LP 08 – Notion de viscosité, écoulements visqueux

11 juin 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *LP08 2020*, **Cléments de la Salle et Col-⟶ léaux**

Prérequis

- Équation d'Euler
- Théorie cinétique des gaz
- Équations de diffusion

Expériences

- Expérience de Stokes

Table des matières

1 Viscosité et forces visqueuses **2**
1.1 Nécessité empirique : description macroscopique . . . 2
1.2 Origine microscopique (dans les gaz) . . . 3

2 Mise en équation **4**
2.1 De la force surfacique à la force volumique . . . 4
2.2 Équation de Navier-Stokes . . . 5
2.3 Nombre de Reynolds et écoulement visqueux . . . 5

3 Propriétés des écoulements visqueux **6**
3.1 Diffusion de quantité de mouvement . . . 6
3.2 Renversabilité . . . 6
3.3 Aspects énergétiques . . . 7
3.4 Écoulement de Poiseuille . . . 7

4 Questions et commentaires **8**
4.1 Questions . . . 8
4.2 Commentaires . . . 8

Introduction

Dernièrement on a introduit l'équation d'Euler et le formalisme de la dynamique des fluides :

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} + (\vec{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{v}}\right) = -\boldsymbol{\nabla}P + \vec{\mathbf{f}} \tag{0.1}$$

Mais ceci ne rend pas bien compte de la réalité. Le seul paramètre décrivant le fluide est sa masse volumique ρ alors que l'on sent bien que le mouvement du miel est différent de celui de l'eau (masse volumique comparable). Il nous faut un nouvel outil dont on a une intuition quotidienne : la *viscosité*.

Motivation :
Faire couler différents liquides d'une burette eau vs glycérol) et olala c'est pas pareil. Ou alors montrer cette vidéo.

1 Viscosité et forces visqueuses

1.1 Nécessité empirique : description macroscopique

Le but de cette partie est de faire comprendre la notion de viscosité à l'aide du transport de quantité de mouvement.

Puisque la notion de viscosité nous fait penser à une forme de résistance, il est naturel de s'intéresser à la relation entre la force qu'on exerce sur le fluide et la vitesse de celui-ci.

On considère l'expérience de Couette Figure 1.

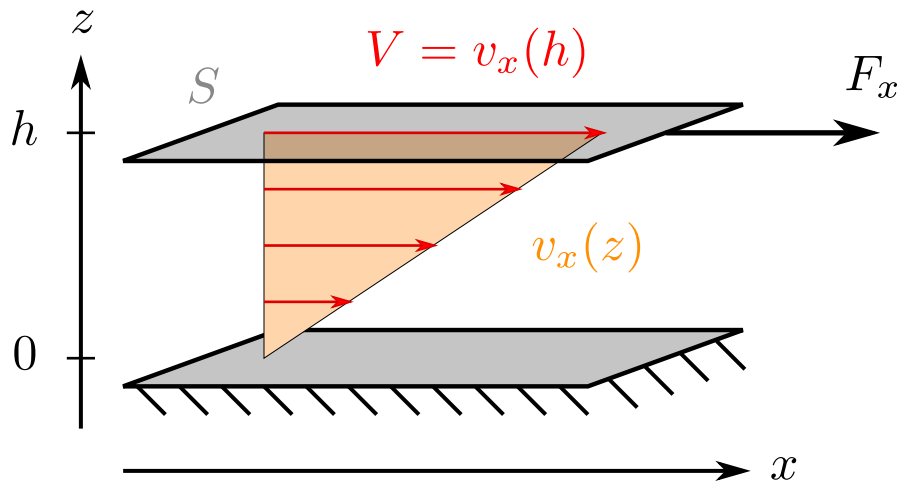

Fig. 1 :

On dispose un fluide entre deux plans en $z = 0$ et $z = h$ et on tire sur le plan supérieur avec une force surfacique F_x/S dans la direction x de sorte à imposer une vitesse V à la plaque dans cette direction.

On peut montrer expérimentalement que le déplacement de la couche de fluide supérieure va entraîner les couches inférieures et on obtient un profil de vitesse linéaire :

$$v_x(z) = \frac{V}{h}z \tag{1.1}$$

Définition : On appelle un *fluide newtonien* un fluide réagissant linéairement à une contrainte :

$$\frac{F_x}{S} = \eta\frac{V}{h} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial z} \tag{1.2}$$

Ou on a introduit η la *viscosité dynamique*, paramètre caractérisant la résistance du fluide face à la contrainte. Elle s'exprime en Poiseuille Ps=Pa · s

Remarques :

- On peut généraliser la forme de cette force surfacique dans le fluide : la force qu'exerce la partie supérieure sur la partie inférieure est :
$$\frac{F_x(z)}{S} = \eta \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} \tag{1.3}$$
On peut comprendre cette forme intuitivement : plus le gradient de v_x est grand plus les couches se freinent entre elles et donc plus il faudra une force importante pour les déplacer.
- PLus η est grand, plus il faut une force importante pour déplacer les couches de fluide.

OdG :

À 20 °C :
- Air : $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa \cdot s}$
- Eau : $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$
- Glycérine : $\eta = 1{,}5\,\mathrm{Pa \cdot s}$

↓ *On vient de construire ça à partir de résultats expérimentaux. Peut on le retrouver à l'aide d'un modèle simple ?*

1.2 Origine microscopique (dans les gaz)

Guyon p.68
On se restreint à l'étude des gaz, le modèle présenté ne s'applique pas du tout aux fluides.

Hypothèses :

Il s'agit d'un modèle de théorie cinétique des gaz qui s'appuie sur les hypothèses suivantes :
- Les atomes se déplacent librement : il ne subissent que des chocs.
- La distribution de leur vitesse est isotrope de sorte 1/6 des atomes vont vers $+\mathbf{u}_x$, 1/6 selon $-\mathbf{u}_x$ etc. La norme de la vitesse est u la vitesse thermique :
$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\left\langle \vec{\mathbf{v}}^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_B T \tag{1.4}$$
- On note l le libre parcours moyen et τ le temps que mettent les atomes à parcourir l autrement dit le libre temps de vol :
$$l = u\tau \tag{1.5}$$
- Les atomes ont en plus de u une vitesse globale $v_x(z)$ bien plus faible mais qui détermine le mouvement macroscopique du fluide.
- La température est homogène
- La densité d'atomes n est homogène
- Les atomes ont tous la même masse m

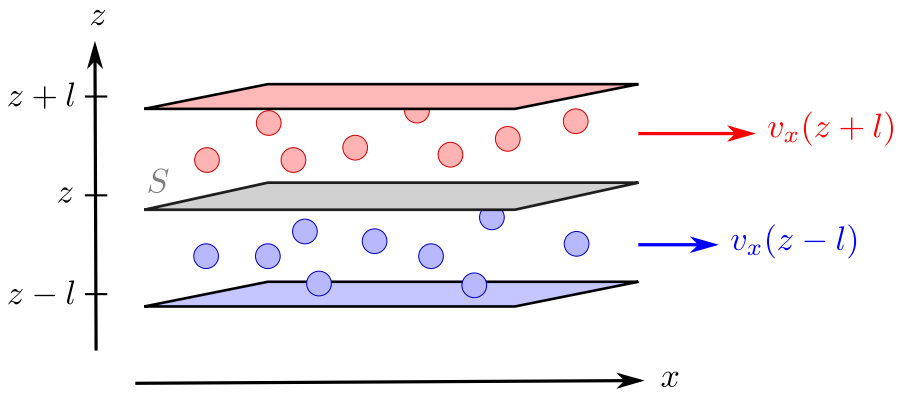

Fig. 2 : Modèle microscopique

On considère alors une section S de fluide à la hauteur z et on s'intéresse comme dans la partie précédente à la force exercée par la partie supérieure sur la partie inférieure. Cette force est due au mouvement des atomes rouges (compris entre z et $z + l$) qui pendant $\mathrm{d}t$ peuvent taper les atomes bleus (compris entre z et $z - l$).

- Les atomes rouges ont une quantité de mouvement selon x :

$$p_x(z+l) = \frac{1}{6} nuS\tau m v_x(z+l) \tag{1.6}$$

  - $uS\tau$ est le volume occupé par les atomes rouges qui vont se cogner pendant τ
  - $\frac{1}{6}nuS\tau$ est le nombre d'atomes rouges qui vont se cogner pendant τ
  - $mv_x(z+l)$ est la quantité de mouvement d'un atome rouge (on ne prends pas en compte la vitesse d'agitation thermique car elle est nulle en moyenne)

- Les atomes bleus ont une quantité de mouvement :

$$p_x(z-l) = \frac{1}{6} nuS\tau v_x(z-l) \tag{1.7}$$

Ainsi les atomes rouges exercent sur les atomes bleus une force selon x égale à :

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x(z+l)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}p_x(z-l)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3} nuSlm \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} \tag{1.8}$$

Or on a défini la viscosité dynamique comme :

$$F_x = \eta \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} S \tag{1.9}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\eta = \frac{1}{3} nulm \tag{1.10}$$

Remarques :

- On trouve que pour les gaz $\eta \sim \sqrt{T}$ alors que pour les liquides η décroit avec T !

OdG :

Pour l'air dans les conditions standard de température et pression on a $u \sim 500\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $l \sim 70\,\mathrm{nm}$ on trouve $\eta \sim 1 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa \cdot s}$

2 Mise en équation

2.1 De la force surfacique à la force volumique

Dans le but d'intégrer cette nouvelle force aux équations d'un fluide il faut la mettre sous forme de force volumique et non surfacique. Considérons une tranche $\mathrm{d}z$ de fluide et faisons un bilan des forces visqueuses :

- En $z + \mathrm{d}z$ la tranche subit une force de cisaillement exercée par la partie supérieure (signe + dans notre convention) :

$$F_x(z+\mathrm{d}z) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} S \tag{2.1}$$

- En z la tranche subit la force de cisaillement exercée par la partie inférieure (signe -) :

$$F_x(z) = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} S \tag{2.2}$$

Ainsi la tranche subit la force totale :

$$F_x = F_x(z+dz) + F_x(z) = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} S\mathrm{d}z \tag{2.3}$$

La tranche a un volume $S\mathrm{d}z$ ainsi la force volumique associée est :

$$f_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \tag{2.4}$$

De façon plus générale, quand on prend en compte les trois directions de l'espace on arrive à l'expression volumiques des forces de viscosité :

$$\boxed{f_v = \eta \Delta \vec{\mathbf{v}}} \tag{2.5}$$

Rappelons que l'expression de cette force n'est valable par définition que pour des fluides Newtoniens.

2.2 Équation de Navier-Stokes

On avait vu la dernière fois l'équation d'Euler, en ajoutant le terme visqueux que l'on vient d'obtenir on aboutit à l'équation suivante :

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} + (\vec{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{v}}\right) = -\boldsymbol{\nabla}P + \eta\Delta\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{f_v}} \tag{2.6}$$

C'est l'équation de **Navier Stokes** qui est valable dans un *référentiel galiléen* pour un *fluide parfait.*

Remarques :

- C'est une équation *non linéaire* du second ordre.
- Dans un référentiel non galilén il faut tenir compte des forces d'inertie.
- On a a priori 4 inconnues ($\vec{\mathbf{v}}$ et P) et trois équations. On ajoute généralement l'hypothèse d'incompressibilité $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{v}} = 0$ (attention elle est déjà faite pour écrire NS sinon il y a un terme de plus avec la seconde viscosité mais chut).
- Conditions aux limites : La vitesse du fluide doit être égale à celle du solide à l'interface. (i.e. une longueur de glissement nulle pour un fluide)

2.3 Nombre de Reynolds et écoulement visqueux

Le but est à présent de simplifie rcett équation en retirant le terme non linéair. Comparons son influence à celle du terme visqueux

Définition : Nombre de Reynolds Le nombre de Reynolds compare les termes convectifs et diffusifs :

$$\mathrm{Re} = \frac{\|\rho(\vec{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{v}}\|}{\|\eta\nabla^2\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{\rho V L}{\eta} \tag{2.7}$$

Remarques

- Le nombre de Reynolds compare les termes de convection et de diffusion (viscosité) : s'il est grand, on pourra négliger les forces visqueuse mais s'il est petit, c'est plutôt le terme convectif qui sera négligé.
- Le nombre de Reynolds est propre à l'écoulement, pas au fluide ! On illustre cela par la Table 1.

Définition : viscosité cinématique On peut regrouper les termes propres au fluide η et ρ dans un coefficient appelé *viscosité cinématique*

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{2.8}$$

Elle est homogène à un coefficient de diffusion, elle s'exprime en $\mathrm{m}^2\cdot/\mathrm{s}$.
Ainsi $\mathrm{Re} = \frac{VL}{\nu}$.

Situation	$\rho(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3})$	$V(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})$	$L(\mathrm{m})$	$\eta(\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s})$	Re
Voiture dans l'air	1	10	1	10^{-5}	10^{6}
Moustique dans l'air	1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	1
Cellule dans l'eau	10^{3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-3}

Tab. 1 : Différents nombres de Reynolds en fonction de la situation

On peut donc en évaluant le nombre de Reynolds distinguer deux cas limites :

- $\mathrm{Re} \gg 1$: les forces visqueuses sont négligeables devant le terme convectif.
- $\mathrm{Re} \ll 1$: les forces visqueuses dominent et on peut négliger le terme convectif.

Dans le premier cas on peut négliger le terme visqueux, cela nous ramène à l'équation d'Euler qu'on a déjà étudié. On va donc s'intéresser au second cas : si on se place à bas Reynolds l'équation perds son terme non linéaire.

$$\rho = \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla} P + \eta \Delta \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{f_v}} \tag{2.9}$$

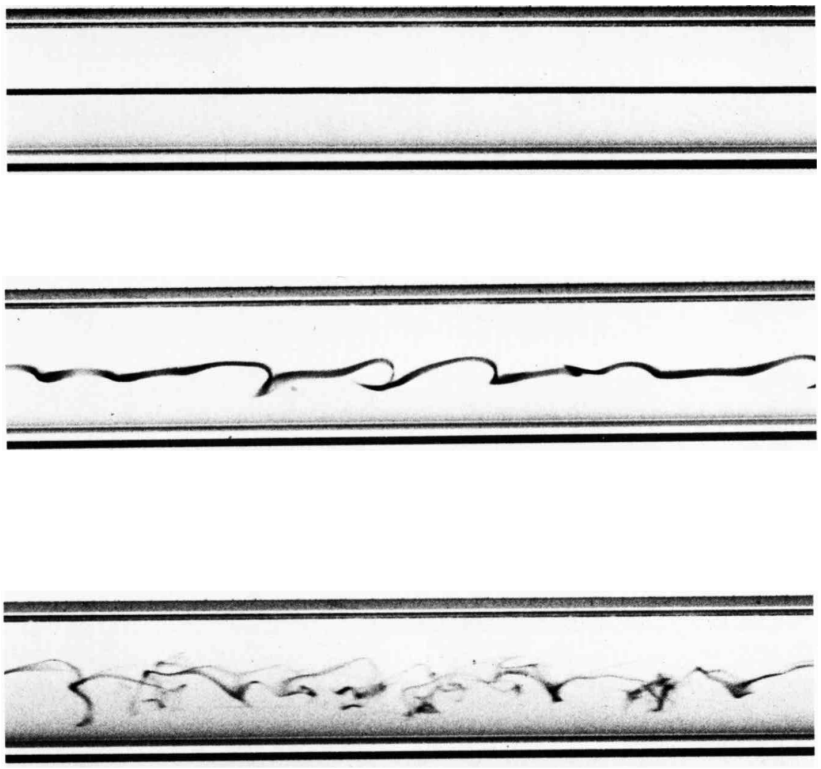

Fig. 3 : Écoulements à différents nombre de Reynolds. Extrait de *An album of fluid motion* de Van Dyke.

On écrit souvent cette équation en régime stationnaire et sans force extérieure. C'est l'équation de Stokes :

$$\boldsymbol{\nabla} P = \eta \Delta \vec{\mathbf{v}} \tag{2.10}$$

3 Propriétés des écoulements visqueux

3.1 Diffusion de quantité de mouvement

Puisque ν est homogène à un coefficient de diffusion, quelle grandeur est bien diffusée ? Selon les observations macroscopique et microscopique du début, on est amenés à penser que c'est la quantité de mouvement qui est diffusée.

Si on omet le terme de pression et qu'on se place à ρ homogène et constant on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \vec{\mathbf{v}}) = \nu \nabla^2 (\rho \vec{\mathbf{v}}) \tag{3.1}$$

On reconnaît alors une équation de diffusion où la grandeur diffusée est la quantité de mouvement volumique $\rho \vec{\mathbf{v}}$.

Remarque

La quantité de mouvement diffuse également dans les directions orthogonales à la vitesse du fluide

3.2 Renversabilité

✍ Jolidon p.411

Expérience de Stokes
C'est joli, ça revient en arrière ! C'est détaillé dans le poly de TP. Sinon il y a cette vidéo.

3.3 Aspects énergétiques

S'il y a diffusion, il doit y avoir de la dissipation quelque part… Allons voir ça. On reprend l'exemple de l'écoulement de Couettee. On fait le bilan des forces qui s'appliquent sur un élément de volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$:

- Force de pression à gauche : $P(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- Force de pression à droite : $-P(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- Force de cisaillement en haut : $\eta\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
- Force de cisaillement en bas : $-\eta\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

On peut associer à chacune de ces forces une puissance :

$$\begin{aligned} v_x(z)P(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ -v_x(z)P(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ \eta v_x(z+\mathrm{d}z)\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ -\eta v_x(z)\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \end{aligned}$$

La puissance volumique des forces extérieures est

$$P_{\text{ext}} = -v_x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \eta\frac{\partial}{\partial z}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\right). \tag{3.2}$$

En régime stationnaire, avec l'équation de Stokes on a alors

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}. \tag{3.3}$$

Ainsi,

$$P_{\text{ext}} = \eta v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \eta\frac{\partial}{\partial z}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 \tag{3.4}$$

En régime stationnaire, la puissance cinétique est nulle, la puissance volumique des forces intérieures est donc :

$$P_{\text{int}} = -P_{\text{ext}} = -\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 \tag{3.5}$$

Remarques

- Ce terme est négatif car les forces visqueuses dissipent toujours de l'énergie.
- Il y a deux façons de perdre beaucoup d'énergie :
  - Lorsque la viscosité est grande
  - Lorsque le gradient de vitesse est grand. Dans les écoulement turbulents, il existe des zones de grands frottements, endroits où l'énergie se perd dans la friction des particules de fluides.

3.4 Écoulement de Poiseuille

Traitons un exemple simple pour bien comprendre. On se place en coordonnées cylindriques avec z l'axe du cylindre. On considère un écoulement laminaire donc $\vec{\mathbf{v}} = v(r,\theta,z,t)\mathbf{z}$. L'invariance par rotation selon θ et l'incompressibilité ($\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ ainsi que le régime stationnaire font que la vitesse ne dépend que de r).

Ainsi, l'accélération particulaire est nulle. On néglige le gradient de pression selon l'axe z ainsi que l'effet de la gravité. Navier Stokes projetée sur x donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right). \tag{3.6}$$

Le terme de gauche ne dépend que de z, celui de droite ne dépend que de r, ils sont donc égaux à une constante notée $-A$.

On intègre pour obtenir la vitesse sous la forme $v(r) = \frac{-A}{4\eta}r^2 + B\ln(r) + C$. En $r = 0$ la vitesse n'est pas infinie donc $B = 0$. On a donc $C = v(r = 0) = v_0$. De plus, $v(r = R) = 0$ donc $v_0 = \frac{AR^2}{4\eta}$. Finalement, on a un profil de vitesse parabolique :

$$v(r) = \frac{AR^2}{4\eta}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{3.7}$$

Pour la pression, on a $P = -Az + B'$. Alors $B' = P(z = 0) = P_\mathrm{e}$ et$P(x = L) = P_\mathrm{s} = -AL + P_\mathrm{e}$. Si $A > 0$ alors la pression diminue dans le tube, on introduit la perte de charge :

$$\frac{4\eta v_0}{R^2} = A = \frac{P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s}}{L}. \tag{3.8}$$

L'écoulement de Poiseuille cylindrique est causé par une différence de pression.

Le débit volumique dans le tube est donné par $\mathcal{D} = \iint \vec{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{S}} = \int_0^R v(r)2\pi r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}v_0\pi R^2$. On obtient la *loi de Poiseuille* :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{8}\frac{(P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s})\pi R^4}{\eta L} \tag{3.9}$$

Remarquons la dépendance en R^4. De plus, plus le fluide est visqueux, plus le gradient de pression doit être grand pour maintenir le débit.

La relation est analogue à la relation $U = RI$ de l'électrocinétique, la résistance hydraulique vaut :

$$R_\mathrm{hydro} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \tag{3.10}$$

Application

Pour le cœur, $\mathcal{D} = 8{,}30 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$, l'aorte a un rayon $R = 1\,\mathrm{cm}$ et la section cumulée de tous les capillaires est $S = 0{,}2\,\mathrm{m}^2$. Le sang a une viscosité moyenne $\eta = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$. Ainsi

$$v_\mathrm{aorte} = 0{,}26\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \qquad v_\mathrm{capillaire} = 4{,}15 \times 10^{-4}\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \tag{3.11}$$

$$A_\mathrm{aorte} = 42{,}3\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1} \qquad A_\mathrm{capillaire} = 6{,}64 \times 10^{-4}\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^{-1} \tag{3.12}$$

Attention, la validité de l'étude est discutable pour l'aorte car $\mathrm{Re}_\mathrm{aorte} = 1760$ donc l'écoulement n'est pas vraiment laminaire, on est en régime transitoire.

Conclusion

On a vu dans cette leçon l'origine microscopique de la viscosité et son rôle dans l'écoulement des fluides, prépondérant à bas nombre de Reynolds. Elle tend à s'opposer au mouvement des objets qui se déplacent dans un fluide, ainsi la force de traînée exercée sur une voiture sera de plus en plus importante avec la vitesse et l'énergie nécessaire à leur déplacement devra augmenter. On cherche ainsi à minimiser la force de traînée avec des profils aérodynamiques.

On a étudié uniquement le cas des fluides newtoniens, il existe en réalité des fluides non newtonien comme le mélange eau-fécule de pomme de terre.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-