Résumé de thèse

Amandine Escalier

6 avril 2022

Ce manuscrit présente les travaux de recherche effectués durant ma thèse sur l'étude de la géométrie des groupes suivant deux points de vue : la première partie porte sur les conséquences de la structure locale des graphes sur leur géométrie globale tandis que la deuxième partie traite de la géométrie à large échelle — autrement dit « asymptotique » — des groupes. Pour le dire plus formellement, la première moitié porte sur des questions de « rigidité Locale-Globale », la seconde sur des problèmes « d'équivalence mesurée ».

Dans un premier temps nous étudions donc des graphes — c'est à dire un ensemble de *sommets* reliés par des *arêtes* — et nous cherchons à déterminer à quelle point l'information donnée par un « bout » du graphe nous donne des informations sur son allure globale. Pour cela on munit ces graphes d'une distance en fixant à 1 la longueur d'une arête, ce qui nous permet de considérer des boules de rayon $r > 0$ centrées en un sommet. Ces boules sont les « bouts » de graphes mentionnés ci-dessus à partir desquels on cherche à déduire de l'information globale. Un graphe dont l'information donnée par les boules de rayon r (pour un certain $r > 0$) est suffisante pour déterminer son allure globale est dit *LG-rigide*. Le quadrillage régulier du plan ou les arbres sont des exemples de graphes ayant cette propriété.

Dans ce manuscrit nous étudions une classe particulière de graphes, appelés *immeubles*. Sans entrer dans les détails de la définition, on peut considérer un immeuble comme une généralisation des arbres, comme un arbre en dimension supérieure. Ces immeubles sont des graphes LG-rigide ; nous poussons ici l'étude de leur rigidité dans deux direction. D'abord nous montrons qu'il suffit d'une information locale *partielle* pour reconstruire l'immeuble. Autrement dit : le graphe n'est pas seulement déterminé par ce que l'on voit dans une boule, mais il est déterminé par un morceaux de cette boule. Ensuite nous étendons la propriété de LG-rigidité à une large famille de graphes quasi-isométrique à ces-dits immeubles.

Tournons-nous maintenant vers l'étude asymptotique des groupes. Nous nous intéressons ici à comparer comment deux groupes agissent sur un même espace. Le premier degré consiste à regarder si les deux groupes partitionnent l'espace avec les mêmes orbites, c'est à dire si un élément g du premier groupe envoie un point x de l'espace sur un point y, alors il existe une élément h du second groupe qui envoie lui aussi x sur y. On dit alors que les groupes sont *orbites équivalents*. On peut munir chacun des groupes d'une distance et — à l'aide de cette distance — affiner l'étude en comparant la longueur de g et h. De cette manière, on *quantifie* l'équivalence orbitale. Dans cette thèse on étudie le problème dit *inverse*. Là où le problème usuel est de quantifier une équivalence orbitale pour deux groupes donnés, on se donne ici un groupe H et une quantification souhaitée et on cherche à exhiber un deuxième groupe qui serait orbite équivalent à H avec la quantification prescrite. Dans cette thèse nous répondons à ce problème dans le cas de $H = \mathbb{Z}$. Nous étudions enfin le cas où H est un groupe dit *allumeur de réverbères*.