

# Caractère non galiléen du référentiel terrestre

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

## Niveau : L2

## Bibliographie

 ,

→

## Prérequis

•

## Expériences



## Table des matières

|                                                          |          |
|----------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 Définitions et conséquences</b>                     | <b>2</b> |
| 1.1 Principe d'inertie et référentiel terrestre. . . . . | 2        |
| 1.2 Loi de composition des accélérations . . . . .       | 2        |
| <b>2 Influence sur la terre</b>                          | <b>3</b> |
| 2.1 Définition de la pesanteur . . . . .                 | 3        |
| 2.2 Aplatissement de la Terre . . . . .                  | 3        |
| <b>3 Effets de la force de Coriolis</b>                  | <b>4</b> |
| 3.1 La déviation vers l'est . . . . .                    | 4        |
| 3.2 Vents dans l'hémisphère nord . . . . .               | 5        |
| <b>4 Questions et commentaires</b>                       | <b>6</b> |
| 4.1 Questions . . . . .                                  | 6        |
| 4.2 Commentaires . . . . .                               | 6        |

## Introduction

Jusqu'à présent en mécanique nous avons utilisé le fait de travailler dans un référentiel galiléen pour exprimer le principe fondamental de la dynamique. Hors on sait que la Terre tourne sur elle même et également autour du soleil. Il n'y a donc aucune raison de penser que le référentiel terrestre est galiléen. Historiquement, de nombreuses expériences telles que le pendule de Foucault ont montré qu'il n'était pas galiléen. Dans cette leçon nous mettrons en évidence ce caractère ainsi que certaines conséquences. On s'intéressera aussi à dégager une limite ou l'approximation de référentiel galiléen est justifiée pour le référentiel terrestre.

## 1 Définitions et conséquences

### 1.1 Principe d'inertie et référentiel terrestre.

Le principe d'inertie est le suivant : dans un **référentiel galiléen** une masse ponctuelle ne subissant aucune force extérieure est en translation rectiligne uniforme.

Si l'on connaît un référentiel galiléen  $R$ , un autre référentiel  $R'$  en translation rectiligne uniforme par rapport à  $R$  est galiléen.

Ainsi le caractère galiléen d'un référentiel se vérifie par l'expérience.

**Référentiel terrestre** : centré sur le centre de la Terre  $O$ , trois axes liés à la surface de la Terre.

### 1.2 Loi de composition des accélérations

Soit  $R$  un référentiel galiléen centré en  $O$ . Soit  $R'$  un second référentiel centré en  $O'$  et en rotation par rapport à  $R$  à la vitesse angulaire  $\Omega$ .

Pour un vecteur quelconque, on a l'identité suivante :

$$\frac{d\vec{A}}{dt}_R = \frac{d\vec{A}}{dt}_{R'} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{A} \quad (1)$$

Soit un point  $M$ . Appliquons cette identité au vecteur  $\vec{OM}$ .

$$\frac{d\vec{OM}}{dt}_R = \frac{d\vec{OO'}}{dt}_R + \frac{d\vec{O'M}}{dt}_{R'} = \vec{v}(O')_R + \frac{d\vec{O'M}}{dt}_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M} \quad (2)$$

$$\vec{v}(M)_R = \vec{v}(O')_R + \vec{v}(M)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{O'M} \quad (3)$$

On réapplique la première identité à la vitesse pour trouver la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}(M)_R = \vec{a}(M)_{R'} + \vec{a}(O')_R + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}_{R'} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) \quad (4)$$

On note accélération d'entraînement  $\vec{a}_e$  et accélération de Coriolis  $\vec{a}_c$  les quantités :

$$\vec{a}_e = \vec{a}(O')_R + \frac{d\vec{\omega}}{dt}_{R'} \wedge \vec{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'M}) \quad (5)$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'} \quad (6)$$

Ainsi considérer un  $R'$  galiléen est considérer ces deux accélérations nulles. Dans le cas du référentiel terrestre la correction majeure à l'approximation galiléenne vient de la rotation de la terre sur elle même, qui est donc une rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Dans ce cas là :

$$\vec{a}_e = -\Omega^2 \vec{HM} \quad (7)$$

où  $H$  est la projection de  $M$  sur l'axe de rotation.

Dans le cas d'un point matériel de masse  $m$  placé en  $M$ , on définit les forces d'inerties d'entraînement  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$  et de Coriolis  $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$  on a, en écrivant le principe fondamental de la dynamique dans  $R$  :

$$m\vec{a}(M)_{R'} = \Sigma \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} \quad (8)$$

On vient d'exprimer le **principe fondamental de la dynamique** dans un **référentiel non galiléen**. Il fait apparaître deux nouvelles *pseudo-forces* (car elles dépendent du référentiel d'étude).

**Remarques :**

- La force de Coriolis ne travaille pas (car elle est orthogonale à  $\vec{v}(M)_{R'}$ ). De plus c'est un terme qui apparaît seulement en dynamique.
- La force d'inertie d'entraînement dans ce cas là correspond à ce qu'on appelle communément "force centrifuge". Elle est proportionnelle à la distance à l'axe de rotation, elle sera ainsi maximale à l'équateur sur Terre.

## 2 Influence sur la terre

### 2.1 Définition de la pesanteur

Pour un corps de masse  $m$ , situé au point  $M$  à la surface de la Terre, subissant uniquement la force de gravitation de la Terre, le PFD dans le référentiel terrestre non-galiléen donne

$$m\vec{a} = m\left(\vec{G}_T(M) + m\Omega^2\vec{H}\vec{M}\right) + \vec{F}_{ic} + \vec{F} \quad (9)$$

On définit alors le poids  $\vec{P}$  d'un corps et le champ de pesanteur  $\vec{g}$

$$\vec{P} = m\left(\vec{G}_T(M) + \Omega^2\vec{H}\vec{M}\right) \quad (10)$$

$$\vec{g} = \vec{G}_T(M) + \Omega^2\vec{H}\vec{M} \quad (11)$$

Alors que le champ  $\vec{G}_T$  est dirigé vers le centre de la Terre (en supposant la Terre sphérique), le terme centrifuge ne l'est qu'aux pôles et à l'équateur. Le champ de pesanteur n'est donc pas dirigé vers le centre de la Terre. C'est ce champ qui définit la verticale en un lieu de la surface terrestre : C'est la direction du fil à plomb.

La pesanteur varie donc avec la latitude en norme et en direction

**Ordres de grandeur de  $g$**  On considère pour les ordres de grandeurs que la Terre est sphérique, vérifions que c'est cohérent. L'accélération centrifuge est maximale à l'équateur et nulle aux pôles.

$$\Omega^2 H M = \Omega^2 R_T \sim 3 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-2} \quad (12)$$

On en déduit

$$\begin{cases} g \sim 9.83 \text{ m s}^{-2} & \text{aux pôles} \\ g \sim 9.78 \text{ m s}^{-2} & \text{à l'équateur} \end{cases} \quad (13)$$

L'angle entre la verticale terrestre et la direction du centre de la Terre est inférieur à  $0.1^\circ$ .

Avec une précision de 0.5 % on peut donc négliger le terme centrifuge et considérer  $\vec{g}$  comme radial de norme  $9.8 \text{ m s}^{-2}$ .

On commet une erreur de 0.5 % si on s'élève à une altitude de 16 km, donc sous cette altitude on peut garder l'approximation effectuée à  $\vec{g}$  avec la même précision.

La faible diminution de la pesanteur à l'équateur justifie toutefois que l'on fasse décoller la fusée Ariane 5 depuis Kourou en Guyane.

### 2.2 Aplatissement de la Terre

La Terre est donc quasi sphérique mais sous l'influence de sa rotation propre elle peut se déformer et s'aplatir. En considérant la Terre comme un fluide, la surface de la Terre sera orthogonale aux champ  $\vec{g}$  en tout point, donc on observera un aplatissement aux pôles et un renflement à l'équateur. On peut estimer un ordre de grandeur de cette aplatissement

$$\frac{R_{eq} - R_{po}}{R_{eq}} \sim \frac{g_{eq} - g_{po}}{g_{eq}} \sim 3.4 \times 10^{-3} \quad (14)$$

L'aplatissement de la Terre est mesuré à  $\frac{1}{298}$  ce qui est proche de l'ordre de grandeur que l'on vient de donner.

### 3 Effets de la force de Coriolis

La force de Coriolis est visible en dynamique et c'est notamment elle qui historiquement a montré des preuves de la rotation de la Terre grâce à des expériences telles que le pendule de Foucault ou la déviation vers l'est. Cette déviation vers l'est a été mise en évidence par F. Reich en 1831.

#### 3.1 La déviation vers l'est

Pour mettre en évidence cet effet on va utiliser la théorie des perturbations.

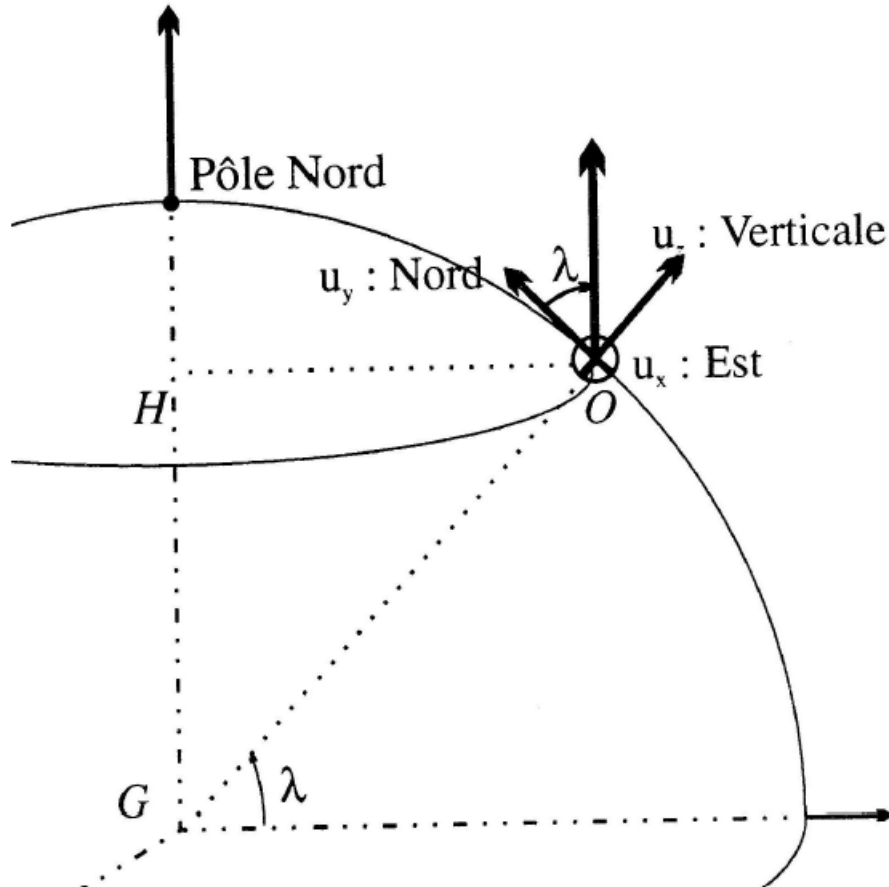


Fig. 1 : Cadre d'étude de la déviation vers l'est

Soit  $\lambda$  du point considéré. On néglige les composantes de  $\vec{g}$  autres que sur l'axe  $\vec{u}_z$ . Un point matériel de masse  $m$  lâché à la hauteur  $h$  à la surface de la Terre. Initialement le point est en  $M(0,0,h)$  et de vitesse initiale nulle.

Soit  $R'(x, y, z)$  le référentiel terrestre, on a donc  $\vec{v}(M)_{R'} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$

Le principe fondamental de la dynamique dans  $R'$  nous donne :

$$m\vec{a}(M)_{R'} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{R'} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\Omega\dot{z}\cos(\lambda) + 2\Omega\dot{y}\sin(\lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}\sin(\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{x}\cos(\lambda) \end{cases} \quad (16)$$

**Théorie des perturbations :** On résout d'abord à l'ordre 0  $\Omega t$  dans ce cas là on a la chute libre et :

$$z \simeq h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (17)$$

Ordre 1 en  $\Omega t$  et on considère  $\dot{x} \ll \dot{z}$  et  $\dot{y} \ll \dot{z}$  et on utilise la solution trouvée à l'ordre 0.

L'équation projetée sur  $x$  donne donc :

$$\ddot{x} = 2\Omega\cos(\lambda)gt \quad (18)$$

Ainsi on a :

$$x = \frac{g\Omega \cos(\lambda)}{3} t^3 \quad (19)$$

À l'ordre 2 il y a déviation vers le sud. Essayons de faire une application numérique de cette déviation. Le temps au bout duquel il y a impact est  $t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

Ainsi la déviation en bout de chute est :  $x_i = \frac{g\Omega \cos(\lambda)}{3} \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$

Application numérique : à Paris,  $\lambda \simeq 48^\circ$  et pour une hauteur  $h = 100$  m on trouve  $t_i = 4.5$  s et  $x_i \simeq 1.4$  cm.

Cette correction est donc faible. On voit que le paramètre important pour la prise en compte ou non de la force de Coriolis est  $\Omega t$  avec  $t$  le temps de l'expérience. Pour des expériences dont la durée est très petite devant celle d'une journée ( $\Omega t \ll 1$ ), la force de Coriolis est donc souvent négligeable. Attention, c'est parfois la seule force dans une direction ce qui la rend non négligeable.

### 3.2 Vents dans l'hémisphère nord

La force de Coriolis est  $\vec{F}_{ie} = -2m\Omega \wedge \vec{v}(M)_{R'}$ . L'air a tendance à se déplacer des zones de hautes pression vers celles de basse pression. On peut schématiser le cas d'une dépression et d'un anticyclone dans l'hémisphère nord.

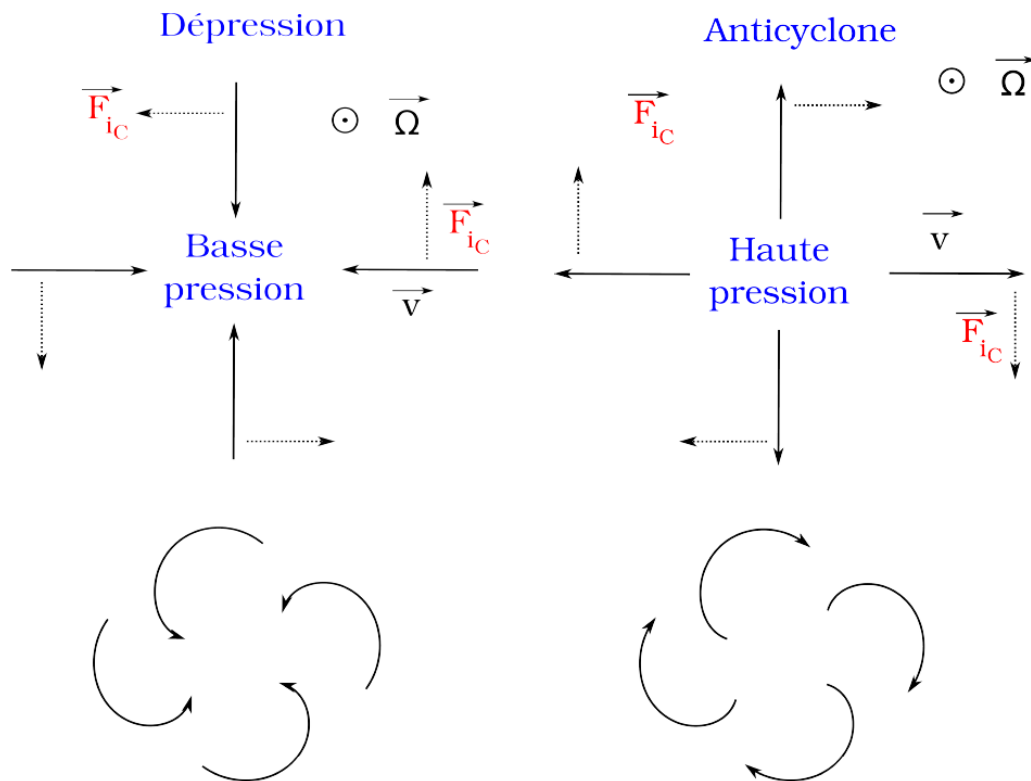


Fig. 2 : Sens des vents dans l'hémisphère nord

Ainsi dans l'hémisphère nord les tourbillons se formant autour d'une dépression tournent dans le sens trigonométrique. Dans l'hémisphère sud ils tournent dans le sens horaire.

Cette analyse se confirme très bien par la photo de cyclones par des satellites.



Fig. 3 : Sens opposé des vents selon l'hémisphère.

## Conclusion

Ainsi il n'existe à notre connaissance aucun référentiel parfaitement galiléen. Le référentiel terrestre présente des écarts significatifs par rapport à cette approximation. On peut néanmoins en tenir compte dans la définition de la gravité et, pour des phénomènes dont la durée est très faible devant la durée d'une journée les effets de la force de Coriolis sont souvent négligeables. Ainsi tout dépend des précisions exigées pour une expérience.

Au CERN notamment, le caractère non galiléen du référentiel géocentrique, qui induit le phénomène de marées induit du bruit dans les expériences de collisions de particules, bruit qui doit être pris en compte.

## 4 Questions et commentaires

### 4.1 Questions

- 

### 4.2 Commentaires

-