LP 02 – Gravitation

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *LP 02 2020*, **Paul Segretain** ⟶ Merci

Prérequis

- Mécanique du point
- Électrostatique

Expériences

☕ aucune

Table des matières

Introduction

La gravitation est une des quatre interactions fondamentales. C'est celle qui prédomine à notre échelle et aux échelles astronomiques.

Elle a été mieux comprise grâce à la théorie de Newton qui a proposé une expression de la force gravitationnelle. Cette découverte est dans la continuité d'autres découvertes de la même époque. Galilée énonce le principe d'inertie : un corps jeté dans le vide a un mouvement rectiligne uniforme. Ce principe sera développé par Newton qui en déduit trois lois de la dynamique. En parallèle, Tycho Brahé enregistre de nombreuses observations du mouvement des astres qui seront analysées ultérieurement par Képler qui en déduit ses trois lois.

Nous allons tout d'abord retrouver la force de gravitation en utilisant les mêmes arguments que Newton. Dans un second temps on étudiera le mouvement dans un champ gravitationnel que nous appliquerons au cas du système solaire.

1 Force et champ gravitationnel

1.1 Démonstration de la force gravitationnelle

Nous nous intéressons à un système de deux masses ponctuelles m et M séparées par une distance r. Nou supposerons que la force gravitationnelle ne dépend que de ces trois paramètres. Il reste maintenant à trouver la dépendance de la force en chacune de ces variables. On va faire l'hypothèse que $F = m^\alpha M^\beta r^\gamma$.

- Galilée avait auparavant fait une expérience où il étudiait le temps de chute de deux boulets de masses différentes et il a constaté que ce temps de chute était le même (ce qui n'est pas tou à fait exact à cause des frottements fluides). De cette observation on déduit que l'accélération sous l'effet de la gravitation ne dépend pas de la masse. En appliquant la deuxième loi de Newton on obtient $F \propto m$.

- Appliquons maintenant la troisième loi de Newton : la force de m sur M est égale à celle de M sur m. Pour cela il faut que la force gravitationnelle ait la même dépendance en M qu'en m ainsi $F \propto M$.

- Pour trouver la dépendance en d, Newton a étudié la période des mouvements de la Lune. L'orbite de la Lune est supposée circulaire, hpothèse qui semble légitime car son rayon vu depuis la Terre varie peu. L'observation nous indique également qu'elle semble tourner à vitesse constante. Le but est de trouver γ en connaissant l'accélération sous le champ de pesanteur terrestre à deux distances : à la surface de la Terre, et à la distance Terre-Lune. En utlisant la seconde loi de Newton en coordonnées cylindriques on a :

$$a_r = \frac{F_g(r)}{m} \tag{1.1}$$

Or on a également :

$$a_r = r\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \tag{1.2}$$

En connaissant la période de rotation de la Lune et sa distance on peut ainsi connaître l'accélération de la Lune. De plus d'après notre définition de γ et de l'équation 1 on peut en déduire :

$$\gamma = \frac{\ln\left(a_r^{\text{Lune}}\right) - \ln\left(a_r^{\text{Terre}}\right)}{\ln(r_{\text{Lune}}) - \ln(r_{\text{Terre}})} \tag{1.3}$$

Avec $r_{\text{Terre}} = 6300\,\text{km}$, $r_{\text{Lune}} = 3{,}8 \times 10^5\,\text{km}$, $a_r^{\text{Terre}} = g$ et $T = 27{,}3\,\text{jours}$ on obtient $\gamma = -2.0$, ainsi la force est inversement proportionnelle à r^2. En trouvant la constante de proportionnalité G (constante de gravitation) on retrouve donc l'expression connue de la force de gravitation :

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{u_r} \tag{1.4}$$

Remarque :

> On aurait pu imaginer une dépendance en r plus complexe qu'une loi de puissance et faire une régression logarithmique sur deux points n'est pas très rigoureux. Ce qui a validé la loi de puissance est qu'elle a très bien marché pour l'ensemble des objets célestes et pas seulement pour la Lune.

Le troisième point est plus profond qu'il n'y parait : Newton a concilié la chute des objets sur Terre et le mouvement de la Lune, ce qui est loin d'être intuitif !

Cependant la Lune a une certaine extension, était il légitime de la considérer comme une masse ponctuelle ?

1.2 Champ gravitationnel

On définit le champ gravitationnel comme :

$$\vec{\mathcal{G}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} \tag{1.5}$$

On peut appliquer le principe de superposition pour généraliser la détermination du champ gravitationnel avec une distribution de masse continue. Cela se traduit par l'intégrale suivante :

$$\vec{\mathcal{G}} = \iiint_D \frac{G\rho(r)}{r^2}\mathrm{d}\tau \tag{1.6}$$

En utilisant les équation suivantes portant sur le champ gravitationnel :

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{G}} = -4\pi G\rho \qquad\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{1.7}$$

On va se servir de ça pour calculer le champ gravitationnel de la Lune. En supposant que la Lune a une symétrie sphérique et de densité radiale, on en déduit $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r)\mathbf{u_r}$. En appliquant le théorème de Gauss sur une sphère de rayon $d > r_{\text{Lune}}$:

$$\oiint_S \vec{\mathcal{G}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{G}}\mathrm{d}\tau \tag{1.8}$$

On retrouve :

$$\vec{\mathcal{G}} = -\frac{GM}{d^2} \tag{1.9}$$

Qui est le champ gravitationnel d'une masse ponctuelle. Newton a donc eu de la chance !

D'où viennent les équations utilisées sur le champ gravitationnel ?

1.3 Points de ressemblance entre la gravitation et l'électrostatique

La ressemblance entre les lois de Coulomb et de Newton est un reflet de la similarité entre l'électrostatique et la gravitation, ce que l'on illustre dans le Table 1 :

Gravitation	Électrostatique
m	q
G	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
$\vec{\mathbf{F}}_{\text{g}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\mathbf{u_r} = m_1\vec{\mathcal{G}_2}$	$\vec{\mathbf{F}}_{\text{él}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{u_r} = q_1\vec{\mathbf{E}}_\mathbf{2}$
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{G}} = 4\pi G\rho_g$	$\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$
$\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathbf{0}} \implies \vec{\mathcal{G}} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$	$\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{0}} \implies \vec{\mathbf{E}} = -\boldsymbol{\nabla}V$
$\Delta\phi = 4\pi G\rho_g$	$\Delta V = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$

Tab. 1 : Analogie entre électrostatique et gravitation

Attention tout de même les masses sont toujours positives et ainsi la force gravitationnelle attractive contrairement à la force électrostatique. Cela explique notament la prédominance de la gravitation à notre échelle car il n'y a pas d'effet d'écrantage comme il y a en électrostatique (car la matière est neutre). De plus en gravitation Newtonienne les forces sont instantanées et il n'y a pas la présence de champ $\vec{\mathbf{B}}$ (c'est en RG qu'on peut faire des liens, surement ne pas le dire pour pas qu'on pense que c'est une perche alors que la RG ouloulou je bite rien).

2 Mouvement dans un champ gravitationnel

2.1 Mouvement dans un champ central

On étudie le mouvement d'un objet massique dans un champ gravitationnel créé par un astre central. On considère que cet astre est bien plus massif que l'objet étudié et donc on néglige son mouvement. La force gravitationnelle étant une force centrale, le moment cinétique de l'objet est conservé :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{OM}} \times \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{g}} = \vec{\mathbf{0}} \tag{2.1}$$

On en tire deux conséquences importantes. D'une part le mouvement est plan, car la position et la vitesse sont orthogonales à un vecteur constant. La trajectoire se fait donc dans le plan orthogonal à $\vec{\mathbf{L}}$ passant par O.

D'autre part, $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante. En effet la norme de $\vec{\mathbf{L}}$ est constante et vaut $mr^2\dot{\theta}$. La constante c vaut le double de la vitesse aréolaire, l'aire balayée par le rayon vecteur. On a montré la deuxième loi de Képler : les aires balayées durant des temps égaux sont identiques. On l'illustre par une vidéo YouTube. Il vaut mieux la mettre au ralenti car elle va vite. (Le prix Nobel 2020 a été décerné à des chercheurs qui ont entre autres travaillé sur ce trou noir.) On illustre la loi des aires en Figure 1

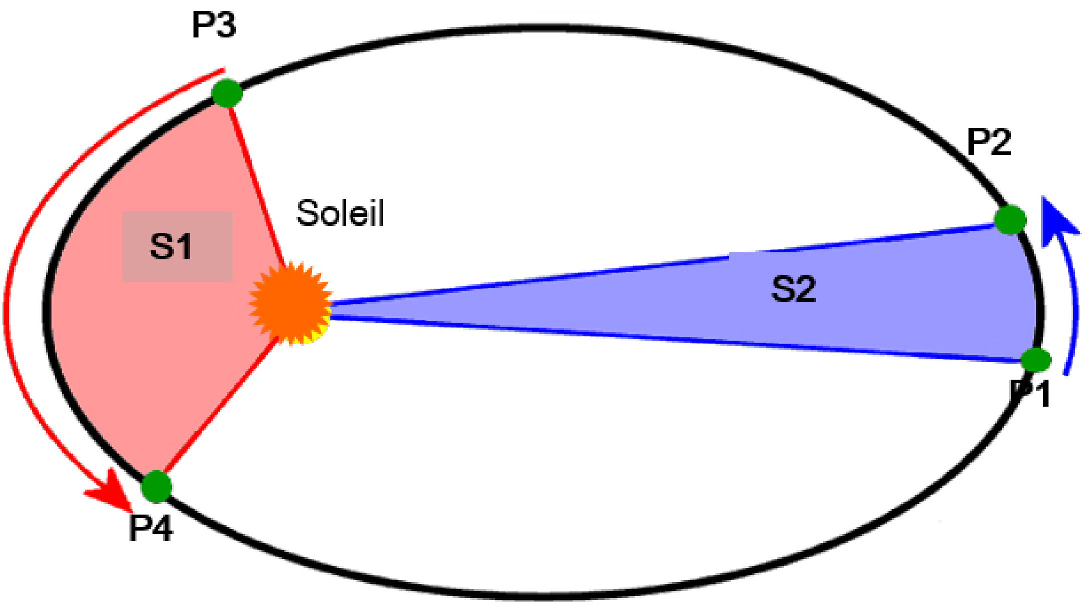

Fig. 1 : Illustration de la loi des aires, tiré de pg-astro.fr

La loi des aires relie θ et r, peut on caractériser le système entièrement par une équation à une dimension ?

2.2 Le potentiel effectif

On cherche à se ramener à un problème à une dimension, exprimons l'énergie mécanique

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GmM}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \frac{GmM}{r}. \end{aligned}$$

On peut alors définir le potentiel effectif

$$E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{CmM}{r} \tag{2.2}$$

Tout se passe comme si la masse m était astreinte à une dimension et soumise au potentiel effectif introduit. Attention ce potentiel dépend du moment cinétique par C et donc des conditions initiales du véritable mouvement 2D. On représente ce potentiel en Figure 2.

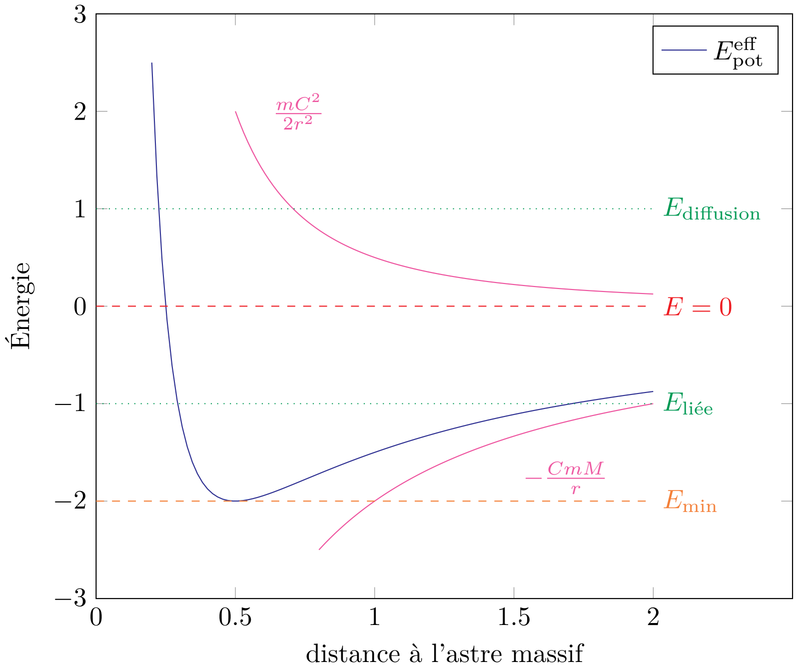

Fig. 2 : Potentiel effectif en fonction de la masse centrale

2.3 Application au système solaire

Commençons par la deuxième loi de Newton en notant $k = GmM$:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{2.3}$$

On fait le produit vectoriel de cette équation avec le moment cinétique et en utilisant qu'il est constant :

$$m\ddot{\vec{r}} \wedge \vec{\mathbf{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\mathbf{p}} \wedge \vec{\mathbf{L}}\right) = \frac{k}{r^2}L\mathbf{e}_\theta = mk\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = mk\dot{\mathbf{e}}_r \tag{2.4}$$

Cette dernière équation donne la dérivée d'un vecteur constant $\vec{\mathbf{A}}$ si on passe tous les termes du même côté :

$$\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{p}} \wedge \vec{\mathbf{L}} - mk\mathbf{e}_r \tag{2.5}$$

Une fois ce vecteur constant établie on peut en déduire les trajectoires :

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{r}} = Ar\cos\theta = \vec{\mathbf{r}} \cdot (\vec{\mathbf{p}} \wedge \vec{\mathbf{L}}) - mkr \tag{2.6}$$

Ou on a introduit θ l'angle entre $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{r}}$. En permutant le produit mixte :

$$\vec{\mathbf{r}} \cdot (\vec{\mathbf{p}} \wedge \vec{\mathbf{L}}) = (\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{p}}) \cdot \vec{\mathbf{L}} = L^2 \tag{2.7}$$

On obtient ainsi la définition d'une conique :

$$r = \frac{L^2/mk}{1 + \frac{A}{mk}\cos\theta} = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{2.8}$$

Ou on a respectivement $e = A/mk$ et $p = L^2/mk$ nommés *l'excentricité* et le *paramètre* de l'ellipse. On peut retrouver la seconde loi de Kepler avec cette formule.

On peut exprimer l'énergie à l'aide de ces deux derniers paramètres, de l'énergie et de la masse m de l'astre. Déterminons tout d'abord $\left\|\vec{\mathbf{A}}\right\|^2$:

$$\vec{\mathbf{A}} = (m\dot{r}\mathbf{e}_r + mr\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) \wedge L\mathbf{e}_\mathbf{z} - mk\mathbf{e}_r \tag{2.9}$$

Après avoir développé et mis au carré on trouve :

$$A^2 = m^2k^2 + 2mEL^2 \tag{2.10}$$

Ce que l'on peut réécrire en utilisant l'excentricité :

$$e^2 - 1 = \frac{2L^2}{mk^2}E \tag{2.11}$$

Une excentricité supérieure à 1, caractéristique des hyperboles est associée à une énergie positive tandis qu'une excentricité inférieure à 1 caractéristique des ellipse est associée à une énergie négative. Cela confirme les résultats trouvés en raisonnant sur l'énergie potentielle effective.

Il nous reste à démontrer la troisième loi de Kepler. On admet que l'aire d'une ellipse vait $S = \pi ab$ et que $p = \frac{b^2}{a}$ avec a et b respectivement les demi ptit-axe et demi grand-axe de l'ellipse.

D'une part l'aire vaut :

$$\mathcal{A} = \pi ab = \frac{L}{2m}T \tag{2.12}$$

D'autre part le paramètre p vaut :

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{GMm^2} \tag{2.13}$$

En éliminant L des équations on obtient la troisième loi de Kepler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \tag{2.14}$$

Conclusion

La loi Newtonienne de la gravitation a eu une grande portée d'utilisation, particulièrement en astronomie. Au fil du temps elle s'est enrichi d'un formalisme mathématique qui l'a rendu encore plus performante comme par exemple l'utilisation du formalisme de la mécanique des fluides (XIXième siècle).

Aujourd'hui nous savons qu'elle n'est pas exacte et qu'en toute rigueur il faudrait appliquer la relativité générale. Cependant elle est dans un très grand nombre de cas une excellente approximation de la relativité générale et son formalisme bien plus simple justifie sa très grande utilisation aujourd'hui.

3 Questions et commentaires

3.1 Questions

-

3.2 Commentaires

-