# LP 2020 – Ondes évanescentes

11 juin 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

## Niveau : L2

## Bibliographie

✍ , ⟶

## Prérequis

- Diffusion thermique
- Ondes électromagnétiques dans un métal
- Propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma
- Équation de Schrodinger
- Marche de potentiel $E > V_0$

## Expériences

☕ Effet tunnel optique

## Table des matières

# Introduction

On a étudié dans les cours précédents les ondes propagatives comme solution d'une équation d'ondes. Elles sont intéressantes car elles transportent de l'énergie sur de potentielles longues distances. Cependant une onde peut être atténuée comme on l'a vu dans le cas d'une onde incidente sur un matériau conducteur. Parmi les ondes atténuées exponentiellement, une famille, les *ondes évanescentes* sont d'un grand intérêt théorique et pratique. Elles sont notamment à l'origine de l'effet tunnel.

# 1 Définition et mise en évidence dans un plasma

## 1.1 Définition et remarques

On va tout d'abord définir ce qui caractérise une onde évanescente :

- Son amplitude décroît exponentiellement.
- Elle ne se propage pas.
- Elle ne dissipe pas de puissance (pour une onde électromagnétique évanescente $\vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0$).
- Elle ne transporte pas de puissance (pour une onde électromagnétique évanescente, $\left\langle \vec{\mathbf{\Pi}} \right\rangle = 0$).

Attention, il ne faut donc pas retenir que évanescente est équivalent à amplitude exponentiellement décroissante. En effet, on a vu qu'une onde se propageant dans un métal non parfait se met sous la forme :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E_0}} \exp\Big(-\frac{z}{\delta}\Big) \cos\Big(\omega t - \frac{z}{\delta}\Big) \tag{1.1}$$

On a noté $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ l'épaisseur de peau (distance caractéristique de *propagation*) avec $\omega$ la pulsation de l'onde et $\gamma_0$ la conductivité du métal.

Cette onde n'est pas évanescente ! En effet elle se propage (terme en $\cos(\omega t - kz)$), la puissance dissipée par effet Joule est non nulle et on trouve $\left\langle \vec{\mathbf{\Pi}} \right\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_o \omega \delta} \exp\big(-\frac{2z}{\delta}\big)\mathbf{e_z}$ ainsi la puissance transportée dans le métal est non nulle.

Cette onde est de la même forme que celle trouvée pour la diffusion thermique en régime forcé. Il faut bien retenir que ces ondes *ne sont pas évanescentes*.

## 1.2 Onde électromagnétique dans un plasma

Dans le cas du plasma on peut au contraire avoir apparition d'une onde évanescente.

On se place en notations complexes avec un onde de la forme $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E_0}} \exp\Big(i(\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\Big)$

On rappelle les grandeurs caractéristiques du plasma de densité de porteurs de charge $n$ :

- La pulsation plasma $\omega_p$ définie par $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}$
- La conductivité du plasma $\sigma$ définie par $\vec{\mathbf{J}} = \sigma \vec{\mathbf{E}}$ et telle que $\sigma = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$

On trouve alors l'équation d'onde suivante :

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{1.2}$$

Grâce à cette équation d'onde on trouve la relation de dispersion :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \tag{1.3}$$

On avait précédemment étudié le cas $\omega > \omega_p$ où il y avait propagation d'une onde dans le plasma.

Intéressons nous maintenant au cas où $\omega < \omega_p$.

Dans ce cas là $k^2 < 0$ ainsi $k$ est *imaginaire pur*. On a $k = i\sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} \equiv -\frac{i}{\delta_p}$. On suppose une propagation selon l'axe $\mathbf{u_z}$ ainsi en remplaçant cette forme de vecteur d'onde dans l'expression de l'onde on a :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E_0}} \exp\left(-\frac{1}{\delta_p}\mathbf{u_z} \cdot \vec{\mathbf{r}}\right) \exp(i\omega t) \tag{1.4}$$

En grandeurs réelles et en supposant une propagation selon l'axe $z$ on a :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E_0}} \exp\left(-\frac{z}{\delta_p}\right) \cos(\omega t) \tag{1.5}$$

Vérifions que cette onde satisfait bien les caractéristiques d'une onde évanescente :

- L'amplitude est exponentiellment décroissante
- Il n'y a pas propagation : les parties spatiales et temporelles sont séparées, l'onde est *stationnaire*.
- On a vu que $\sigma$ était imaginaire pur ainsi $\left\langle \vec{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \right\rangle = 0$, pas de puissance dissipée dans le plasma
- On va maintenant calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting

On suppose $\vec{\mathbf{E}} = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta_p}\right) \exp(i\omega t)\mathbf{u_x}$
On utilise la relation de structure $\vec{\mathbf{B}} = \frac{\vec{\mathbf{k}} \wedge \vec{\mathbf{E}}}{\omega}$, on trouve :

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{iE_0}{\delta_p} \exp\left(-\frac{z}{\delta_p}\right) \exp(i\omega t)\mathbf{u_y} \tag{1.6}$$

On a $\left\langle \vec{\mathbf{\Pi}} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}^*)$ ce qui donne :

$$\left\langle \vec{\mathbf{\Pi}} \right\rangle = \operatorname{Re}\left(-i\frac{E_0^2}{\delta_p} \exp\left(-\frac{2z}{\delta_p}\right)\right)\mathbf{u_z} = \vec{\mathbf{0}} \tag{1.7}$$

La puissance transportée par l'onde est bien nulle !
Il y a *réflexion totale* de l'onde incidente sur le plasma. De même, lorsqu'il y a réflexion totale d'un rayon lumineux sur un dioptre, il y a existence d'une onde évanescente à la surface du dioptre.

**Ondes évanescente centimétriques**
On utilise l,'émetteur P89.26, le récepteur P42.27 et le boitier d'alimentation P89.85. On place l'émetteur face au grand prisme de paraffine P42.11 avec un grand angle d'incidence de façon à avoir réflexion totale. On peut observer en sortie de ce prisme le signal réfléchi.
On place derrière ce prisme le petit prisme P42.7. Plus on l'approche du grand prisme, plus le signal réfléchi diminue. On peut observer alors le signal transmis en sortie du petit prisme dans la direction du signal incident.

*On vient de détailler un exemple d'onde évanescente en électromagnétisme et on a également évoqué un exemple en optique. Intéressons nous maintenant aux ondes évanescente en mécanique quantique.*

# 2 Ondes évanescentes en mécanique quantique

## 2.1 Marche de potentiel de longueur infinie

On considère deux milieux semi-infinis. Un pour $x < 0$ à potentiel nul, l'autre pour $x > 0$ à potentiel $V_0$. On considère une particule d'énergie $E$ arrivant de $x = -\infty$ dans les $x$ croissants, décrite par une fonction d'onde $\psi(x,t)$. On sépare les variables $\psi(x,t) = \phi(x)\chi(t)$. $\psi$ vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \tag{2.1}$$

Donc $\chi(t) = \exp\{-i\omega t\}$ avec $E = \hbar\omega > 0$.
Dans le demi-espace $x < 0$ on a

$$\phi''(x) + \frac{E}{\hbar^2}\phi(x) = 0 \tag{2.2}$$

On pose $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et alors

$$\phi(x) = A\exp\{ikx\} + B\exp\{-ikx\} \tag{2.3}$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps s'écrit alors dans le demi-espace $x > 0$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) + (V_0 - E)\phi(x) = 0 \tag{2.4}$$

C'est-à-dire

$$\phi'' - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\phi = 0 \tag{2.5}$$

En posant $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} > 0$ on a alors la forme de $\phi$ :

$$\phi(x) = C\exp\{-\alpha x\} + D\exp\{\alpha x\} \tag{2.6}$$

Seule l'onde en $\exp\{-\alpha x\}$ est retenue car l'autre diverge en $x = +\infty$.

$$\psi(x,t) = \exp\{-\alpha x\}\exp\{-i\omega t\} \tag{2.7}$$

C'est une *onde évanescente*, sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{\alpha}$.

**Application numérique pour les composants électroniques** On prend une différence d'énergie $E - V_0 \simeq 3\,\mathrm{eV} \simeq 5\times10^{-21}\,\mathrm{J}$, alors $\delta \simeq 6\times10^{-9}\,\mathrm{m}$. Ainsi les structures isolantes en microélectronique deviennent non étanche à l'échelle nanométrique.

**Coefficient de réflexion** On le trouve grâce aux relation de continuité, la marche de potentiel est finie donc $\phi$ et $\phi'$ sont continues à la discontinuité :

$$\begin{cases} A + B & = C \\ ik(A - B) & = -\alpha C \end{cases} \tag{2.8}$$

On a donc

$$C = \frac{2}{1 + \frac{i\alpha}{k}}A$$
$$B = \frac{1 - \frac{i\alpha}{k}}{1 + \frac{i\alpha}{k}}A$$

Le coefficient de réflexion en amplitude $\rho = \frac{B}{A}$ est donc

$$\rho = \frac{1 - \frac{i\alpha}{k}}{1 + \frac{i\alpha}{k}} \tag{2.9}$$

Le numérateur est le conjugué du dénominateur donc

$$|\rho|^2 = R = 1 \tag{2.10}$$

avec $R$ le coefficient de réflexion en densité de courant. On rappelle que la densité de courant s'écrit pour une onde plane :

$$\vec{\mathbf{J}} = \psi\psi^*\frac{\hbar}{m}\vec{\mathbf{k}} \tag{2.11}$$

Toutes les particules se réfléchissent : ce qui correspond à une probabilité de réflexion de 1. Toutefois pour $x \sim \delta$ la probabilité de transmission n'est pas nulle, ce qui pourra être exploité par l'effet tunnel.

# 3 Effet tunnel

## 3.1 Cadre de l'étude

On va étudier le cas d'une *barrière de potentiel* définie par :

- Pour $x < -\frac{a}{2}$ on a $V(x) = 0$ zone 1
- Pour $x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$, $V(x) = V_0 > 0$ zone 2
- Pour $x > -\frac{a}{2}$ on a $V(x) = 0$ zone 3

On s'intéresse également ici au cas où $E < V_0$.
On pose : $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $K = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.

## 3.2 Résolution et coefficient de transmission

La résolution de l'équation de Schrödinger donne :

$$\phi_1(x) = A_1 \exp(ikx) + B_1 \exp(-ikx) \tag{3.1}$$

$$\phi_2(x) = A_2 \cosh(Kx) + B_2 \sinh(-Kx) \tag{3.2}$$

$$\phi_3(x) = A_3 \exp(ikx) \tag{3.3}$$

Il y a continuité de $\phi$ et de sa dérivée première en $x = -\frac{a}{2}$ et $x = \frac{a}{2}$. L'application de ces conditions aux limites donnent :

$$A_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) + B_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \cosh\left(\frac{Ka}{2}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{Ka}{2}\right) \tag{3.4}$$

$$ikA_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) - ikB_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = -KA_2 \sinh\left(\frac{Ka}{2}\right) + KB_2 \cosh\left(\frac{Ka}{2}\right) \tag{3.5}$$

$$A_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \cosh\left(\frac{Ka}{2}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{Ka}{2}\right) \tag{3.6}$$

$$ikA_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = KA_2 \sinh\left(\frac{Ka}{2}\right) + KB_2 \cosh\left(\frac{Ka}{2}\right) \tag{3.7}$$

On pose :

$$\vec{\mathbf{J_i}} = |A_1^2|\frac{\hbar k}{m}\mathbf{u}_x$$
$$\vec{\mathbf{J_r}} = -|B_1^2|\frac{\hbar k}{m}\mathbf{u}_x$$
$$\vec{\mathbf{J_t}} = |A_3^2|\frac{\hbar k}{m}\mathbf{u}_x$$

Et on définit ainsi : $R = \frac{|J_r|}{|J_i|}$ et $T = \frac{|J_t|}{|J_i|}$.
Après un long calcul, on trouve :

$$\boxed{R = \frac{\gamma \sinh^2(Ka)}{1+\gamma\sinh^2(Ka)} \qquad T = \frac{1}{1+\gamma\sinh^2(Ka)}} \tag{3.8}$$

où on a introduit $\gamma = \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}$.
On a toujours $R + T = 1$ c'est la conservation de la probabilité de présence. Surtout, $T \neq 0$ c'est l'effet tunnel, les particules peuvent traverser une barrière d'énergie supérieure à la leur, c'est un effet purement ondulatoire.

**Approximation de la barrière épaisse** On dit que la barrière est épaisse si

$$a \gg \delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}} \tag{3.9}$$

Dans ce cas le coefficient de transmission s'approche par

$$T \simeq \frac{16(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right) \tag{3.10}$$

Cet effet tunnel quantique trouve une analogie optique dans le cas de la réflexion sur un dioptre : cet effet s'appelle l'effet tunnel optique.

# Conclusion

Dans cette leçon on a définit rigoureusement une onde évanescente comme une onde ne se propageant pas, décroissant exponentiellement et ne transportant pas de puissance. Ces ondes sont présentes aux échelles macroscopiques et microscopiques et sont responsables de l'effet tunnel. Cet effet est important pour ses applications pratique comme le microscope à effet tunnel ou la compréhension de la dynamique de la fusion thermonucléaire.

# 4 Questions et commentaires

## 4.1 Questions

•

## 4.2 Commentaires

•