s', y_i)|_{S_G} = |c'_i(s', y_i)|_{S_G^i}.$$

Ainsi, équation (2) est vérifiée, par  $\psi$ -intégrabilité de  $c'_i$ .

□

## Références

- [Aus16] T. Austin. Integrable measure equivalence for groups of polynomial growth. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 10 :117–154, February 2016. arXiv :1310.3216 [math.GR].
- [Bel68] Partitions of lebesgue space in trajectories defined by ergodic automorphisms. *Functional Analysis and Its Applications*, 2 :190–199, 1968.
- [BFS13] U. Bader, A. Furman, and R. Sauer. Integrable measure equivalence and rigidity of hyperbolic lattices. *Inventiones mathematicae*, 194 :313–379, 2013.
- [BZ21] J. Brieußel and T. Zheng. Speed of random walks, isoperimetry and compression of finitely generated groups. *Ann. of Math.*, 193 :1–105, 2021. arXiv :1510.08040 [math.GR].
- [CDK<sup>+</sup>] A. Carderi, T. Delabie, J. Koivisto, F. Le Maître, and R. Tessera. *Measure equivalence and sofic approximations*. En préparation.
- [CJLMT] A. Carderi, M. Joseph, F. Le Maître, and R. Tessera. Belinskaya’s theorem is optimal. *Fundamenta Mathematicae*.
- [Cou00] T. Coulhon. Random walks and geometry on infinite graphs. In L. Ambrosio and F. Serra Cassano, editors, *Lectures Notes on Analysis in Metric Spaces*, pages 5–30. Edizioni della Normale Pisa, 2000.
- [DKLMT20] T. Delabie, J. Koivisto, F. Le Maître, and R. Tessera. *Quantitative measure equivalence*, 2020. arXiv :2002.00719 [math.GR].
- [Dye59] H. A. Dye. On groups of measure preserving transformations. i. *American Journal of Mathematics*, 81(1) :119–159, 1959.
- [Dye63] H. A. Dye. On groups of measure preserving transformations. ii. *American Journal of Mathematics*, 85(4) :551–576, 1963.
- [EH24] A. Escalier and C. Horbez. *Graph products and measure equivalence : classification, rigidity, and quantitative aspects*, janvier 2024. arxiv.org :2401.04635.
- [Fur11] A. Furman. A survey of measured group theory. In *Geometry, rigidity, and group actions*, Chicago Lectures in Math., pages 296–374. Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 2011.
- [Gabo0] D. Gaboriau. Coût des relations d’équivalence et des groupes. *Inventiones mathematicae*, 139 :41–98, 2000.
- [Gabo2a] D. Gaboriau. Invariants  $l^2$  de relations d’équivalence et de groupes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 95 :93–150, 2002.
- [Gabo2b] D. Gaboriau. On orbit equivalence of measure preserving actions. In M. Burger and A. Iozzi, editors, *Rigidity in Dynamics and Geometry*, pages 167–186. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [Gabo5] D. Gaboriau. Examples of groups that are measure equivalent to the free group. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 25 :1809 – 1827, 2005.
- [GNR93] M. Gromov, G. Niblo, and M. Roller. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 : Asymptotic invariants of infinite groups*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, 1993.

- [Gre90] E.R. Green. *Graph products of groups*. PhD thesis, University of Leeds, 1990.
- [HH22] C. Horbez and J. Huang. Measure equivalence classification of transvection-free right-angled Artin groups. *J. Éc. polytech. Math.*, 9 :1021–1067, 2022. arXiv :2010.03613 [math.GR].
- [HH23] C. Horbez and J. Huang. *Integrable measure equivalence rigidity of right-angled Artin groups via quasi-isometry*, 2023. arXiv :2309.12147.
- [Hua18] J. Huang. Commensurability of groups quasi-isometric to RAAGs. *Invent. Math.*, 213(3) :1179–1247, 2018.
- [Lau95] M.R. Laurence. A generating set for the automorphism group of a graph group. *Journal of the London Mathematical Society*, 52(2) :318–334, 1995.
- [OW87] D.S. Ornstein and B. Weiss. Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. *Journal d'Analyse Mathématique*, 48(1) :1–141, dec 1987.
- [Ser89] H. Servatius. Automorphisms of graph groups. *Journal of Algebra*, 126(1) :34–60, 1989.