

LP09 – Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

↗ *LP 09 2020*, Cléments de la Salle et Coloméaux

Prérequis

- Viscosité
- Équation de Navier-Stokes
- Nombre de Reynolds
- Bilan d'énergie

Expériences

- ☞ Effet Coandă

Table des matières

1	Modèle de l'écoulement parfait	2
1.1	Fluide parfait	2
1.2	Écoulement parfait	2
1.3	Effet Coandă	3
2	Théorème de Bernoulli	4
2.1	Démonstration et énoncé	4
2.2	Interprétation énergétique	5
2.3	Application : effet Venturi	6
3	Écoulements potentiels	7
3.1	Effet Magnus	7
3.2	Force de Magnus	7
4	Questions et commentaires	9
4.1	Questions	9
4.2	Commentaires	9

Introduction

Dans les derniers cours on a introduit et étudié l'équation de Navier-Stokes. C'est une équation non-linéaire du second ordre donc difficile à résoudre. On a vu comment la simplifier en se plaçant à bas nombre de Reynolds. On va aujourd'hui chercher à la simplifier dans un autre domaine d'application.

1 Modèle de l'écoulement parfait

1.1 Fluide parfait

Définition fluide parfait On appelle *fluide parfait* un fluide pour lequel la viscosité ainsi que sa conductivité thermique sont strictement nulles $\eta = 0$ et $\lambda = 0$.

Dans de telles hypothèses, on peut donner les caractéristiques d'un tel fluide :

- La vraie utilité c'est que l'écoulement vérifie alors l'équation d'Euler

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \rho \vec{g}. \quad (1.1)$$

On a pris ici comme forces volumiques seulement la pesanteur, on pourrait en prendre d'autres.

- Les conditions aux limites pour un fluide parfait ne concernent plus que la composante orthogonale de la vitesse : puisqu'il n'y a plus de viscosité, le fluide est libre de glisser le long d'une paroi. Il ne peut cependant toujours pas pénétrer le solide :

$$\vec{u}_{\text{solide}} \cdot \vec{n} = \vec{u}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n}. \quad (1.2)$$

On a la même chose pour un contact entre deux fluides parfaits.

- L'évolution d'un tel fluide est toujours isentropique (pas nécessaire d'en parler ni de faire la démo)

Démonstration facultative de l'évolution isentropique d'un fluide parfait La conservation de l'énergie (sans sources) assure que

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_Q + p \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.3)$$

Or la conductivité thermique est nulle donc le terme de diffusion thermique est nul lui aussi. Sachant que

$$de = T ds - p dv = T dS + p \frac{d\rho}{\rho^2}. \quad (1.4)$$

Finalement,

$$p \nabla \cdot \vec{v} = -\rho \frac{\partial e}{\partial t} = -\rho T \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.5)$$

La conservation de la masse assure que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}. \quad (1.6)$$

On en conclut que

$$\boxed{\frac{\partial s}{\partial t} = 0}. \quad (1.7)$$

Attention les superfluides comme l'hélium 4 en dessous de 2,17 K ont une viscosité rigoureusement nulle mais une conductivité thermique infinie donc ce ne sont pas des fluides parfaits.

1.2 Écoulement parfait

Le problème du modèle du fluide parfait c'est qu'il est bien trop restrictif. On est donc amené à aller plus loin dans les hypothèses

Définition : Écoulement parfait Il s'agit d'un écoulement qui se comporte comme un fluide parfait : la viscosité et les pertes thermiques y sont négligeables.

On souhaite en particulier pouvoir appliquer l'équation d'Euler à un écoulement parfait.

Quelles sont les hypothèses ? On peut repartir de l'équation de Navier-Stokes adimensionnée :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (\vec{u}') + (\vec{u}' \cdot \nabla') \vec{u}' \right) = -\nabla' p' + \frac{1}{\text{Re}} \nabla'^2 \vec{u}'. \quad (1.8)$$

On remarque qu'il faut se placer à haut Reynolds pour négliger le terme visqueux. (Si on est à trop haut Reynolds alors l'écoulement risque d'être turbulent. Ce n'est pas gênant tant que les turbulences ne descendent pas à l'échelle de dissipation visqueuse.)

Il faut comparer les temps caractéristiques des phénomènes visqueux τ_ν , thermiques τ_θ et de convection τ_c , on veut

$$\tau_\nu = \frac{L^2}{\nu}, \tau_\theta = \frac{L^2}{D} \gg \tau_c = \frac{L}{U}. \quad (1.9)$$

Cela se traduit par l'apparition du nombre de Péclet et du nombre de Reynolds :

$$\text{Pe} = \frac{UL}{D}, \text{Re} = \frac{UL}{\nu} \gg 1. \quad (1.10)$$

Illustrons en [Table 1](#) des ordres de grandeurs

Situation	U	L	diffusion	Nombres de Péclet et de Reynolds
Jet d'eau du robinet	1 m s^{-1}	1 m	$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, D = 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$\text{Re} = 10^6, \text{Pe} = 10^7$
Voiture dans l'air	10^2 m s^{-1}	1 m	$\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, D = 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	$\text{Re} = 10^7, \text{Pe} = 10^7$

Tab. 1 : Ordres de grandeurs de quantités caractéristiques dans un écoulement parfait

Les écoulements sont parfaits tant qu'il n'y a pas de turbulence

Couche limite Attention, l'hypothèse du fluide parfait n'est jamais vérifiée près des parois : il existe une couche limite dans laquelle les phénomènes de dissipation visqueuse ne sont plus négligeables.

On compare :

- les phénomènes de convection le long de la paroi de longueur L : $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \sim \frac{U^2}{L}$
- Les phénomènes de dissipation dans la couche d'épaisseur δ : $\nu \nabla^2 \vec{v} \sim \frac{\nu U}{\delta^2}$.

La couche limite est délimitée par la zone où ces contributions sont comparables, son épaisseur δ est donc telle que

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (1.11)$$

1.3 Effet Coandă

Effet Coandă

On fait léviter une balle de ping-pong avec un sèche cheveux. Dans la vraie vie cet effet a des applications concrètes mais peut également être source de problèmes.

On applique l'équation d'Euler stationnaire à un écoulement de la forme $\vec{v} = v(r)\theta$:

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p. \quad (1.12)$$

On transforme le terme d'advection :

$$\rho \left(\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \right) = -\nabla p_{\mathbf{r}}. \quad (1.13)$$

On calcule en coordonnées cylindriques et on projette selon \mathbf{r} :

$$-\rho \frac{v(r)^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.14)$$

Ainsi la pression augmente avec la distance à l'objet : ainsi, une force maintient la balle en l'air, comme illustré en [Figure 1](#)

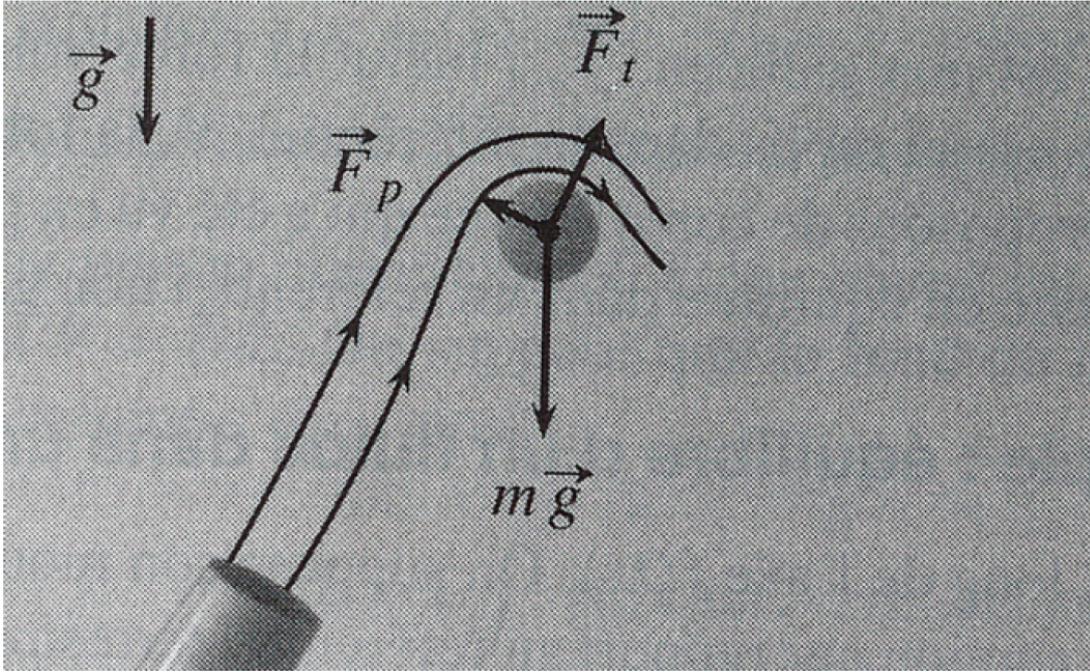


Fig. 1 : Les lignes de courants passent sur la balle, la pression y augmente et la balle se retrouve maintenue dans les airs.

2 Théorème de Bernoulli

2.1 Démonstration et énoncé

On va repartir de l'équation d'Euler qu'on a introduite :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (2.1)$$

On rappelle les hypothèses :

- Écoulement parfait
- Écoulement incompressible
- Ici le poids est la seule force volumique

Si on rajoute l'hypothèse d'un *écoulement stationnaire* :

$$\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (2.2)$$

En utilisant l'analyse vectorielle on peut transformer le terme convectif et mettre l'équation sous la forme :

$$\rho \left(\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (2.3)$$

Notre but est de se débarrasser du terme rotationnel pour pouvoir exhiber une quantité conservée. Pour cela il y a deux possibilités :

- Hypothèse d'écoulement *irrotationnel* : dans ce cas là $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ et ainsi on peut mettre l'équation sous la forme (en prenant z l'axe vertical ascendant) :

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (2.4)$$

Dans ce cas là, la quantité à l'intérieur du gradient est conservée *dans tout l'écoulement*. On peut écrire :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + gz_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + gz_B \quad (2.5)$$

quelques soient les points A et B du fluide.

- Sur une *ligne de courant*. Soit $d\vec{l}$ sur une ligne de courant (i.e. $d\vec{l}$ colinéaire à \vec{v}). Faisons le produit scalaire de notre équation avec $d\vec{l}$:

$$\rho \left(\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{l} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) = -\nabla p \cdot d\vec{l} + \rho \vec{g} \cdot d\vec{l} \tag{2.6}$$

Or $\nabla \times \vec{v}$ est orthogonal à \vec{v} ainsi $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$. De plus on peut écrire que pour n'importe quel scalaire S , $\nabla S \cdot d\vec{l} = dS$. Ainsi l'équation se réécrit :

$$d \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0 \tag{2.7}$$

Attention, cette fois l'utilisation du théorème est plus restrictive : on peut écrire :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + gz_A = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + gz_B \tag{2.8}$$

pour A et B sur la *même ligne de courant*

Remarques :

- En l'absence d'écoulement on retrouve le principe fondamental de la statique des fluides.
- Le calcul peut être généralisé à d'autres forces conservatives que le poids.
- L'hypothèse d'irrotationnalité étant rarement vérifiée c'est généralement la seconde forme du théorème que l'on utilisera.
- Dans le cas d'un écoulement irrotationnel mais *non stationnaire* on peut écrire $\vec{v} = \nabla \phi$ et ainsi la quantité

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \tag{2.9}$$

est conservée dans tout l'écoulement

↓ On peut essayer de trouver une interprétation physique à ce théorème. C'est une loi de conservation, le premier terme ressemble à une énergie cinétique volumique. On va donc essayer de le relier à la conservation de l'énergie.

2.2 Interprétation énergétique

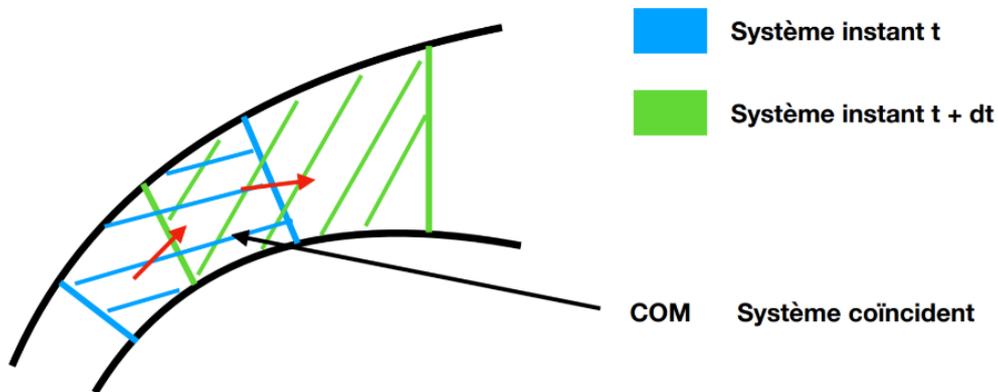


Fig. 2 : Représentation du système considéré.

On considère un écoulement *parfait, irrotationnel et incompressible*. Le fluide se situe à l'instant t dans le rectangle bleu (à gauche) et à l'instant $t + dt$ dans le rectangle vert (à droite). L'espace commun entre les deux rectangles est le système coïncident et est noté COM ou Σ : c'est un système ouvert.

Pour pouvoir faire des bilans d'énergie on doit pouvoir travailler sur un système fermé. On définit donc Σ^* comme le système correspondant au rectangle bleu à l'instant t et au rectangle vert à l'instant $t + dt$. L'écoulement étant stationnaire le débit massique se conserve.

Effectuons maintenant un bilan d'énergie pour le système Σ^* entre t et $t + dt$. La notation des énergies avec ou sans * renvoie au système correspondant.

$$dE_c^* = E_c^*(t + dt) - E_c^*(t) \quad (2.10)$$

$$dE_c^* = E_c(t + dt) + \frac{1}{2}\delta mu_s^2 - \left(E_c(t) + \frac{1}{2}\delta mu_e^2 \right) \implies dE_c^* = \frac{1}{2}(u_s^2 - u_e^2)D_m dt \quad (2.11)$$

$$\frac{dE_c^*}{dt} = \frac{1}{2}D_m(u_s^2 - u_e^2) \quad (2.12)$$

Or d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c^*}{dt} = P_{\text{int}}^* + P_{\text{ext}}^* \quad (2.13)$$

Déterminons maintenant P_{ext}^* . On a deux forces à prendre en compte : le poids et les forces de pression.

- Forces de pression : Au vu du système la puissance apportée par les forces de pression est positive en entrée ($dV_e < 0$) et négative en sortie ($dV_s > 0$). Ainsi :

$$P_{\text{ext}, P}^* = P_e S_e u_e - P_s S_s u_s = \frac{D_m}{\rho}(P_e - P_s) \quad (2.14)$$

- Poids :

$$P_{\text{ext}, g}^* = \rho g(S_e u_e z_e - S_s u_s z_s) = D_m g(z_e - z_s) \quad (2.15)$$

On peut donc déterminer P_{int}^* :

$$P_{\text{int}}^* = \frac{dE_c^*}{dt} - P_{\text{ext}}^* = D_m \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz \right]_e^s \quad (2.16)$$

On trouve ici une interprétation énergétique du théorème de Bernoulli : il est vérifié si la puissance interne du système est conservée. On comprend notamment que pour un écoulement non parfait les forces de viscosité vont dissiper de la puissance et invalider le théorème de Bernoulli.

2.3 Application : effet Venturi

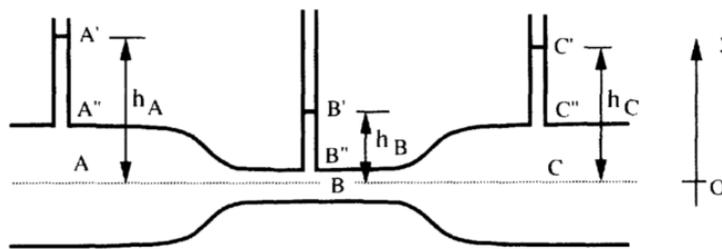


Fig. 3 : Effet venturi

On peut montrer cette [vidéo](#) pour estimer un nombre de Reynolds. Dans ce cas là on prends $L \sim 1$ cm, $U \sim 1$ m/s et $\nu \sim 1 \times 10^{-5}$ m²/s d'où $Re \sim 1 \times 10^3$, l'hypothèse d'écoulement parfait est justifiée.

On suppose également l'écoulement stationnaire et incompressible, on applique donc le théorème de Bernoulli entre les points A , B et C qui sont à la même hauteur z .

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} = \frac{v_C^2}{2} + \frac{P_C}{\rho} \quad (2.17)$$

On utilise également la loi de la statique des fluides :

$$P_A = P_0 + \rho g h_A \quad (2.18)$$

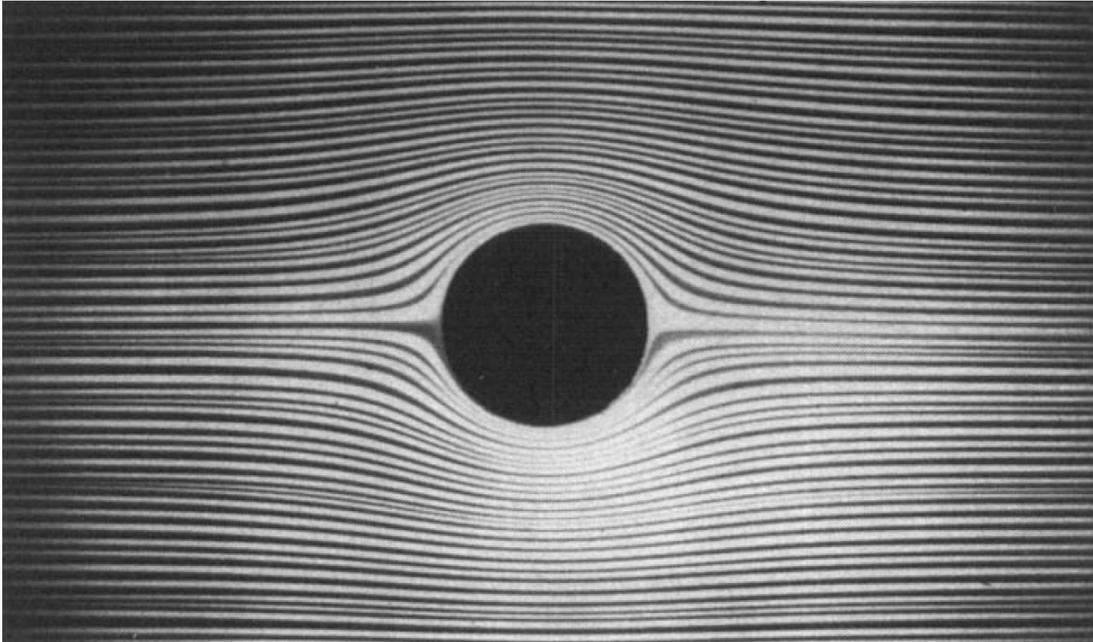


Fig. 4 : Forme des lignes de courant dans le cas d'écoulement parfait autour d'un cylindre sans rotation.

$$P_B = P_0 + \rho gh_B \quad (2.19)$$

$$P_C = P_0 + \rho gh_C \quad (2.20)$$

Et ainsi :

$$\frac{v_A^2}{2} + gh_A = \frac{v_B^2}{2} + gh_B = \frac{v_C^2}{2} + gh_C \quad (2.21)$$

L'écoulement étant stationnaire et incompressible il y a conservation du débit. Ainsi, si la section diminue, la vitesse augmente. On a donc $v_A = v_C$ et $v_B > v_A$. Cela implique donc $P_B < P_A$ par Bernoulli et donc $h_B < h_A$.

On remarque cependant que l'on a également $h_C < h_A$: ceci montre les limites de l'approximation de fluide parfait. Ce phénomène s'appelle *perte de charge* et est due à la dissipation visqueuse !

3 Écoulements potentiels

Dans cette partie on cherche à comprendre cette [vidéo](#).

3.1 Effet Magnus

On peut se placer du point de vue de la balle et dire que c'est l'air qui lui arrive dessus avec une vitesse \vec{U} uniforme à l'infini. On peut visualiser les lignes de courant qui arrivent sur la balle en la modélisant par un cylindre et en regardant une coupe, comme en [Figure 4](#).

Les lignes sont parfaitement symétriques (haut-bas) si bien qu'aucune force ne s'applique sur la balle, elle tombe droite.

Il y a un résultat contre-intuitif, les lignes sont symétriques (gauche-droite) il n'y a donc pas de force de traînée qui s'oppose à la chute de la balle.

3.2 Force de Magnus

Si l'on fait tourner la balle, les lignes de courant ressemblent à la [Figure 5](#).

En supposant l'écoulement irrotationnel, on peut le décrire via un potentiel ! L'idée est de voir une analogie avec l'électrostatique : le cylindre peut se voir comme un dipôle, d'où la forme suivante pour le potentiel :

$$\phi = Ux - \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2} + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}. \quad (3.1)$$

On peut vérifier la forme cohérente pour les différentes vitesses, notamment pour comprendre le terme de rotation :

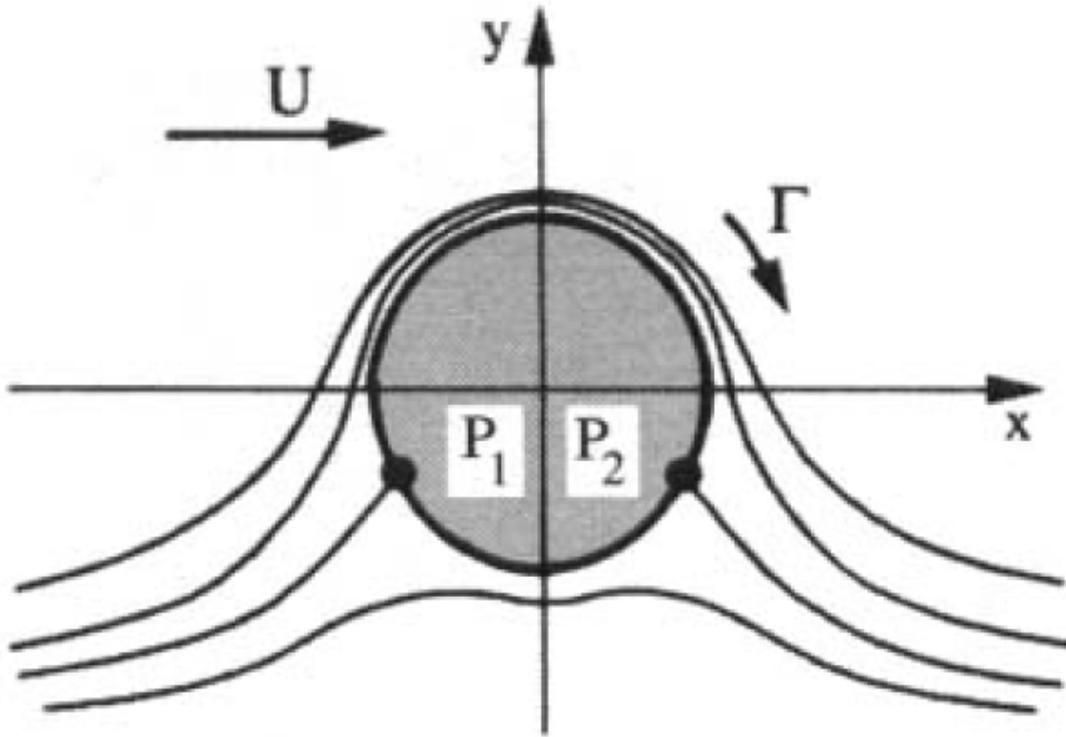


Fig. 5 : Lignes de courant avec rotation du cylindre

$$\vec{v}_{\text{rot}} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \theta. \quad (3.2)$$

La vitesse se met alors sous la forme

$$v_r = U \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) \cos \theta \quad (3.3)$$

$$v_\theta = -U \left(1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (3.4)$$

Le théorème de Bernoulli entre l'infini et la surface $r = R$ assure que

$$P(R) + \frac{1}{2} \rho v_\theta(R)^2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2. \quad (3.5)$$

On peut alors calculer la force de pression

$$F_p = - \int_0^{2\pi} P(R) R \sin \theta \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{\rho U \Gamma}{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \quad (3.6)$$

Finalement,

$$F_p = -\rho U \Gamma. \quad (3.7)$$

Conclusion

On a vu dans cette leçon que dans certains cas on pouvait simplifier l'équation de Navier Stokes en négligeant le terme visqueux (pour de grands nombre de Reynolds). Cela a permis de démontrer des résultats importants comme le théorème de Bernoulli puis de traiter des exemples concrets comme l'effet Venturi ou l'effet Magnus.

Cependant comme on l'a vu un pour décrire un écoulement on ne peut jamais le considérer totalement parfait. On doit prendre en compte les effets visqueux dans la *couche limite*. De plus, les écoulements à haut nombre de Reynolds sont généralement turbulents et tenter de déterminer la forme de l'écoulement devient alors impossible analytiquement. On verra dans le prochain cours que des bilans macroscopiques (à l'image de l'interprétation énergétique de Bernoulli) dans les systèmes ouverts peuvent néanmoins nous apporter beaucoup d'informations.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-