

LP 18 – Phénomènes de transport

11 juin 2021

Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

✦ *LP 18 2021*, Lucas Gey et Sylvio Rossetti →

Prérequis

•

Expériences



Table des matières

1	Transport d'une grandeur conservée	2
1.1	Cadre d'étude	2
1.2	Quantité conservé et vecteur densité de courant	2
1.3	Équation de conservation	3
2	Phénomène de diffusion	4
2.1	Diffusion de particules : loi de Fick	4
2.2	Équation de diffusion et autres phénomènes diffusifs	4
2.3	Résolution de l'équation de diffusion	5
2.4	Diffusion et irréversibilité	5
3	Compétition et couplage entre différents phénomènes de transport	6
3.1	Compétition entre convection et diffusion	6
3.2	Instabilité de Rayleigh Bénard	7
3.3	Bonus : Double diffusion (pour le style)	8
4	Questions et commentaires	8
4.1	Questions	8
4.2	Commentaires	8

Introduction

Un phénomène de transport et un phénomène irréversible durant lequel une grandeur physique est transportée ayant pour origine l'hétérogénéité d'une grandeur intensive. Plus simplement, c'est ce qu'il se passe lorsque la température d'un corps, une concentration, s'homogénéise au cours du temps.

1 Transport d'une grandeur conservée

1.1 Cadre d'étude

Les phénomènes de transport sortent du cadre de la thermodynamique à l'équilibre. Cependant pour pouvoir étudier ces phénomènes, on va se placer à *l'équilibre thermodynamique local*.

Pour comprendre on peut prendre l'exemple de la météo. On donne sur la carte des valeurs de température et de pression, mais l'ensemble du système n'est pas à l'équilibre. Pourtant on peut dire qu'il existe une échelle (typiquement celle de la ville) où on peut définir la température sans ambiguïté.

À une autre échelle, si je mes du sucre dans mon café, je ne peux pas définir la densité volumique de sucre dans le café dans la mesure où elle n'est pas homogène. Mais il y a une taille caractéristique plus petite à laquelle on peut définir une densité volumique en sucre.

On arrive à la définition suivante :

Définition On dit qu'un système est à l'équilibre thermodynamique local, si on peut définir des sous-systèmes de tailles mésoscopiques qui sont à l'équilibre thermodynamique (c'est-à-dire que l'on peut définir à leur échelle toutes les grandeurs thermodynamiques telles que la température ou la pression. cependant il n'est pas en équilibre avec son environnement. Si on isolait brutalement le système, il serait déjà à l'équilibre. La condition sur la taille de ces sous-systèmes est

$$l_p \ll d \ll L, \quad (1.1)$$

avec l_p le libre parcours moyen, d la taille du sous-système et L la taille du système global.

Pour pouvoir vérifier cela, il faut qu'il y ait *séparation d'échelle*.

Temporelle Le temps d'évolution des grandeurs doit être très grand devant le temps de relaxation vers l'équilibre (10^{-9} s pour un gaz parfait)

Spatiale L'échelle de variation spatiale doit être très grande devant le libre parcours moyen (68 nm pour un gaz parfait)



Muni de cette définition on va pouvoir caractériser les phénomènes de transport

1.2 Quantité conservé et vecteur densité de courant

On s'intéresse dans la suite à des grandeurs conservées, c'est-à-dire des grandeurs extensives constantes pour un système isolé. Si cette grandeur varie, c'est qu'elle a été échangée.

De telles grandeurs sont l'énergie dans les transports de chaleur, les particules de la matière dans la diffusion de particule, la charge dans la conduction électrique.

Si la variation des quantités conservées provient d'un échange, il faut pouvoir caractériser cet échange. Raisonnons, pour que ce soit concret, sur des particules comme de l'encre.



Goutte d'encre dans un verre d'eau

On note $n(\vec{r}, t)$ la densité particulaire. On considère un domaine Σ délimité par une surface S . Le flux de particules $d\phi_n$ qui traverse la surface $d\vec{S}$ est alors

$$d\phi_n(\vec{r}, t) = \vec{j}_n(\vec{r}, t) d\vec{S}. \quad (1.2)$$

On fait un schéma pour montrer notamment que les surfaces sont orientées vers l'extérieur.

Cette expression définit le *vecteur densité de courant* ici de particules. C'est le nombre de particules qui traverse la surface $d\vec{S}$ par unité de temps. C'est une quantité algébrique qui s'exprime en $s^{-2} m^{-1}$ dans cet exemple.

On peut généraliser cette grandeur à d'autres flux. On peut par exemple définir le vecteur densité de courant de charge $\vec{j}_e$ qui s'exprime en $A^2 m^{-1}$.

1.3 Équation de conservation

On considère le volume Σ et on fait le bilan des particules qu'il contient : $N(t)$, par définition

$$N(t) = \iiint_V n(\vec{r}, t) dV \quad N(t + dt) = \iiint_V n(\vec{r}, t + dt) dV. \quad (1.3)$$

On en déduit la variation du nombre de particules pendant dt :

$$N(t + dt) - N(t) = \iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} dt dV. \quad (1.4)$$

La variation de la quantité de particule correspond à ce qui est sorti du volume

$$\begin{aligned} N(t + dt) - N(t) &= -\phi_{\text{int} \rightarrow \text{ext}} dt \\ &= -\oint_S d\phi dt \\ &= -\oint_S \vec{j}_n(\vec{r}, t) d\vec{S} dt \\ \iiint_V \frac{\partial n}{\partial t} dt dV &= \iiint_V \nabla \cdot \vec{j}_n(\vec{r}, t) dV dt \end{aligned}$$

On a utilisé pour conclure le théorème de Green-Ostrogradski. On obtient donc une égalité vraie pour tout volume mésoscopique :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_n = 0. \quad (1.5)$$

Cette équation est vraie pour un milieu de vitesse nulle, on peut la généraliser en utilisant la dérivée particulaire :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)n + \nabla \cdot \vec{j}_n = 0. \quad (1.6)$$

C'est une équation d'*advection-diffusion*.

L'advection correspond au déplacement des nuages et la diffusion à la tache d'encre. Dans une casserole remplie d'eau, la chaleur se propage dans le métal par diffusion et dans l'eau en faisant des rouleaux par advection.

Si la grandeur n'est pas conservée on peut ajouter un terme de source on obtient alors

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)n + \nabla \cdot \vec{j}_n = \sigma. \quad (1.7)$$

| Pour pouvoir étudier cette équation il va falloir connaître la forme que prend le courant de déplacement.



2 Phénomène de diffusion

La diffusion est le mode de transport sans déplacement global : $\vec{v} = \vec{0}$.

2.1 Diffusion de particules : loi de Fick

On reprend l'exemple des particules dans le cas de la goutte d'encre. Expérimentalement, on observe que la diffusion a lieu quand il y a une inhomogénéité spatiale de concentration et que la diffusion tend à l'effacer. Fick propose alors en 1855 une loi phénoménologique :

$$\vec{j}_n = -D\nabla n. \quad (2.1)$$

D est le *coefficient de diffusion* qui s'exprime en m s^{-1} . On remarque dans la [Table 1](#) qu'il varie fortement en fonction de la température. En effet l'agitation thermique est le moteur du processus de diffusion.

		$T(^{\circ}\text{C})$	$D(\text{cm s}^{-1})$
Gaz à P_{atm}	H_2 dans l'air	25	0,63
		400	3,24
	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ dans l'air	25	0,24
		400	1,13
Liquides	CO_2 dans l'eau	25	$1,6 \times 10^{-5}$
	Éthanol dans l'eau	25	$1,2 \times 10^{-5}$
	Éthanol dans le benzène	25	$3,0 \times 10^{-5}$
	Cuivre dans l'aluminium fondu	700	$7,2 \times 10^{-5}$
	Or dans l'argent fondu	980	$2,5 \times 10^{-5}$

Tab. 1 : Différents coefficients de diffusion tiré du Diu p.481



Goutte d'encre dans de l'eau chaude

Wow ça va si vite.

Cette loi est une approximation. Le fait que D ne dépende pas de n est une hypothèse forte.



Armé de cette expression de $\vec{j}_n$ on peut s'attaquer l'équation de conservation.

2.2 Équation de diffusion et autres phénomènes diffusifs

On obtient alors l'équation

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n. \quad (2.2)$$

C'est une équation de diffusion. Pour la résoudre il nous faut les conditions initiales et les conditions aux limites.

Le fait que la dérivée par rapport au temps soit d'ordre 1 indique l'irréversibilité du phénomène : si $n(\vec{r}, t)$ est solution alors $n(\vec{r}, -t)$ ne l'est pas !

L'analyse dimensionnelle permet de construire

$$L = \sqrt{Dt}. \quad (2.3)$$

Si les particules sont initialement à l'origine, la largeur de la distribution ira comme $\sqrt{t}$. Ainsi dans une tasse de café $\delta = 5 \text{ cm}$, avec $D = 5 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-1}$ on a $t = \frac{\delta^2}{D} = 58 \text{ jours}$. Il vaut mieux touiller son café que de compter sur la diffusion !

Cette équation se retrouve dans d'autres domaines de la physique comme l'illustre la [Table 2](#).

Diffusion	de particules	thermique	de quantité de mouvement	conduction électronique
Équation de conservation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_n = 0$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_Q = 0$	$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{F}_t}{\partial S} = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_e = 0$
Loi de réponse linéaire	$\vec{j}_n = -D \nabla n$	$\vec{j}_Q = -\kappa \nabla T$	$\frac{d\vec{F}_t}{dS} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{x}$	$\vec{j}_e = -\sigma \nabla V$
Coefficient de transport	Loi de Fick $D(\text{m s}^{-1})$	Loi de Fourier $\kappa(\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1})$	Loi de Newton $\eta(\text{Pa s})$	Loi d'Ohm $\sigma(\text{S m}^{-1})$
	Diffusivité	Conductivité thermique	Viscosité dynamique	Conductivité électrique
Coefficient de diffusion	D	$D_{\text{th}} = \frac{\kappa}{\rho c}$	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	
Équation de diffusion	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$	$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\text{th}} \nabla^2 T$	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{v}$	

Tab. 2 : Équation de diffusion dans différents domaines

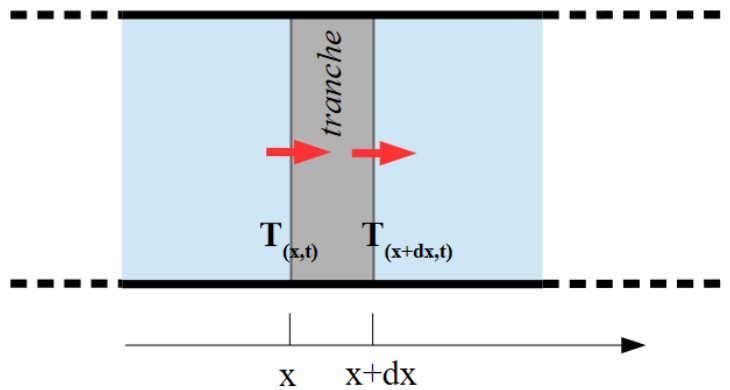


Fig. 1 : Schéma de la tige

2.3 Résolution de l'équation de diffusion

On peut utiliser l'arsenal des équations linéaires et résoudre par transformée de Fourier. On peut sinon illustrer avec un code présent sur le [site de Lucas](#) !

2.4 Diffusion et irréversibilité

La diffusion est un phénomène qui tend à l'homogénéisation de grandeurs dans l'espace. Une fois la grandeur homogène, on ne s'attend pas à ce que la grandeur redevienne macroscopiquement inhomogène, le phénomène est irréversible.

On va montrer dans cette section que la diffusion thermique s'accompagne nécessairement d'une augmentation de l'entropie. On considère une tige de section S et de longueur L . On repère une position dans la tige par son abscisse x . En $x = 0$, la tige est portée à la température T_1 et en $x = L$ elle est portée à la température T_2 . En régime stationnaire, le profil de température est linéaire. Le schéma est illustré [Figure 1](#).

on va effectuer un bilan d'entropie dans la tranche de largeur dx . Le flux d'entropie entrant et sortant de la tranche sera lié à l'énergie interne : on commence par faire le bilan d'énergie interne.

On fait un bilan, la variation est donnée par ce qui rentre moins ce qui sort et rien n'est créé. En régime stationnaire l'énergie interne ne varie pas donc

$$j_Q(x) = j_Q(x + dx). \quad (2.4)$$

Bilan d'entropie Il faut prendre en compte cette fois un terme de création d'entropie volumique par unité de temps $\sigma(x, t)$ tel que l'entropie créée dans le volume $S dx$ situé à l'abscisse x pendant dt s'écrive $\delta^2 S_{\text{créée}} = \sigma(x, t) dx S dt$.

En régime stationnaire, la variation d'entropie pendant dt s'écrit :

$$d^2 S = j_S(x) S dt - j_S S dt + \sigma(x) dt dx S. \quad (2.5)$$

L'entropie entrante est, par nature, de l'entropie échangée : on écrit $j_S(x) = \frac{j_Q}{T(x)}$ d'où :

$$d^2 S = j_Q \left(\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T(x+dx)} \right) S dt + \sigma(x) dt dx S. \quad (2.6)$$

Enfin, en régime stationnaire, $d^2 S = dS(t+dt) - dS(t) = 0$. La transformation de la tranche est isentropique.

Attention ! Ce n'est pas une transformation adiabatique réversible, c'est uniquement lié au fait que l'entropie créée est compensée par un départ d'entropie.

On en déduit l'expression de $\sigma(x)$

$$\sigma(x) = -j_Q \frac{1}{T^2(x)} \frac{dT}{dx}. \quad (2.7)$$

En utilisant la loi de Fourier on obtient finalement

$$\sigma(x) = \kappa \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \frac{1}{T^2(x)}. \quad (2.8)$$

L'entropie créée par unité de volume est positive et ne dépend pas du signe du gradient de température.

3 Compétition et couplage entre différents phénomènes de transport

On s'est pour l'instant surtout intéressé au transport diffusif. Cependant on a vu que dans le cas général l'équation comportait également un terme d'advection non linéaire. On l'a négligé quand on le pouvait car cela aide la résolution mais il existe des phénomènes dont la dynamique est régie par la convection.

3.1 Compétition entre convection et diffusion

Pour savoir si il faut prendre en compte l'advection de la grandeur G on va raisonner en terme d'ordre de grandeur. On va s'inspirer de la mécanique des fluides en raisonnant avec un nombre adimensionné :

$$\frac{\text{advection}}{\text{diffusion}} = \frac{(\vec{v} \cdot \nabla)G}{D\Delta G} \quad (3.1)$$

Pour la diffusion thermique le nombre obtenu est le nombre de Péclet (thermique) :

$$\text{Pe} = \frac{UL}{D_{\text{th}}} \quad (3.2)$$

On considère généralement que dès que l'on a un mouvement d'ensemble du milieu, la convection domine. Par exemple si on veut attendre qu'un colorant s'homogénéise dans un verre d'eau uniquement par diffusion il faut attendre au moins quelques dizaines de minutes. En mélangeant même faiblement le colorant s'homogénéise très vite. La diffusion est donc un processus difficile à étudier proprement (dans les fluides). Pour s'affranchir totalement de la convection il faut prendre des précautions particulières (utilisation de milieux visqueux, absence de vibrations, taille des tubes...).

Dans le cas de le transport de la quantité de mouvement le nombre correspondant est celui que vous connaissez déjà, le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (3.3)$$

Pour le transport de particules, c'est le nombre de Péclet (massique) :

$$\text{Pe}_m = \frac{UL}{D_{\text{part}}} \quad (3.4)$$

Enfin, le nombre de Prandtl caractérise les couches limites thermique et visqueuse.

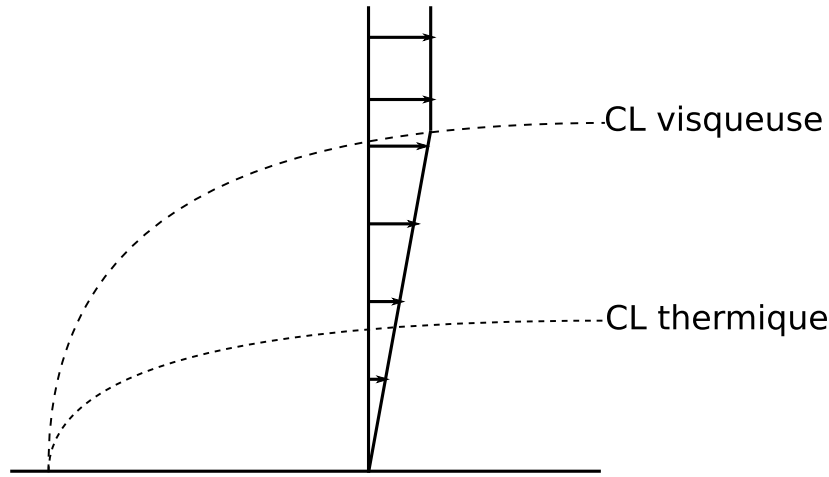


Fig. 2 : Couches limites thermique et visqueuse

En notant v_{lim} la vitesse atteinte en haut de la couche limite thermique, on a pour expression des deux couches limites :

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\nu L}{U}} \quad \delta_t = \sqrt{\frac{DL}{v_{\text{lim}}}} \quad (3.5)$$

On définit le nombre de Prandtl comme le rapport des coefficients de diffusion :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{D} \quad (3.6)$$

- Si $\text{Pr} \ll 1$, la diffusion thermique est très rapide devant la diffusion visqueuse ainsi $v_{\text{lim}} = U$.
- Si $\text{Pr} > 1$ c'est la couche limite visqueuse qui domine et on a :

$$\left(\frac{\delta_t}{\delta_v}\right)^3 \sim \frac{1}{\text{Pr}} \quad (3.7)$$

Cette dernière formule est intéressante en effet elle nous dit que pour un Prandtl de l'ordre de 1, couches limites visqueuse et thermique font la même taille. Dans le cas de l'air $\text{Pr} \sim 0.7 \sim 1$. Ainsi pour refroidir mon assiette de soupe je veux refroidir la couche limite thermique et pour cela il me faut réduire ma couche limite visqueuse (puisque l'une agit sur l'autre) ce que je fais en soufflant sur ma soupe.

3.2 Instabilité de Rayleigh Bénard

Le principe est le suivant : On considère un fluide entre deux plaques, la plaque du bas étant à la température $T_1 = T_0 + \Delta T/2$ et la plaque du haut est à $T_2 = T_0 - \Delta T/2$. On impose donc un gradient de température, et on va chercher à trouver le comportement du système.

Analyse qualitative : Comme le fluide est chauffé par le bas, il va se dilater. On suppose que la masse volumique varie de façon affine avec la température :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (3.8)$$

ou α est le coefficient de dilatation thermique à pression constante.

Le profil de masse volumique sera ainsi croissant avec z . On considère un élément de fluide à une altitude z de masse volumique $\rho(z)$. Si on le déplace vers le haut de dz il est alors entraîné encore plus vers le haut par la poussée d'Archimède car $\rho(z + dz) > \rho(z)$.

On a compétition entre la poussée d'Archimède (moteur de l'instabilité) et les phénomènes diffusifs. Une grande viscosité ralentira la montée de la particule fluide et une grande diffusion thermique thermalisera la particule ce qui fera cesser l'instabilité.

Éléments de réponse : Calculons la poussée d'Archimède en supposant un profil linéaire de la température :

$$d\vec{f}_A = (\rho(z + dz) - \rho(z))g\mathbf{e}_z = \frac{\partial \rho}{\partial z}gzdz\mathbf{e}_z = \rho_0\alpha g\frac{\Delta T}{h}dz\mathbf{e}_z \quad (3.9)$$

$$\frac{d\vec{f}_A}{dz} = \rho_0\alpha g\frac{\Delta T}{h}\mathbf{e}_z \implies f_A \sim \rho_0\alpha g\frac{\Delta T}{h}z \quad (3.10)$$

On peut évaluer le temps caractéristique de montée d'une goutte chaude due à cette force :

$$\frac{1}{2}\rho_0 v^2 = \rho_0 \alpha g \frac{\Delta T}{h} \frac{h^2}{2} \quad (3.11)$$

Et en prenant $v \sim h/\tau_a$:

$$\tau_a = \sqrt{\frac{h}{\alpha g \Delta T}} \quad (3.12)$$

Ce temps correspond au temps moteur de la convection (de l'instabilité). Pour savoir si l'instabilité se développe il faut le comparer aux temps de diffusion visqueuse $\tau_v \sim h^2/\nu$ et de diffusion thermique $\tau_t \sim h^2/d_t$. Ainsi :

$$\text{Ra} = \frac{\tau_v \tau_t}{\tau_a^2} \implies \text{Ra} = \frac{g \alpha \Delta T h^3}{\nu d_t} \quad (3.13)$$

Si $\text{Ra} \ll 1$ les effets dissipatifs l'emportent et l'instabilité n'apparaît pas. Si $\text{Ra} > \text{Ra}_c$ l'instabilité se développe et un mouvement de convection apparaît. Le rayleigh critique est de l'ordre de 1700.

Lorsque la convection apparaît, ça ressemble à [ça](#).

3.3 Bonus : Double diffusion (pour le style)

Dans l'océan, quand on a un fluide stratifié d'eau salée chaude sur de l'eau douce froide, il y a de la double diffusion de chaleur et de particule. C'est un moteur important du mélange océanique.

Conclusion

Au cours de cette leçon on a défini ce qu'était un phénomène de transport et grâce à des bilans on a pu obtenir l'équation d'évolution de quantité conservée. On a détaillé le cas de la diffusion et montré qu'il s'appliquait à de nombreux domaines de la physique. Il existe d'autres modes de transport comme la convection qu'on a abordé ou le rayonnement dont on n'a pas parlé. On peut obtenir les équations phénoménologiques par des modèles microscopiques comme le modèle de Drude pour la conduction dans les métaux.

Les phénomènes de diffusion sont très importants dans l'isolation des bâtiments, enjeu de lutte contre le réchauffement climatique.

4 Questions et commentaires

4.1 Questions

-

4.2 Commentaires

-