LP 19 – Bilan thermique : flux conductif, convectif et radiatif

11 juin 2021
Antoine Chauchat & Valentin Dorel

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *LP 19 2021*, **Lucas Gey et Sylvio Rossetti** ⟶

Prérequis

-

Expériences

☕

Table des matières

1 Bilan thermique **2**

2 Conduction thermique **3**
2.1 Loi de Fourier . . . 3
2.2 Équation de diffusion . . . 4
2.3 Régime stationnaire et résistance thermique . . . 4

3 Convection **4**
3.1 Présentation . . . 4
3.2 Loi de Newton . . . 5

4 Rayonnement thermique **6**
4.1 Loi de Stefan . . . 6
4.2 Estimation du flux de rayonnement solaire sur Terre . . . 6
4.3 Application : le chauffe-eau solaire . . . 6

5 Questions et commentaires **8**
5.1 Questions . . . 8
5.2 Commentaires . . . 8

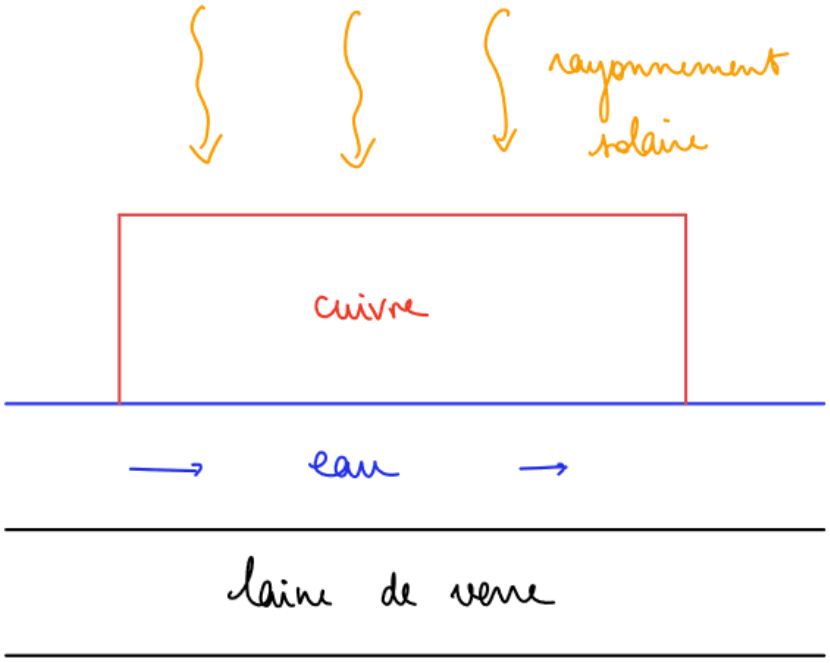

Fig. 1 : Chauffe-eau solaire

Introduction

On s'est intéressé à l'équilibre thermodynamique de corps macroscopiques et on a modélisé des transferts thermiques entre les corps en thermodynamique. Mais tout était regroupé sous la forme d'un Q ou d'un δQ : on n'a pa s décrit les modes de transferts thermiques. C'est ce qu'on va faire dans cette leçon. Dans la vie courant on rencontre différents types de transferts thermiques

- Le soleil nous chauffe la peau
- On différencie les courants d'eau froide et d'eau chaude dans l'eau
- On se brûle sur la poignée de la fourchette laissée dans la poêle.

On va détailler les différents modes de transfert physique et les appliquer pour décrire un chauffe-eau solaire dont un schéma est en Figure 1.

1 Bilan thermique

On considère que l'on peut définir toutes les grandeurs localement (à l'échelle mésoscopique) c'est à dire que l'on peut définir *l'équilibre thermique local*.

On veux effectuer un bilan pour déterminer l'équation d'évolution de la température dans un milieu. Pour ce faire, on va utiliser la conservation de l'énergie. On va commencer par un cas unidimensionnel :

$$\mathrm{d}U = p\mathrm{d}t + \delta Q \tag{1.1}$$

- U est l'énergie interne que l'on peut relier à la température par $\mathrm{d}U = C_v \mathrm{d}T$ avec C_V la capacité calorifique.
- P est la production volumique d'énergie. Elle peut venir d'un chauffage, de réactions chimiques, etc.
- δQ correspond au transfert thermique entre le système et l'extérieur.

Pour se mettre dans la situation la plus générale possible on considère que le système a une vitesse v. On considère une tranche de fluide d'épaisseur dx :

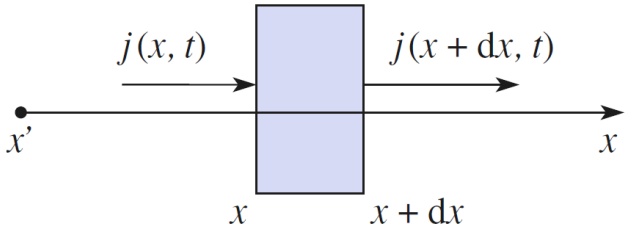

Fig. 2 : Bilan

$$\mathrm{d}U = S\mathrm{d}x(u(x+v\mathrm{d}t, t+\mathrm{d}t) - u(x,t)) = S\mathrm{d}x\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\mathrm{d}t\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1.2}$$

De plus on a $\delta Q = S(j_Q(x,t) - j_Q(x+\mathrm{d}x, t))\mathrm{d}t$ et la puissance $P = pS\,\mathrm{d}x$. On a donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial j_Q}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

Soit :

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_V v\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = p \tag{1.4}$$

On peut généraliser à 3D :

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_V(\vec{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla})T + \boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{j_Q}} = p \tag{1.5}$$

Si la vitesse est fixée, l'équation est linéaire. Les deux premiers termes correspondent à une dérivée convective. Le second notamment correspond au terme d'advection. Il permet de caractériser le transfert thermique lorsqu'il y a mouvement d'ensemble (quand on mélange son café). Le troisième terme est un terme de diffusion. On va maintenant chercher à exprimer j_Q et p pour caractériser complètement T.

2 Conduction thermique

2.1 Loi de Fourier

La conduction thermique est un phénomène se produisant dans un milieu donné. Elle caractérise l'homogénéisation de la température sans transfert global de matière, via les chocs entre les particules. C'est ce qui explique pourquoi la poignée de la casserole est chaude alors qu'on chauffe seulement le bas. En 1822 Joseph Fourier propose une loi phénoménologique pour la diffusion de chaleur : elle relie le vecteur densité de flux de chaleur j_Q au gradient de température :

$$\vec{\mathbf{j_Q}} = -\lambda\boldsymbol{\nabla}T \tag{2.1}$$

Ou λ est la conductivité thermique en W/m/K, elle est spécifique au milieu.

matériau	λ à 300 K en $\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$
cuivre	$4,0.10^2$
acier	$\simeq 50$
verre	$\simeq 1$
eau	$6,0.10^{-1}$
air (sous $P = 10^5$ Pa)	$2,6.10^{-2}$

Fig. 3 : Quelques conductivités thermiques

Remarques :

- La loi de Fourier montre bien un transfert du champ vers le froid (signe $-$).
- On considère généralement λ indépendante de la température. C'est faux en toute généralité mais sur des gammes de température raisonnables c'est assez bien vérifié.
- La loi de Fourier a ses limites : le gradient thermique ne doit pas être trop fort, le milieu est considéré homogène et isotrope.

2.2 Équation de diffusion

En reprenant l'équation de bilan sans le terme d'advection (fluide au repos) et en y injectant la loi de Fourier :

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\lambda \boldsymbol{\nabla} T) \tag{2.2}$$

D'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T \tag{2.3}$$

avec le coefficient de diffusion $D = \frac{\lambda}{\rho c_V}$. On retrouve une équation de diffusion comme pour la diffusion de particules. On appelle cette équation *l'équation de la chaleur*.

Remarques :

- Elle traduit l'irréversibilité du phénomène de diffusion si $T(x,t)$ est solution, $T(x,-t)$ ne l'est pas.
- On peut en déduire un ordre de grandeur $\delta = \sqrt{D\tau}$. Si on impose une variation de température à un endroit elle se propage en $\sqrt{t}$.

2.3 Régime stationnaire et résistance thermique

On considère une tige unidimensionnelle de longueur L selon la dimension x, de section S soumise à ses extrémités à des températures différentes : $T(x=0) = T_1$ et $T(x=L) = T_2$. En régime stationnaire la dérivée seconde de la température selon x est nulle, on aboutit donc au profil linéaire suivant :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \tag{2.4}$$

De plus le vecteur densité de flux s'écrit $j_Q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$ d'où le flux thermique $\phi_Q = j_Q S = S\lambda \frac{T_1 - T_2}{L}$. Ainsi :

$$\frac{T_1 - T_2}{\phi_Q} = \frac{L}{\lambda S} \tag{2.5}$$

Par analogie avec la conduction électrique et la loi d'Ohm on définit $R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$.

	Électricité	Diffusion thermique
Flux	I	ϕ_Q
Force motrice	U = ΔV	ΔT
Loi d'Ohm	$R = \frac{U}{I}$	$R_{\text{th}} = \frac{\Delta T}{\phi_Q}$
Résistance	$R = \frac{L}{\rho S}$	$R_{\text{th}} = \frac{\lambda S}{L}$

Tab. 1 : Analogie électrocinétique et thermique

3 Convection

3.1 Présentation

La convection est un transfert thermique se faisant par le déplacement d'un fluide. L'idée est qu'un élément de fluide à la température T propage son énergie thermique à mesure qu'il se déplace. Nous avons déjà identifié le terme convectif dans le bilan général :

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_V (\vec{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla}) T + \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j_Q}} = p \tag{3.1}$$

Dans le cas général c'est un terme non linéaire. En pratique il faudra parfois utiliser l'équation de Navier Stokes pour déterminer de manière conjointe T et v. Il existe plusieurs modes de convection :

- Convection forcée : c'est la cas d'un ventilateur par exemple.
- Convection naturelle : couplage avec $\rho(T)$, l'exemple le plus classique est la convection de Rayleigh Bénard.

Ici on va se contenter d'un cas simple.

3.2 Loi de Newton

Le modèle de Newton permet de caractériser le flux convectif à l'interface entre un solide et un fluide. Ce modèle a l'avantage d'être linéaire. Cependant ce n'est pas réellement de la convection car on considère que le fluide dans la couche limite ne se déplace pas avec le fluide. On l'appelle généralement modèle conducto convectif.

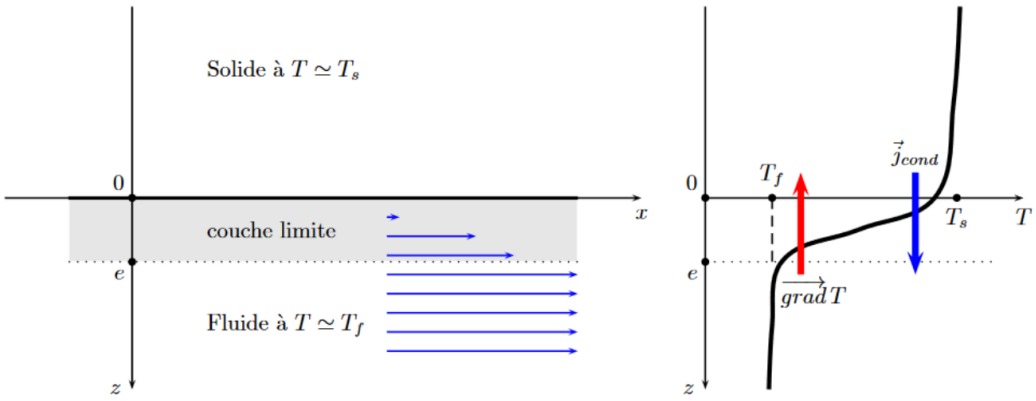

Fig. 4 : Modèle conducto convectif de Newton

On a ainsi une épaisseur e de fluide soumise à une différence de température. Dans ce modèle on suppose un gradient de température constant dans la couche limite ainsi :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{\text{couche}} = \frac{\Delta T}{e} \tag{3.2}$$

Comme on suppose que le transfert est conductif dans la couche limite on a :

$$\delta j_Q = -\lambda_f \frac{\Delta T}{e}\mathbf{e}_z \tag{3.3}$$

On en déduit donc la loi de Newton :

$$\vec{\mathbf{j}}_{\text{conv}} = h(T_s - T_f)\mathbf{n} \tag{3.4}$$

h est le coefficient de conducto convection de Newton en W/m^2/K et $\mathbf{n}$ est la normale à l'interface.

fluide	type de transfert	h en W.m^{-2}.K^{-1}
gaz	convection naturelle	$5-30$
	convection forcée	$10-300$
eau	convection naturelle	$100-1000$
	convection forcée	$300-12000$
métal liquide	convection forcée	$6000-110000$

Fig. 5 : Différents coefficient de conducto convection

On en déduit donc la résistance thermique associée à un transfert thermique entre un solide et un liquide :

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{hS} \tag{3.5}$$

4 Rayonnement thermique

Dans le chauffe-eau solaire, la source d'énergie de chauffage est le rayonnement du Soleil. L'énergie est transportée par le rayonnement électromagnétique. On peut se demander quelle énergie le Soleil apporte au chauffe-eau.

4.1 Loi de Stefan

Rappel Un *corps noir* est un modèle théorique de source qui absorbe la totalité du rayonnement incident (dans la totalité du spectre).

La loi de Stefan stipule que, pour un corps noir à l'équilibre thermique, la puissance surfacique émise par rayonnement est liée à sa température T via $P = \sigma T^4$ où σ est la constante de Stefan qui vaut environ $5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W^2\,m^{-1}\,K^{-3}}$.

on peut également généraliser le corps noir en supposant que seules les couches superficielles sont à l'équilibre thermique. Il n'y a pas forcément équilibre thermodynamique sur l'échelle de tout le corps, l'équilibre thermodynamique local, sur une couche, suffit. C'est le cas pour le Soleil.

4.2 Estimation du flux de rayonnement solaire sur Terre

On suppos que le Soleil est un corps noir sphérique de rayon R_S, de température T_S (du coup on se place dans le cas où on ne regarde que les couches externes !) et on va essayer de déterminer la température de la Terre avec une approche simple . Comme le Soleil est un corps noir, on a $P_\mathrm{S} = \sigma T_\mathrm{S}^4$ Par conservation du flux :

$$4\pi R_\mathrm{S}^2 P_\mathrm{S} = 4\pi d_\mathrm{TS}^2 P_{\mathrm{S}\to\mathrm{T}}, \tag{4.1}$$

où d_TS est la distance Terre-Soleil. On fait un schéma.

La puissance surfacique reçue par la Terre est donnée par

$$P_{\mathrm{S}\to\mathrm{T}} = (1-A)\left(\frac{R_\mathrm{S}}{d_\mathrm{TS}}\right)^2 \sigma T_\mathrm{S}^4. \tag{4.2}$$

En utilisant les données numériques

- $R_\mathrm{S} = 6{,}97 \times 10^5\,\mathrm{km}$
- $d_\mathrm{TS} = 1{,}49 \times 10^6\,\mathrm{km}$
- $T_\mathrm{S} = 5600\,\mathrm{K}$ en surface

$$P_{\mathrm{S}\to\mathrm{T}} \simeq 1\,\mathrm{kW^2\,m^{-1}}. \tag{4.3}$$

On a négligé le rôle de l'atmosphère mais la valeur du flux obtenue est OK donc on s'en passe.

4.3 Application : le chauffe-eau solaire

On revient sur l'exemple du chauffe-eau solaire, on utilise le schéma de la Figure 6.

On note $T_\mathrm{h}, T_\mathrm{b}$ sur le schéma, la vitesse d'écoulement v, les températures T_1 et T_2 d'entrée et de sortie d'eau, la longueur L de la conduite, la dimension b transverse de la conduite selon (Oy). On note Q le débit volumique d'écoulement, S la section de la conduite, ρ la masse volumique du fluide $\Sigma = bL$ la surface du chauffe-eau (faire une diapo).

On est en régime stationnaire.

On écrit l'égalité des flux en haut de la plaque de cuivre :

$$(1-R)P_{\mathrm{S}\to\mathrm{T}}\Sigma + h_1(T_\mathrm{ext} - T_\mathrm{h})\Sigma = \frac{1}{R_\mathrm{Cu}}(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{b}). \tag{4.4}$$

Et de l'autre l'égalité des flux au bas de la plaque

$$\frac{1}{R_\mathrm{Cu}}(T_\mathrm{h} - T_\mathrm{b}) = \int_0^L h_2 b(T_\mathrm{b} - T(x))\,\mathrm{d}x = h_2 L b(T_\mathrm{b} - \overline{T}). \tag{4.5}$$

En bas, tout se passe comme si la température de l'eau était uniforme et égale à $\overline{T}$. Le schéma résistif est donné en Figure 7

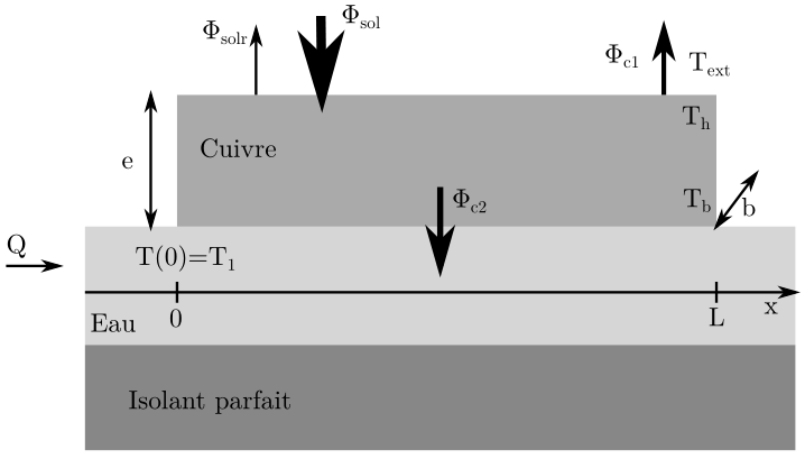

FIGURE 6 – Modélisation du chauffe-eau solaire.

Fig. 6 : Schéma du chauffe-eau solaire

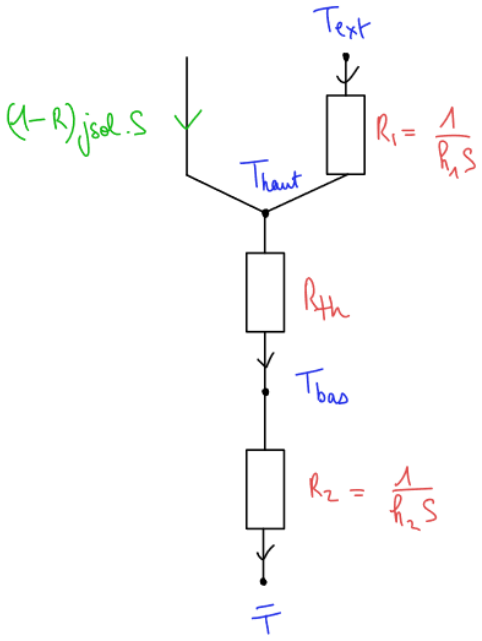

Fig. 7 : Schéma équivalent attention ici S est à remplacer par Σ.

Calcul de $\overline{T}$ On effectue un bilan sur une tranche $\mathrm{d}x$ de la conduite : prendre en compte les flux entrants et sortants selon Ox et le flux entrant par le haut. On néglige les pertes vers le bas. En régime stationnaire :

$$0 = Q\rho c_V T(x)\,\mathrm{d}t - Q\rho c_V T(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t + hb(T_\mathrm{b} - T(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{4.6}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{T}{\delta} = \frac{T_\mathrm{b}}{\delta}, \tag{4.7}$$

avec $\delta = \frac{Q\rho c_V}{hb}$. Cette équation donne accès à $T(x)$ puis à $\overline{T}$ moyennée sur L :

$$\overline{T} = T_\mathrm{b} - \frac{\delta}{L}(T_1 - T_\mathrm{b})\left[\exp\left\{-\frac{L}{\delta}\right\} - 1\right]. \tag{4.8}$$

On définit alors R_equiv par

$$h_2\Sigma\frac{\delta}{L}\left[1 - \exp\left\{\frac{L}{\delta}\right\}\right](T_\mathrm{b} - T_1) = \frac{1}{R_\mathrm{equiv}}(T_\mathrm{b} - T_1). \tag{4.9}$$

Du point de vue des échanges thermiques, tout se passe comme si l'eau avait une température T_1 et que la résistance thermique équivalente était donnée par R_equiv. On refait un nouveau schéma équivalent en remplaçant $\overline{T}$ par T_1 et la résistance du bas par R_equiv. On connaît tous les flux, il n'y a plus qu'à faire de l'élec. Le rendement s'écrit

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{Cuivre}\to\mathrm{eau}}}{P_{\mathrm{S}\to\mathrm{T}}} = \frac{h_2(T_\mathrm{b} - \overline{T})}{P_{\mathrm{S}\to\mathrm{T}}} = h_2\delta b\frac{T_\mathrm{b} - T_1}{\phi_\mathrm{Sol}}\left[1 - \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right)\right] \tag{4.10}$$

On utilise le nouveau schéma équivalent. Un pont diviseur de tension donne $T_\mathrm{b} - T_1$ en fonction T_h

$$T_\mathrm{b} - T_1 = (T_\mathrm{h} - T_1)\frac{R_\mathrm{equiv}}{R_\mathrm{equiv} + R_\mathrm{Cu}} \tag{4.11}$$

En appliquant le théorème de Millman en T_h on trouve

$$T_\mathrm{h} = \frac{\frac{T_1}{R_\mathrm{Cu}+R_\mathrm{equiv}} + (1-R)\phi_\mathrm{Sol} + \frac{T_\mathrm{ext}}{R_1}}{\frac{1}{R_\mathrm{Cu}+R_\mathrm{equiv}} + \frac{1}{R_1}}. \tag{4.12}$$

En utilisant les applications numériques de Pascal Wang données sur son site on trouve $\eta = 0.7$.

Conclusion

Durant cette leçon on a identifie plusieurs paramètres importants du phénomène de transfert thermique et montré comment modéliser ces transferts à travers l'exemple du chauffe-eau solaire. L'étude est facilitée en régime stationnaire : on peut alors calculer des flux et des résistances, et dresser une analogie électrique assez poussée. Lorsque l'on conserve l'aspect dynamique du problème et que l'on modélise la variation de masse volumique des fluides avec la température, on aboutit à la modélisation du phénomène de convection naturelle : l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

5 Questions et commentaires

5.1 Questions

-

5.2 Commentaires

-